现代数学基础丛书 92

传染病动力学的数学建模与研究

马知恩 周义仓
王稳地 靳 祯 著

科学出版社
www.sciencep.com

(O-2018.0101)



ISBN 7-03-013760-4
定 价：46.00 元

现代数学基础丛书　92

传染病动力学的数学建模与研究

马知恩　周义仓　王稳地　靳　祯　著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书系统介绍传染病动力学的建模思想、典型研究方法和主要研究成果.主要内容涉及一些经典的传染病动力学模型和考虑免疫、隔离、生理结构、年龄和病程、时滞、种群迁移、环境污染等因素的传染病模型的建立和分析过程,也介绍了 HIV/AIDS 和 SARS 等恶性传染病的研究结果.本书内容丰富、方法实用,理论分析和数值模拟相结合,反映了当前国内外传染病动力学研究的动向与作者们的研究成果.本书写作由浅到深,既能使一般读者尽快地了解和掌握传染病动力学的方法,又能将有一定基础的读者带到传染病动力学模型研究的前沿.

本书可供从事理论流行病学研究、传染病防制及应用数学工作者阅读,也可供有关方向的研究生和从事相关研究工作的人员学习、参考,其中部分内容也可作为有关专业高年级本科生的选修教材.

图书在版编目(CIP)数据

传染病动力学的数学建模与研究/马知恩 等著.—北京:科学出版社,2004

(现代数学基础丛书;92)

ISBN 7-03-013760-4

Ⅰ.传… Ⅱ.马… Ⅲ.传染病-动力学-数学模型 Ⅳ.R51

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 061711 号

责任编辑:吕 虹/责任校对:朱光光

责任印制:钱玉芬/封面设计:陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码 100717

http //www sciencep com

新蕾印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2004年8月第 一 版 开本:B5(720×1000)

2004年8月第一次印刷 印张:25 3/4

印数:1—3 000 字数:475 000

定价: 46.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈环伟〉)

《现代数学基础丛书》序

对于数学研究与培养青年数学人才而言，书籍与期刊起着特殊重要的作用．许多成就卓越的数学家在青年时代都曾钻研或参考过一些优秀书籍，从中汲取营养，获得教益．

20世纪70年代后期，我国的数学研究与数学书刊的出版由于文化大革命的浩劫已经破坏与中断了十余年，而在这期间国际上数学研究却在迅猛地发展着．1978年以后，我国青年学子重新获得了学习、钻研与深造的机会．当时他们的参考书籍大多还是50年代甚至更早期的著述．据此，科学出版社陆续推出了多套数学丛书，其中《纯粹数学与应用数学专著》丛书与《现代数学基础丛书》更为突出，前者出版约40卷，后者则逾80卷．它们质量甚高，影响颇大，对我国数学研究、交流与人才培养发挥了显著效用．

《现代数学基础丛书》的宗旨是面向大学数学专业的高年级学生、研究生以及青年学者，针对一些重要的数学领域与研究方向，作较系统的介绍．既注意该领域的基础知识，又反映其新发展，力求深入浅出，简明扼要，注重创新．

近年来，数学在各门科学、高新技术、经济、管理等方面取得了更加广泛与深入的应用，还形成了一些交叉学科．我们希望这套丛书的内容由基础数学拓展到应用数学、计算数学以及数学交叉学科的各个领域．

这套丛书得到了许多数学家长期的大力支持，编辑人员也为其付出了艰辛的劳动．它获得了广大读者的喜爱．我们诚挚地希望大家更加关心与支持它的发展，使它越办越好，为我国数学研究与教育水平的进一步提高作出贡献．

杨　乐

2003年8月

前　言

传染病的防制是关系到人类健康和国计民生的重大问题，对疾病流行规律的定量研究是防制工作的重要依据.传染病动力学就是根据疾病发生、发展及环境变化等情况，建立能反映其变化规律的数学模型，通过模型动力学性态的研究来显示疾病的发展过程，预测其流行规律和发展趋势，分析疾病流行的原因和关键因素，寻求对其进行预防和控制的最优策略，为人们防制决策提供理论基础和数量依据.与生物统计学相比，传染病动力学更着眼于疾病传播内在规律的描述和研究，更有利于疾病发展趋势的预测和最优控制策略的研究.传染病动力学与生物统计学的密切结合，模型的定性分析、数值计算和计算机模拟等方法的配合使用，有助于更加有效、准确、全面、迅速和经济地给出某地区疾病流行的数量规律.

西安交通大学生物数学研究组，1995 年以来，在对数学生态学进行长期研究的基础上，全力转入了传染病动力学的数学建模与研究.先后承担了三个关于传染病动力学的国家自然科学基金项目和一个关于艾滋病的国家“十五”攻关项目.本书是 9 年来作者学习和研究工作的结晶.

本书偏重于对模型的定性分析.全书共分 6 章.第 1、2 章讲解传染病动力学的基本知识、建模思想和对发展方向的概述.为初学读者进入专题学习奠定基础.后面 4 章分别就常微分方程模型、时滞微分方程模型、脉冲微分方程模型和年龄结构模型作比较系统、深入的专题介绍.

本书希望能将对传染病动力学有兴趣的读者从初学引入到科研前沿.书中综合了作者收集到的国内外有关研究资料和本研究组近几年的研究成果.基本内容力求写得由浅到深、通俗易懂，同时也为进一步研究的需要向读者介绍一些比较深入的内容，展示科研前沿.在讲解上，力求准确地阐述基本概念，突出建模思想，通过模型和研究结果的系统整理，介绍一些常用的和新发展的数学方法，尽力描述概念和方法的实质，注意解释研究结果的生物学含义和应用价值.本书可供有关方向的研究生学习，也可供有关从事科学研究工作的人员参考.其中 1、2 章和后 4 章的部分内容也可作为有关专业本科生高年级的选修教材.

本书在统一筹划的基础上，分工撰写.第 1、2 两章由马知恩撰写；第 3、5 两章由靳祯撰写；第 4 章由王稳地撰写；第 6 章由周义仓撰写.

本书的出版得到中国科学院科学出版基金委员会学科评审组专家们的认同和基金的资助，在此深表感谢.作者们还衷心地感谢李大潜院士，姜礼尚教授等

对本书撰写和出版的关心、鼓励和支持；感谢吕虹编审对本书从策划到编辑加工的热心支持和辛勤劳动；也感谢李建全副教授为本书 3.2 节所撰写的部分初稿.

限于作者水平，书中难免有错误和不妥之处，所引用的结果和文献也会有所遗漏，恳望得到广大读者的批评指正.

作　者

2004 年 7 月

目　录

第 1 章　传染病动力学的基本知识

§1.1　传染病动力学建模的基本思想

1.1.1　研究传染病的重要意义

传染病历来就是危害人类健康的大敌,历史上传染病一次又一次的流行给人类生存和国计民生带来了巨大的灾难.早在公元 2 世纪,Antonine 瘟疫在罗马帝国的流行,引起了人口的急剧下降和经济恶化,使人侵者乘虚而人,导致了罗马帝国的崩溃[1].公元 1519～1530 间麻疹等传染病的流行,使 Mexico 的印第安人从 3000 万下降到 300 万.使人闻之色变的黑死病(淋巴腺鼠疫)曾四次在欧洲大规模流行:第一次是公元 600 年,使欧洲约一半的人口丧生,死亡率最高时达每天一万多人[2];第二次爆发于公元 1346～1350 年间,导致了欧洲 1/3 的人口死亡;第三次发生于 1665～1666 年间,使伦敦有 1/6 的人口死亡;最后一次是在 1720～1722 年间,使法国 Marseilles 的一半人口,Toulon 附近 60%的人口,Arles 44%、Aix 和 Arignon 30%的人口死亡[1].

长期以来,人类与各种传染病进行了不屈不挠的斗争.回顾斗争历程,应该说 20 世纪是人类征服传染病取得最辉煌成果的时期:肆虐了近千年的的天花终于被消灭了;麻风病、脊髓灰质炎被彻底消灭的日子也为期不远了;白喉、麻疹、百日咳、破伤风等病已在许多国家得到遏制;多种抗生素的问世,使一度给人类造成巨大灾难的"瘟疫"不再危害人间.然而,人类要征服传染病,道路依然曲折漫长.世界卫生组织(WHO)发表的世界卫生报告表明,传染病依然是人类的第一杀手.目前全球 60 亿人口中约有半数受到各种不同传染病的威胁.以 1995 年为例,全世界死亡共 5200 万人,其中 1700 万人丧生于各种传染病;急性呼吸道感染每年造成 400 万儿童死亡;霍乱、痢疾等腹泻病每年导致 300 万人死亡[3].WHO1993～1996 年的报告称每年全世界估计有 40%的人有可能传染上疟疾.在每年 3 亿～5 亿的疟疾病人中,有 150 万～270 万是因疟疾而死[4].

1990 年苏联发生白喉流行,波及东欧 15 个国家,病例超过 10 万人;各种类型的肝炎在不少国家广泛流行;性病患者显著上升;人类新的致命杀手——艾滋病(AIDS)来势凶猛,联合国艾滋病规划署(UNAIDS)和世界卫生组织最新报告显示,截至 2000 年底,全球累计感染免疫缺陷(HIV)病毒的总人数已达 5790 万人,涉及 193 个国家和地区,其中累计已死亡于 AIDS 病的人数为 2180 万,且 90%以上发生在发展中国家.每天有近 16000 名新感染者,该两组织估计,若不

采取紧急有效措施，到 2101 年非洲人的平均寿命将因艾滋病而下降 30 岁. 艾滋病将导致非洲撒哈拉沙漠以南的地区一半的人口死亡[5].

中华人民共和国成立以后，我国传染病的防制一直受到各级政府和研究部门的高度重视，采取了一系列的宣传教育和防制措施，在控制和逐步消灭某些传染病方面取得了辉煌的成绩. 然而，随着国际贸易和交往的发展、生态环境的变化以及病原体和传播媒介抗药性的增强，原来已灭绝或被控制的许多传染病，如性病、结核病等再次抬头并且不断蔓延. 一些新近出现的传染病也来势凶猛. 例如，我国 1985 年首次发现艾滋病，1993 年以后，HIV 感染率高速增长，到 2000 年底全国 31 个省、市和直辖市共报告 HIV 病毒感染人数达 22 517 例[6]，有关专家估计，实际感染人数已达 60 万，若无有效控制手段，预计 2010 年将达 1000 万. 我国每年将为此付出 4600 亿～7700 亿元人民币的代价[6]. 中科院艾滋病研究专家呼吁："假如不迅速采取措施，中国将成为世界上艾滋病感染人数最多的国家之一，艾滋病的流行将会成为国家灾难". 历史和现实都告诫人们：人类正面临着传染病长期而严峻的威胁，对传染病发病机理、传染规律和防治策略研究的重要性日益突出，且已成为当今世界需要迫切解决的一个重大问题.

目前，对传染病的研究方法主要有四种：描述性研究、分析性研究、实验性研究和理论性研究. 传染病动力学是对传染病进行理论性定量研究的一种重要方法. 它是根据种群生长的特性，疾病的发生及在种群内的传播、发展规律，以及与之有关的社会等因素，建立能反映传染病动力学特性的数学模型，通过对模型动力学性态的定性、定量分析和数值模拟，来显示疾病的发展过程，揭示其流行规律，预测其变化发展趋势，分析疾病流行的原因和关键因素，寻求对其预防和控制的最优策略，为人们防制决策提供理论基础和数量依据. 与传统的统计方法相比，动力学方法能更好地从疾病的传播机理方面来反映流行规律，能使人们了解流行过程中的一些全局性态. 传染病动力学与生物统计学以及计算机仿真等方法相互结合、相辅相承，能使人们对传染病流行规律的认识更加深入全面，能使所建立的理论与防制策略更加可靠和符合实际.

虽然早在 1760 年 D. Bernoulli 就曾用数学研究过天花的传播[7]，但确定性传染病模型的研究应该说始于 20 世纪. 1906 年 Hamer 为了理解麻疹的反复流行，构造并分析了一个离散时间模型[8]. 1911 年公共卫生医生 Ross 博士利用微分方程模型对疟疾在蚊子与人群之间传播的动态行为进行了研究[9]，其结果表明，如果将蚊虫的数量减少到一个临界值以下，那么疟疾的流行将会得以控制. Ross 的这项研究使他第二次获得了 Nobel 医学奖. 1926 年 Kermack 与 McKendrick 为了研究 1665～1666 年黑死病在伦敦的流行规律以及 1906 年瘟疫在孟买的流行规律，构造了著名的 SIR 仓室模型[10]. 继后，又在 1932 年提出了 SIS 仓室模型[11]，并在分析所建立模型的基础上，提出了区分疾病流行与否

的"阈值理论",为传染病动力学的研究奠定了基础.传染病动力学的建模与研究于20世纪中叶开始蓬勃地发展.作为标志性的著作是Bailey于1957年出版、1975年第二版的专著[12].

近20年来,国际上传染病动力学的研究进展迅速,大量的数学模型被用于分析各种各样的传染病问题.这些数学模型大多是适用于各种传染病的一般规律的研究,也有部分是针对诸如麻疹、疟疾、肺结核、性病、艾滋病等诸多具体的疾病.从传染病的传播机理来看,这些模型涉及接触传播、垂直传播、虫媒传播等不同感染方式,是否考虑疾病的潜伏期,对病人的隔离,因病或因接种而获得的免疫力以及免疫力的逐渐丧失,是否可以忽略因病死亡率,不同种群之间的交叉感染,种群自身不同的增长规律,以及种群的年龄结构,在空间迁移或扩散等因素.从模型的数学结构来看,绝大多数传染病模型是常微分方程组,具有年龄结构的模型是一阶偏微分方程组,具有扩散项的模型是二阶偏微分方程组,具有时滞因素的是时滞微分积分方程组或微分方程组.传染病防制优化模型是满足一些方程组的泛函极值问题.对于不同疾病与不同种群和环境,根据出生、死亡、传播、患病、治愈等规律的不同,又可将模型分为线性、非线性、自治、非自治等类型,而且同一类模型的具体形式也会有所不同.对这些模型的理论研究主要集中在解的适定性,疾病的持续生存,平衡位置特别是导致地方病的平衡位置和周期解的存在性和稳定性,再生数以及分歧点的寻找等动力学性态.

早期的传染病模型大多假设种群总数为常数,这种假设仅当时间较短、环境封闭、生育率与自然死亡率能够相互平衡,且因病死亡率不大而可以忽略不计时成立.近期所研究的模型更加向实际靠拢,大致有三个发展方向:模型所涉及的因素增多,例如考虑时滞因素、年龄结构、隔离影响、变动人口等;模型维数上的增高,考虑疾病在多个群体中的传播和交叉感染;结合某些具体的传染病进行更为细致深入的研究.由于模型更接近实际,从而变得更为复杂,理论研究也不断面临一些新的困难.在研究方法上除一些经典方法外,分歧、混沌、普适开拆等动力系统方法,度理论、算子半群理论以及一些非线性分析的方法也被相继引入,计算机模拟在国外也已经普遍地使用.

本章旨在结合一些简单的基本模型介绍建立传染病模型的基本思想方法,阐述一些常用的基本概念和研究的主要问题.

1.1.2 两个基本的传染病动力学模型

在传染病动力学中,长期以来主要使用的数学模型是所谓的"仓室"(compartment)模型,它的基本思想由Kermack与McKendrick创立于1927年,但一直到现在仍然被广泛的使用和不断地发展着.下面我们以他们提出的两个经典的基本模型为例,来阐述建立仓室模型的基本思想和有关基本概念,并显示

由模型所能得到的主要结论.

Kermack-McKendrick 的 SIR 仓室模型　所谓 SIR 仓室模型就是针对某类传染病将该地区的人群[①]分成以下三类(即三个仓室):

易感者(susceptibles)类　其数量记为 $S(t)$,表示 t 时刻未染病但有可能被该类疾病传染的人数.

染病者(infectives)类　其数量记为 $I(t)$,表示 t 时刻已被感染成病人而且具有传染力的人数.

移出者(removed)类　其数量记为 $R(t)$,表示 t 时刻已从染病者类移出的人数.

设总人口为 $N(t)$,则有 $N(t)=S(t)+I(t)+R(t)$. $K\text{-}M$ 的 SIR 模型是一个十分简单粗糙的模型. 它的建立基于以下三个基本假设:

(1) 不考虑人口的出生、死亡、流动等种群动力因素. 这意味着考虑一个封闭环境而且假定疾病随时间的变化要比出生、死亡随时间变化显著得多,从而后者可以忽略不计. 这样,此环境的总人口始终保持为一个常数,即 $N(t)\equiv K$,或

$$S(t)+I(t)+R(t)\equiv K$$

(2) 一个病人一旦与易感者接触就必然具有一定的传染力. 这里假设 t 时刻单位时间内,一个病人能传染的易感者数目与此环境内易感者总数 $S(t)$ 成正比,比例系数为 β,从而在 t 时刻单位时间内被所有病人传染的人数(即新病人数)为 $\beta S(t)I(t)$.

(3) t 时刻,单位时间内从染病者类移出的人数与病人数量成正比,比例系数为 γ,从而单位时间内移出者的数量为 $\gamma I(t)$. 显然,γ 是单位时间内移出者在病人中所占的比例,称为**移出率系数**,当不致混淆时也简称为**移出率**[②]. 当移出者中仅包括康复者时,移出率系数又称为**恢复率系数**或简称为**恢复率**.

在以上三个基本假设下,易感者从患病到移出的过程可用下述框图描述.

$$\boxed{\quad S\quad}\xrightarrow[\beta SI]{}\boxed{\quad I\quad}\xrightarrow[\gamma I]{}\boxed{\quad R\quad}$$

对每一个仓室的人口变化率建立平衡方程式,便得到以下模型:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=-\beta SI,\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=\beta SI-\gamma I,\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}=\gamma I.\end{cases}\tag{1.1.1}$$

---

① 为叙述方便,本书以人群来阐述有关概念和模型、相关的结论对其它生物种群同样适用.

② 读者应注意它与关于时间的变化率的区别.

下面,我们通过对模型(1.1.1)的分析和解的渐近性态研究来初步显示动力学模型对认识传染病流行规律所起的作用.

将(1.1.1)中三个方程两端分别相加,得

$$\frac{\mathrm{d}(S+I+R)}{\mathrm{d}t}=0,$$

从而

$$S(t)+I(t)+R(t)=K(\text{常数}).$$

由于(1.1.1)中前两个方程中不含 R ,故实际上我们只需先讨论前两个方程:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=-\beta SI,\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=I(\beta S-\gamma).\end{cases}\tag{1.1.2}$$

由于 $\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}<0$, $S(t)$ 单调递减且有下界(为 0),故极限

$$\lim_{t\to\infty}S(t)=S_\infty$$

存在.由(1.1.2)有

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}S}=-1+\frac{\rho}{S},\qquad \rho=\frac{\gamma}{\beta}.\tag{1.1.3}$$

可见,当 $S=\rho$ 时,I 达到极大值.从而不难在相平面(S,I)上画出系统(1.1.2)的轨线分布图,如图 1.1所示.方程(1.1.3)的所有平衡点都在 S 轴上,而且 $I=0$ 为系统(1.1.2)的一条奇线.由图 1.1 可见,当初始时刻易感者数量 $S(0)=S_0>\rho$ 时,随着时间增长,染病者数量 $I(t)$ 将先增加达到最大值 $I(\rho)$,然后再逐渐减少而最终消亡.这一现象表明,只要 $S_0>\rho$,即 $S_0\beta\dfrac{1}{\gamma}>1$,疾病就会流行.

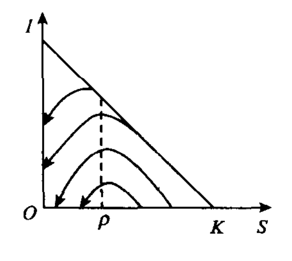


图 1.1

令

$$R_0=\beta\frac{1}{\gamma}S_0=\frac{S_0}{\rho},\tag{1.1.4}$$

则当 $R_0>1$ 时,疾病流行;当 $R_0<1$ 时,疾病不会流行,染病者数量 $I(t)$ 将单调下降而趋向于零. $R_0=1$ 是区分疾病流行与否的阈值.

应当指出,(1.1.4) 中的$\dfrac{1}{\gamma}$ 表示**平均移出时间**,也就是**平均患病期**.事实上,由移出率系数 γ 的定义可见,若病人数量为 n,则单位时间内移出者的数目为 γn,故经过时间$\dfrac{1}{\gamma}$,病人全部移出.

要防止疾病流行,必须减少 R_0 使它小于 1,由表达式(1.1.4) 可知,这可以

通过加强治疗以缩短染病期$\frac{1}{\gamma}$或采取杀菌等措施以减少疾病的传染力β,或通过隔离措施以减少与患病者可能接触的人数即这里的易感者数S_0来实现.更为有效的方法是通过疫苗接种以使易感者成为免疫者而直接进入移出者类R,从而减少初始时刻易感者的数量S_0.设人群中通过接种免疫成功的比例为$p(0 \leqslant p \leqslant 1)$,则$S_0$就变成了$(1-p)S_0$,从而$R_0$变小为

$$\bar{R}_0 = \beta \frac{1}{\gamma}(1-p)S_0.$$

要求$\bar{R}_0 < 1$,即要求

$$p > 1 - \frac{\gamma}{\beta \cdot S_0} = 1 - \frac{1}{R_0}. \tag{1.1.5}$$

由(1.1.5)式可知,R_0越大,为防止疾病流行所需接种的人口比例p就越高.

由此可见,对R_0值的估计是十分重要的.由(1.1.4)式可见,要估计R_0的值,难点在于估计β,因为β不仅取决于疾病的种类,而且还依赖于人群所处的社会环境和病人的活动情况.下面介绍一种对R_0的近似估计法.

求解方程(1.1.3),它过初值(S_0, I_0)的解为

$$I - I_0 = -(S - S_0) + \rho \ln \frac{S}{S_0}, \tag{1.1.6}$$

由于当$t \to +\infty$时,$I(t) \to 0, S(t) \to S_\infty$,代入(1.1.6)式并注意到$S_0 + I_0 = K$,得

$$K - S_\infty + \rho \ln \frac{S_\infty}{S_0} = 0. \tag{1.1.7}$$

用数学分析的方法容易验证方程(1.1.7)有且仅有惟一的正实根S_∞.并可解得

$$\frac{\gamma}{\beta} = \rho = \frac{K - S_\infty}{\ln S_0 - \ln S_\infty}, \tag{1.1.8}$$

S_0与S_∞是可以测定的,例如可以通过血清检查测定.从而可根据(1.1.8)式确定ρ的值,然后由$R_0 = \frac{S_0}{\rho}$来确定R_0.在测得平均患病期$\frac{1}{\gamma}$后,也可由(1.1.8)式估算出β.

例如([13]),1666 年英格兰 Sheffield 附近的 Eyam 村庄突然遭受淋巴腺鼠疫的侵袭,350 人中仅有 83 人幸免于难.根据保存的详细资料,从 1666 年 5 月中旬到 10 月中旬为第一次流行期,最初染病人数为 7 人,易感者人数为 254 人,最后剩下 83 人①.即在(1.1.8)中,$S_0 = 254, S_\infty = 83, K = 261$,从而$\rho = 153$,

① 这里将因病死亡者归入了模型(1.1.1)中的移出者类 R.

$R_0 = 1.66$. 实际观察可知,此病的患病期为11天,故 $\beta = \dfrac{\gamma}{\rho} = 0.000594(1/\text{天}) = 0.0178(1/\text{月})$.

由(1.1.7)式还可看出,$S_\infty \neq 0$,即在任何情况下易感者不可能全部被感染,而且如果 R_0 已知((1.1.2)将介绍 R_0 的其它估计方法),则由于 $\rho = \dfrac{S_0}{R_0}$,可由(1.1.7)式算出 S_∞,从而得知流行结束时会有多少人患过病.

由于当 $S = \rho$ 时 I 最大,由(1.1.6)式,令 $S = \rho$ 可得疾病流行高峰时的病人数

$$I_{\max} = I_0 + S_0 - \rho + \rho \ln \frac{\rho}{S_0} = K - \rho(1 + \ln R_0).$$

例如,Eyam 村在淋巴腺鼠疫流行高峰时的病人数为

$$I_{\max} = 261 - 153(1 + \ln 1.66) \approx 31(\text{人}).$$

Kermack-Mckendrick 的 SIS 仓室模型 一般来说,通过病毒传播的疾病如流感、麻疹、水痘等康复后对原病毒具有免疫力,适合用上述 SIR 模型描述;通过细菌传播的疾病,如脑炎、淋病等康复后不具有免疫力,可以被再次感染. 1932 年 Kermack 和 Mckendrick 针对这类疾病提出了康复者不具有免疫力的 SIS 模型,疾病的传播机制如下面框图所示:

$$S \xrightarrow{\beta SI} I, \qquad I \xrightarrow{\gamma I} S$$

这里假设患病者康复后将重新成为易感者,其它假设与 SIR 模型相同. 此时模型为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = -\beta SI + \gamma I, \\ \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \beta SI - \gamma I. \end{cases} \tag{1.1.9}$$

利用 $S + I = K$,可将方程组(1.1.9)化成方程式

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \beta(K - S)(\rho - S), \qquad \rho = \frac{\gamma}{\beta}. \tag{1.1.10}$$

易见,当 $\rho \geqslant K$ 时,方程(1.1.10)有惟一的平衡点 $S = K$,它是渐近稳定的,即从任一 $S_0 \in (0, K]$ 出发的解 $S(t)$ 均单调增加趋向于 $S = K$,从而 $I(t)$ 将单调减小而趋向于零,说明疾病不会流行.

当 $\rho < K$ 时,方程(1.1.10)有两个正平衡点:$S = K$,$S = \rho$. $S = K$ 不稳定;$S = \rho$ 渐近稳定. 任一从 $S_0 \in (0, K)$ 出发的 $S(t)$ 均随 t 的增大而趋向于 ρ,从而 $I(t) \to 1 - \rho$. 这时疾病流行且病人不会消失,最终保持在 $1 - \rho$ 的数量而

变成一种地方病(endemic).这当然是人们所不希望的.

因此,$R_0 = \dfrac{K}{\rho} = 1$ 是区分疾病流行与否,或者是否产生地方病的阈值,当 $R_0 < 1$ 时,疾病逐渐消失;当 $R_0 > 1$ 时,疾病流行而导致地方病产生.

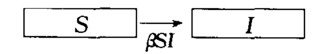
1.1.3　传染病动力学模型的基本形式

最基本的传染病动力学模型大致有以下几类.下面,我们仅用框图的形式把它们列举出来:

1. 不考虑出生与自然死亡等种群动力学因素,适宜于描述病程较短,从而在疾病流行期间内,种群的出生和自然死亡可以忽略不计的一些疾病.

(1) 无疾病潜伏期

1) SI 模型.患病后难以治愈



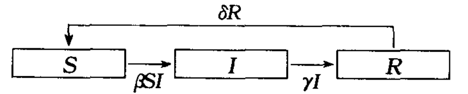
2) SIS 模型.患病后可以治愈

$$S \xrightarrow{\beta SI} I, \quad I \xrightarrow{\gamma I} S$$

3) SIR 模型.患病治愈后获得了终身免疫力

$$S \xrightarrow{\beta SI} I \xrightarrow{\gamma I} R$$

4) SIRS 模型.病人康复后只有暂时免疫力,单位时间内将有 δR 的康复者丧失免疫而可能再次被感染.



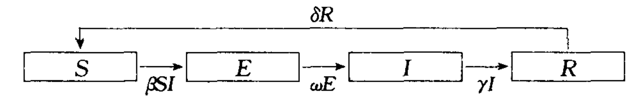
应当注意,SIRS 模型与 SIS 模型的区别在于,后者无免疫期,康复的病人可以立即再次被感染;而前者有暂时的免疫期,病人康复后先进入具有免疫力的移出者类 R,再以比例 δ 丧失免疫力而变成易感者.

(2) 有疾病潜伏期.即在被感染后成为患病者 $I(t)$ 之前有一段病菌潜伏期,并且假定在潜伏期内的感染者没有传染力.记 t 时刻潜伏期的人数为 $E(t)$.疾病的平均潜伏期为 $\dfrac{1}{\omega}$.

例如:1) SEIR 模型.病人康复后具有永久免疫力.

$$S \xrightarrow{\beta SI} E \xrightarrow{\omega E} I \xrightarrow{\gamma I} R$$

2) SEIRS 模型,病人康复后仅有暂时免疫力



2. 添加种群动力学因素

(1) 总人口恒定

即在疾病流行期间,考虑人口的出生与自然死亡等变化,但假定出生率系数(即单位时间内出生的人数在总人数中的比例)与自然死亡率系数相等①,且不考虑人口输入和输出以及因病死亡,从而总人口保持为一常数 K. 例如:

1) SIR 无垂直传染模型. 即母亲的疾病不会先天传染给新生儿,故新生儿均为易感者.

$\xrightarrow{bK}$ [S] $\xrightarrow[\beta SI]{}$ [I] $\xrightarrow[\gamma I]{}$ [R]

$S \downarrow bS$,　$I \downarrow bI$,　$R \downarrow bR$

这里假设出生率系数与自然死亡率系数均为 b. $S(t)+I(t)+R(t)=K$.

2) SIR(有垂直传染且康复者的新生儿不具免疫力) 模型.

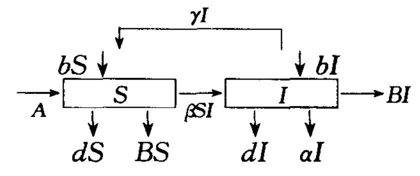
$\xrightarrow{b(S+R)}$ [S] $\xrightarrow[\beta SI]{}$ [I] $\xrightarrow[\gamma I]{}$ [R]

$\downarrow bI$ (进入 I);　$S \downarrow bS$,　$I \downarrow bI$,　$R \downarrow bR$

(2) 总人口变动

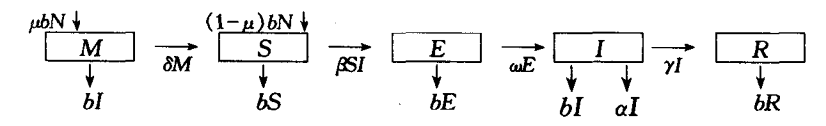
即考虑因病死亡、人口的输入和输出、出生率与自然死亡率不相等、密度制约等因素(从而总人口为时间 t 的函数 $N(t)$). 例如:

1) SIS(有垂直传染且有输入输出) 模型



这里假定出生率系数为 b,自然死亡率系数为 d,因病死亡率系数为 α,对时间的输入率为 A,且均为易感者,输出率系数为 B,且输出者关于易感者和患病者平均分配.

2) MSEIR(有先天免疫,无垂直传染) 模型. 即由于母亲抗体对胎儿的作用,使部分新生儿具有暂时的先天免疫力.



---

① 在不致混淆时,出生率与死亡率系数有时也分别简称为出生率与死亡率.

这里假定在新生儿中有比例 μ 具有先天暂时免疫，平均先天免疫期为 $\frac{1}{\delta}$，然后进入易感者类；而比例 $(1-\mu)$ 的新生儿不具有先天免疫而直接归入易感者类，其余符号的涵义与前同.

至于具有疫苗接种、隔离以及密度制约、年龄结构等更为复杂的模型将留待以后介绍.

根据以上框图读者容易直接建立相应的模型. 例如，对于2(1)中的无垂直传染的SIR模型，可写出方程组：

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = bK - \beta SI - bS, \\ \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \beta SI - bI - \gamma I, \\ \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = \gamma I - bR.\end{cases} \tag{1.1.11}$$

对于2(2)中的SIS模型可写出方程组

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = A + bS - \beta SI - dS - BS + \gamma I, \\ \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = bI + \beta SI - dI - \gamma I - BI - \gamma I.\end{cases}$$

§1.2　传染病动力学中的几个基本概念

本节将结合几个简单模型的研究，进一步阐述传染病动力学中的几个重要的基本概念，揭示它们的现实意义.

1.2.1　有效接触率与疾病的发生率

现在我们来更细微地分析传染过程. 设病人传染是通过与他人接触形成的. 单位时间内一个病人与他人接触的次数称为**接触率**(contact rate). 它通常依赖于环境中的总人口数 N，记作 $U(N)$. 如果被接触者为易感者，就会有一定程度的传染，设每次接触传染的概率为 β_0，我们把赋有传染概率 β_0 的接触称为**有效接触**，这时的接触率称为**有效接触率**(adequate contact rate)，即 $\beta_0 U(N)$. 它表示一个病人传染他人(易感者) 的能力，反映了病人的活动能力、环境条件以及病菌的毒力等因素. 应当注意，一般来说总人口中除易感者和患病者外还可能包含有疾病免疫者和潜伏者. 当病人与非易感者接触时不会发生传染，而易感者 S 在总人口 N 中所占比例为 $\frac{S}{N}$. 因此，每一病人平均对易感者的有效接触率为

$\beta_0 U(N)\dfrac{S}{N}$,也就是每一个病人平均对易感者的传染率,简称为**传染率**.从而 t 时刻在单位时间内被所有病人传染的人(即新病人)数为

$$\beta_0 U(N)\frac{S(t)}{N(t)}I(t),$$

称为此疾病的**发生率**(incidence).

在前面的模型中,实际上,都假定接触率与环境内人口总数成正比,即 $U = kN$,于是 t 时刻的有效接触率为$\beta_0 kN = \beta N$,其中 $\beta = \beta_0 k$ 是有效接触率在总人口数 N 中所占比例,称为有效接触率系数或**传染率系数**①.从而 t 时刻在单位时间内所产生的新病人数也就是疾病的发生率为

$$\beta N(t)\frac{S(t)}{N(t)}I(t) = \beta S(t)I(t).$$

所以当有效接触率为 βN 时,发生率为 βSI,这种发生率称为**双线性(bilinear)发生率**,或称**简单质量作用律(simple mass action law)发生率**.

当人口数量很大时,与人口成正比的接触率显然是不符合实际的,因为单位时间内一个病人所能接触他人的数目是有限的.这时通常假定接触率为一常数 k,即有效接触率为 $\beta = \beta_0 k$,从而疾病的发生率为 $\beta\dfrac{S}{N}I$,这种发生率称为**标准(standard)发生率**.

Anderson,May 等人指出,通常对人类和某些群居的动物来说,标准发生率比双线性发生率更符合实际[14,15,16].使用形如 $\beta N^{\alpha}SI/N$ 的发生率对 5 种人类传染病在人口为 1000 到 40 万的社区内进行统计的数据表明,α 位于 0.03 和 0.07 之间[14,15].这一事实说明,人口的数量对许多传染病发生率的影响是很微弱的.α 更接近于 0 而远不是 1.$\alpha = 0$ 时上述形式的发生率就是标准发生率.也有资料表明选用非线性有效接触率 $\beta N^{0.05}$,从而发生率为 $\beta N^{0.05}\dfrac{SI}{N}$[14].

介于双线性发生率与标准发生率之间,还有一种可能更符合实际的饱和接触率 $U(N) = \dfrac{\alpha N}{1+\omega N}$[17].当 N 较小时,它与 N 近似成正比;随着 N 的增大而逐渐达到饱和,当 N 很大时,它近似于常数$\dfrac{\alpha}{\omega}$.

此外,J. A. P. Heesterbeek 等人考虑接触的某些随机因素而提出形如

$$U(N) = \frac{\alpha N}{1 + bN + \sqrt{1+2bN}}$$

---

① 在不致混淆时,有时也把有效接触率系数简称为有效接触率或接触率,把传染率系数简称为传染率.

的接触率[18]. 它实际上也是一种形式的饱和接触率.

上述具体的接触率有以下共同特性:

$$U(0) = 0, \qquad U'(N) \geqslant 0, \qquad \left(\frac{U(N)}{N}\right)' \leqslant 0. \tag{1.2.1}$$

于是我们还可以更为一般地讨论抽象形式的接触率 $U(N)$, 使其满足条件 (1.2.1), 或再加上饱和条件: $\lim\limits_{N\to\infty} U(N) = U_0$.

Levin 等人还曾直接采用过以下形式的发生率[19,20]:

$$\beta S^p I^q \qquad \text{或} \qquad \frac{\beta S^p I^q}{N}.$$

总之, 在研究某种具体的传染病时, 采用何种形式的接触率和发生率, 应视具体疾病和环境等因素, 根据所获得的数据而定. 种群动力学许多形式的功能性反应函数, 也许能启迪我们针对不同的疾病和环境去构造更多形式的接触率.

1.2.2 基本再生数与有效接触数

在 1.1.2 小节的 K-M SIS 模型的讨论中, 我们求得了区分疾病是否流行的阈值

$$R_0 = \frac{K}{\rho} = \frac{\beta K}{\gamma} = 1.$$

当 $R_0 < 1$ 时疾病逐渐消亡; 当 $R_0 > 1$ 时, 疾病始终保持而形成地方病. 注意到 $\frac{1}{r}$ 是病人的平均患病期, K 是恒定的总人口, 可见 R_0 表示在发病初期, 而有人均为易感者时, 一个病人在平均患病期内所传染的人数, 称为**基本再生数**. $R_0 = 1$ 作为疾病是否消亡的阈值其实际涵义是十分明白的. $R_0 < 1$, 即一个病人在平均患病期能传染的最大人数小于 1, 疾病自然逐步消亡; 反之若 $R > 1$, 疾病将始终存在而形成地方病.

对于 K-M SIR 模型, 我们也求得了区分疾病是否流行的阈值

$$R_0 = \beta S_0 \frac{1}{\gamma} = 1.$$

由于初始病人数较少, 从而 $S_0 \simeq K$, 所以在此意义下, 这里的 R_0 也可看作是基本再生数. 两者在数量上也没有多少差别. $R_0 = 1$ 都是区分疾病流行与否的阈值, 但在涵义上有所不同. 模型 (1.1.1) 中所谓的流行是指患者数量先出现增长, 到达一定峰值后再单调减少而趋向于零. 所以 $R_0 = \beta S_0 \frac{1}{\gamma} = 1$ 是区分患病者数量出现增长还是单调减少的阈值. 这里不会出现地方病. 而对模型 (1.1.9) 而言, 所谓流行是指疾病永不消失而导致地方病.

应当指出, 一般来说, 只有当易感有补充时, 例如有康复者的免疫丧失, 或有

出生率、迁入率等,才可能会出现地方病平衡点.今后我们所讨论的模型一般均将考虑出生、自然死亡等种群动力因素,所以阈值的涵义主要是区分疾病消失与否.

为了加深对基本再生数的理解,我们再讨论一个例子,并借此介绍对平面系统进行定性研究的一种常用方法.

例 1.2.1 观察由 1.1.3 小节中 2(1)所给出的无垂直传染 SIR 模型.即方程组(1.1.11).由于方程组(1.1.11)前两个方程中不含变量 R,所以我们如果仅关心疾病是否流行,则可以仅从前两方程来研究 S 与 I 的性态,若需要了解 R 的性态可再由第三个方程讨论.由前两个方程构成的平面系统为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = -\beta SI + b(K - S) \equiv P(S,I),\\ \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = I(\beta S - \gamma - b) \equiv Q(S,I),\end{cases} \tag{1.2.2}$$

其中 $(S,I) \in D = \{(S,I) \mid 0 \leqslant S \leqslant K,\ 0 \leqslant I \leqslant K,\ S + I \leqslant K\}$.

为求系统(1.2.2)的平衡点,令其右端为 0,从而求得可能存在的两组解.

$$(K,0) \qquad \left(\frac{b+\gamma}{\beta}, \frac{b[\beta K - (b+\gamma)]}{\beta(b+\gamma)}\right).$$

下面分两种情形讨论平衡点的存在性及稳定性.

(1) 当 $\dfrac{\beta K}{b+\gamma} < 1$ 时,(1.2.2) 在域 D 内仅有惟一的平衡点 $M_1(K,0)$,从而由其特征方程系数 p, q 的符号可以判定 M_1 的稳定性[36].

由于

$$q_{(K,0)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial P}{\partial S} & \dfrac{\partial P}{\partial I} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial S} & \dfrac{\partial Q}{\partial I} \end{vmatrix}_{(K,0)} = \begin{vmatrix} -b & -\beta K \\ 0 & \beta K - \gamma - b \end{vmatrix} = b(b + \gamma - \beta K) > 0,$$

$$p_{(K,0)} = -\left(\frac{\partial P}{\partial S} + \frac{\partial Q}{\partial I}\right)_{(K,0)} = b + b + \gamma - \beta K > 0,$$

故点 $M_1(K,0)$ 是局部渐近稳定的.又由于区域 D 内仅有惟一的平衡点 M_1,故不可能有闭轨线,且系统(1.2.2) 从 D 内出发的轨线均不会越出 D.所以点 M_1 在 D 内全局渐近稳定.这意味着,在所给人群中无论初始病人有多少,疾病都不会流行而是逐渐消失.点 M_1 称为**无病平衡点**.

(2) 当 $\dfrac{\beta K}{b+\gamma} > 1$ 时,(1.2.2) 在域 D 内除无病平衡点 M_1 外,还有一正平衡点 $M_2\left(\dfrac{b+\gamma}{\beta}, \dfrac{b[\beta K - (b+\gamma)]}{\beta(b+\gamma)}\right)$.此时,由于 $q_{(K,0)} < 0$,点 M_1 不稳定.

容易验证

$$q_{M_2} > 0, \qquad p_{M_2} > 0,$$

从而点 M_2 是局部稳定的. 由于 D 是系统(1.2.2) 的正向不变集,要证明点 M_2 在 D 内全局渐近稳定,只要证明在 D 内不存在(1.2.2) 的闭轨线即可. 取 Dulac 函数 $B(S,I) = \frac{1}{I}$,可得

$$\frac{\partial(BP)}{\partial S} + \frac{\partial(BQ)}{\partial I} = -\beta - \frac{b}{I} < 0.$$

由平面定性理论可知(1.2.2)无闭轨[35]. 所以,此时点 M_2 在 D 内全局渐近稳定. 这意味着,一旦有患病者,疾病就会流行而最终的易感者和患病者将分别稳定为数量 $\frac{b+\gamma}{\beta}$ 和 $\frac{b[\beta K-(b+\gamma)]}{\beta(b+\gamma)}$ 而形成地方病(endemic). 点 M_2 称为**地方病平衡点**.

令 $R_0 = \frac{\beta K}{b+\gamma}$,则当 $R_0 < 1$ 时,疾病逐渐消失;当 $R_0 > 1$ 时,疾病将流行且最终形成地方病. $R_0 = 1$ 是区分疾病是否消失的阈值.

将模型(1.1.11)中的三个方程相加,得

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = b(K-N), \qquad N = S + I + R.$$

可见 $N = K$ 是环境对人口的最大容纳量. 也是人口总量 $N(t)$ 的稳定平衡态. 由模型(1.1.11) 的第二方程可见,由于自然死亡率 bI 的存在,平均患病期由原来的 $\frac{1}{\gamma}$ 缩短为 $\frac{1}{b+\gamma}$. 于是 $R_0 = \frac{\beta K}{b+\gamma}$ 就是当总人口数达到稳定的平衡态 $N = K$ 且均为易感者时,一个患病者在平均患病期内所传染的人数,也就是基本再生数.

由(1.1.1),(1.1.9) 与(1.1.11) 三个模型所求得的区分疾病消亡与否的阈值正好可以由其基本再生数 $R_0 = 1$ 确定. 当人口总数有一稳定的平衡态(例如总人口恒定,或有常数输入率) 时,对一些结构比较简单的模型(例如无垂直传染、无免疫接种等),疾病消亡与否的阈值往往就是基本再生数 $R_0 = 1$. 这时,通过此阈值可以讨论疾病消亡与否、或有无地方病平衡点、或无病平衡点是否稳定. 而寻求此阈值可以通过数学推导得出;也可以从基本再生数 R_0 的定义直接获得. 但是,应当注意,一般来说疾病消亡与否的阈值不一定就是基本再生数 $R_0 = 1$. 例如,对模型(1.1.11) 引入疫苗接种. 设有效接种率与易感者数成正比,比例系数为 p . 于是模型(1.1.11)将变成

$$\begin{cases}\dfrac{dS}{dt} = bK - \beta SI - bS - pS, \\ \dfrac{dI}{dt} = \beta SI - (\gamma + b)I, \\ \dfrac{dR}{dt} = \gamma I - bR + pS.\end{cases}$$

易见,这时有 $\dfrac{dN}{dt} = b(K - N)$.容易验证,对此模型,地方病平衡点存在与否的阈值为 $\dfrac{K\beta b}{(\gamma + b)(b + p)} = 1$.而由定义可知其基本再生数为 $R_0 = \dfrac{\beta K}{b + \gamma}$. $R_0 = 1$ 并非上述阈值.

所谓**有效接触数**是指一个病人在其患病期内平均有效接触他人的数目[22],记作 σ .所以

$$\sigma = \beta_0 U \cdot \frac{1}{\gamma},$$

其中 $\beta_0 U$ 为有效接触率,$\dfrac{1}{\gamma}$ 为平均染病期.应当注意,有效接触并不一定传染,只有对易感者有效接触时才传染.

应当指出,有效接触数 σ 与基本再生数 R_0 在概念上有所不同. R_0 仅定义在疾病感染初期,此时人群均为易感者;而 σ 定义在任何染病时期,容易看出,在感染初期,人群(除此染病者外) 均为易感者时,它们都表示一个病人在其染病期内平均可能感染的新病人数.而且,对多数疾病来说,有效接触数将在染病期内保持一常数,这时,就数量而言,σ 与 R_0 相等.然而对某些不具免疫力可以多次被其感染的疾病来说,随着时间的增加,再次被感染的新病人将具有较低的传染力,从而单位时间内有效接触率的平均值 β_0 将减小,这将导致 $\sigma < R_0$.

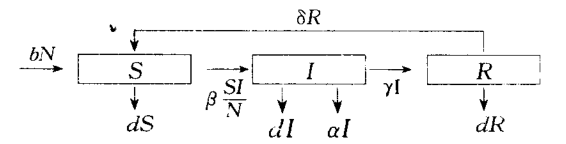
一个病人在其整个染病期内平均实际感染的新病人数有时称为**更新数**(replacement number),记作 R,由于当人群中存在其它患者或具有免疫的康复者时,一病人与他们虽有效接触但并不会传染,因此,$R \leqslant \sigma \leqslant R_0$.有关这方面的详细的论述可参看文献[21].

1.2.3 修正接触数与净增长阈值

为了介绍这两个概念,我们先来讨论一个例子.

例 1.2.2 观察具有指数出生和死亡(包括因病死亡)①,无垂直传染且具有标准发生率的 SIRS 模型.

① 所谓指数出生是指出生率为 bN 形式.这时由于 $\dfrac{dN}{dt} = bN$,人口将是指数规律增加.



其微分方程组为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = bN - dS - \dfrac{\beta SI}{N} + \delta R,\\ \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\beta SI}{N} - (d+\alpha+\gamma)I,\\ \dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = \gamma I - (d+\delta)R,\end{cases} \tag{1.2.3}$$

其中 N 为总人口

$$N(t) = S(t) + I(t) + R(t).$$

将模型(1.2.3)中的三个方程两端分别相加得

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = (b-d)N - \alpha I. \tag{1.2.4}$$

模型(1.2.3)与前面所讨论过的模型(如(1.1.11))不同之处不仅在于采用了标准发生率,而且由于出生呈指数增长,由方程(1.2.4)可见,当 $b > d$ 时,总人口有可能无限增长.从而易感者人数和染病者人数 I 也有可能无限增长.在这种情况下,既没有无病平衡点也没有正平衡点.但是,我们可以通过染病者 I 在总人口 N 中所占比例$\frac{I(t)}{N(t)}$的变化趋势来理解疾病消亡与否.若当 $t\to+\infty$ 时$\frac{I(t)}{N(t)}$趋于一非零常数,则认为疾病将持续存在;若$\frac{I(t)}{N(t)}\to 0$,则认为疾病将最终消亡.另一方面,为了数学上的处理方便,我们作下述归一化变换:

$$x = \frac{S}{N},\qquad y = \frac{I}{N},\qquad z = \frac{R}{N}, \tag{1.2.5}$$

则 $x+y+z\equiv 1$.从而在某些情况下,可将原来关于 S、I、R 的三维系统降为由 x、y、z 中两个变量构成的二维系统.使数学的研究大为简化.对具有标准发生率的模型常可以通过变换(1.2.5)降维.

在变换(1.2.5)下,模型(1.2.3)变成

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = b - bx - \beta xy + \delta z + \alpha xy,\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \beta xy - (b+\alpha+\gamma)y + \alpha y^2,\\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \gamma y - (b+\delta)z + \alpha yz.\end{cases} \tag{1.2.6}$$

由于 $x+y+z=1$,所以(1.2.6)实际上是一平面系统.例如

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \beta(1-y-z)y-(b+\alpha+\gamma)y+\alpha y^2,\\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \gamma y-(b+\delta)z+\alpha yz.\end{cases} \tag{1.2.7}$$

令

$$\theta = \frac{\beta}{b+\alpha+\gamma}. \tag{1.2.8}$$

由方程组(1.2.7),不难验证:当 $\theta \leqslant 1$ 时仅有平衡点 $P_0(0,0)$,且它全局渐近稳定;当 $\theta > 1$ 时,P_0 不稳定,但存在惟一的正平衡点 $P^*(y^*,z^*)$,且它是全局渐近稳定的[22].

由模型(1.2.3) 容易看出,平均患病期为 $\dfrac{1}{d+\alpha+\gamma}$. 由于模型选用了标准发生率,有效接触率为常数 β. 故一个病人平均患病期内有效接触的个体数,即有效接触数为

$$\sigma = \frac{\beta}{d+\alpha+\gamma}, \tag{1.2.9}$$

在疾病发生初期,人群均为易感者,这时有效接触数 σ 也就是基本再生数 $R_0$①. 容易检验,这里基本再生数 R_0(或有效接触数 σ) 并不能对模型(1.2.3) 区分疾病流行与否. 对模型(1.2.6) 或(1.2.7) 来说,用以区分正平衡点是否存在的阈值是(1.2.8) 中的 $\theta = 1$ 而不是(1.2.9) 中的 $\sigma = 1$.

当 $\theta \leqslant 1$ 时 P_0 全局稳定,表明对任意可行域中的值有

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{I(t)}{N(t)} = y(t) \to 0,$$

患病者在总人口中的比例逐渐减少为零. 也称疾病逐渐消亡.

当 $\theta > 1$ 时 P^* 全局稳定,表明对任意可行域中的初值有

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{I(t)}{N(t)} = y(t) \to y^*,$$

患病者将最终以确定的比例在人群中存在. 即导致地方病. 也称疾病持续.

我们将区分归一化后的系统是否存在正平衡点或疾病是否消亡的 θ 称为原模型或归一化后模型的**修正接触数**,有时也称为**修正再生数**. $\theta = 1$ 为区分疾病消亡与否的阈值.

应当注意,归一化后的系统(1.2.6) 存在正平衡点表示患病者数 $I(t)$ 在总人口数 $N(t)$ 中的比例将最终保持一常数. 但这并不意味着总人口不会消亡. 事

---

① 实际上,由于使用了标准发生率,这时有效接触率始终为常数 β,与易感者数 S 无关. 故强调总人口均为易感者时的基本再生数已失去意义.

实上,由方程(1.2.4)的等价方程

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=(b-d-\alpha y)N \tag{1.2.10}$$

可见,当 $b<d$ 时 $N(t)\to 0(t\to+\infty)$,总人口最终消亡.此时若 $\theta\leqslant 1$ 则模型(1.2.6)的平衡点(1,0,0)全局稳定;而若 $\theta>1$,则正平衡点(x^*,y^*,z^*)全局稳定.这一事实表明,尽管患病者数量将随总人口数一道消亡,但当 $\theta\leqslant 1$ 时,相对于总人口,患病者数量将急剧下降而消亡;当 $\theta>1$ 时,患病者在总人口中几乎始终保持一恒定的比例.

当 $b>d$ 时,若 $\theta\leqslant 1$,由于当 $t\to+\infty$ 时,$y\to 0$,从而由(1.2.10)可知 $t\to+\infty$ 时,$N\to+\infty$.这一事实说明,患病者数量可能保持有限,也可能随 N 而无限增长,但其增长速率比 N 的增长速率小得多.若 $\theta>1$ 时可以证明[22]下述事实:

令

$$\varphi=\frac{(b-d)\sigma}{\alpha(\sigma-1)}\left(1+\frac{\gamma}{d+\delta}\right). \tag{1.2.11}$$

当 $\varphi<1$ 时 $N(t)\to 0\ (t\to+\infty)$;当 $\varphi=1$ 时 $N\to N^*$(有限数);当 $\varphi>1$ 时 $N(t)\to+\infty$.我们将区分总人口消亡和无限增长的上述 $\varphi=1$ 称为种群的**净增长阈值**.

1.2.4　平均寿命与平均染病年龄

设 $N(a)$ 为某群体中在年龄 a 时仍然存活着的个体数,时间与年龄同尺度,自然死亡率系数,即单位时间内死亡的个体数在本成员总数中所占比例为 μ.于是在年龄为 a 时单位时间内死亡的个体数应为 $\mu N(a)$.

另一方面,从存活数量来看,由于自然死亡将引起存活数量减少,显然有

$$\frac{\mathrm{d}N(a)}{\mathrm{d}a}=-\mu N(a), \tag{1.2.12}$$

其中负号表示存活数量的减少.设 $N(0)=N_0$.从而可由方程(1.2.12)求得

$$N(a)=N_0\mathrm{e}^{-\mu a}\qquad 或\qquad \mathrm{e}^{-\mu a}=\frac{N(a)}{N_0}.$$

可见 $\mathrm{e}^{-\mu a}$ 表示此群体在年龄 a 时存活着的概率(年龄为 a 的存活者在初始人口中所占比例).

于是此群体在年龄段$(0,a]$死亡的概率应为 $1-\mathrm{e}^{-\mu a}$.把死亡年龄看作一随机变量 x,从而有概率 $P(0<x\leqslant a)=1-\mathrm{e}^{-\mu a}=\int_0^a\mu\mathrm{e}^{-\mu x}\mathrm{d}x$.所以此随机变量 x 的概率密度函数为 $\mu\mathrm{e}^{-\mu x}$.由数学期望的定义可知,随机变量 x 的数学期望为

$$\int_0^{+\infty} x\mu e^{-\mu x}dx = -xe^{-\mu x}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\mu x}dx = \frac{1}{\mu}.$$

由数学期望的涵义可知，$\frac{1}{\mu}$ 就是此群体的平均死亡年龄，即**平均寿命**.

这一事实也可从自然死亡率的定义来直接粗略地理解. n 个个体单位时间内自然死亡了 μn 个，注意到时间与年龄同尺度，故经过$\frac{1}{\mu}$ 时间段后应全部自然死亡，因此，$\frac{1}{\mu}$ 是他们的平均寿命.

综上所述，若 d 表示自然死亡率系数，则 e^{-da} 就是成员活到年龄 a 的概率，而$\frac{1}{d}$ 就是此群体的平均寿命，而且$\frac{1}{d} = \int_0^{+\infty} e^{-da}da$.

在 1.1.2 段中，我们曾经指出，若 γ 为患病者的移出率系数，则$\frac{1}{\gamma}$ 就是平均患病期，这一结论也可类似地通过数学期望来严格地论证.

下面我们以例 1.2.1 为例来阐明平均染病年龄的概念，并介绍对基本再生数 R_0 的另一测定方法.

例 1.2.1 中所讨论的系统(1.2.2)，当 $R_0 > 1$ 时有正平衡点 $M_2(S^*, I^*)$，其中

$$S^* = \frac{b+\gamma}{\beta}, \qquad I^* = \frac{b[\beta K - (b+\gamma)]}{\beta(b+\gamma)}. \tag{1.2.13}$$

容易看出，$\beta I^* S^*$ 是 $R_0 > 1$ 的稳态情况下，单位时间内被传染的人数，从而 βI^* 就是在稳态情况下，单位时间内易感者被传染的概率. 与平均寿命阐述过程类似. 利用数学期望可知，$e^{-\beta I^* a}$ 就是活到年龄为 a 的易感者尚未被传染的概率. 而$\frac{1}{\beta I^*}$ 就是易感者的**平均传染年龄**，也称为**等待时间**(waiting time).

对于给定地区的某些疾病，其平均寿命与平均染病年龄可以通过统计数据获得. 由此，可以测出其基本再生数 R_0 . 例如在例 1.2.1 中，基本再生数为

$$R_0 = \frac{\beta K}{b+\gamma} = \frac{K}{S^*}. \tag{1.2.14}$$

由(1.2.13)不难解得

$$S^* = \frac{K}{1+\frac{1}{b}\beta I^*}.$$

记平均染病年龄为 A，平均寿命为 L ，且由上可知

$$A = \frac{1}{\beta I^*}, \qquad L = \frac{1}{b}.$$

于是,(1.2.14)可改为

$$R_0 = 1 + \frac{L}{A}. \tag{1.2.15}$$

例如[1],在England和Wales的一些城市的社区,1956年至1969年间,麻疹的平均染病年龄为4.8岁,若预期平均寿命为70岁,则$R_0 = 15.6$.

在1.1.2段K-M的SIR模型分析中,我们指出,一种防止疾病流行的策略是对易感者实施的预防疫苗接种,将基本再生数R_0的值降低到小于1,对于例1.2.1所观察的模型(1.1.11)来说,在单位时间内,总数为bK的新生儿中如果有比例为p的婴儿被成功免疫接种,其结果相当于用$(1-p)K$来代替原模型中的K,从而将$R_0 = \frac{\beta K}{b+\gamma}$变成了

$$\bar{R}_0 = \frac{\beta K(1-p)}{b+\gamma} = (1-p)R_0$$

而要使$\bar{R}_0 < 1$,必须

$$p > 1 - \frac{1}{R_0}. \tag{1.2.16}$$

这与(1.1.4)式所示一致.这时能保证疾病不会在种群中流行.此时,我们称种群是**群体免疫**的.应当指出,满足(1.2.16)的接种比例p在大范围内是很难实现的,特别对那些R_0较大的疾病.实际上,在全球范围内真正达到群体免疫的惟一病例是天花.它的再生数$R_0 \approx 5$,所以由(1.2.16)可见需要80%的免疫接种,最后的一个天花病例于1977年出现在索马里,今天天花病毒只被保存在实验室中[1].再如[23],麻疹在美国的流行数据表明,城市地区R_0的范围是8.3到13.0,需要88.0%到92.3%的接种率;在英国R_0的范围是12.5到16.3,需要92.9%到94.0%的接种率.加之麻疹疫苗并非总是有效的,故对麻疹的群体免疫是很难实现的.正因为如此,研究各种接种策略具有重要的现实意义.

还应指出,由(1.2.15)式可见,通过免疫接种等方法来降低R_0的值,意味着增加平均染病年龄A.对某些传染病(例如德国麻疹),成年病人要比儿童病人的病情严重.因此,减少R_0后对那些未曾接种的易感者和接种失败者危险增加.这一点在制订接种策略时应该加以注意.

1.2.5　流行周期

对于许多常见的幼年疾病,例如麻疹、百日咳、水痘、风疹等,其病人数量每年都在变化,而且有规律的波动.这暗示着其模型可能存在周期解.如果用例1.2.1中所观察的模型(1.1.14)来描述这类疾病,那么,由于已经证明了此模型不存在周期解,故与实际情况有较大差异.这里有两种情况:一种是应该对模型

加以改进.例如,考虑潜伏期、因病死亡率、密度制约等因素,更符合实际的发生率,时滞与年龄分布的影响,甚至考虑系数随季节的周期变化等情况,使模型更能真实地反映客观实际;另一种情况是,像(1.1.14)这种简单的模型,虽然没有周期解,但有时却发生环绕地方病平衡点的小阻尼振荡.例如当地方平衡点 M_2 为稳定焦点的情形.事实上,对于模型(1.1.13)简化成的(1.2.2)而言,由(1.2.14)式容易得出

$$\beta I^* + b = bR_0, \qquad \beta S^* = b + \gamma,$$

其中 $R_0 = \frac{\beta K}{b+\gamma}$. 当 $R_0 > 1$ 时,可算出系统(1.2.2)的地方病平衡点 M_2 所对应的特征根为

$$\lambda_{1,2} = \frac{-bR_0 \pm \sqrt{b^2R_0^2 - 4b(R_0-1)(b+\gamma)}}{2}. \qquad (1.2.17)$$

由于这些疾病的平均染病期 $\frac{1}{\gamma}$ 比人类的平均寿命 $\frac{1}{b}$ 要小得多,即 $b \ll \gamma$. 在(1.2.17)式中将含有 b 的高次幂的项略去,可得

$$\lambda_{1,2} \approx -\frac{bR_0}{2} \pm \sqrt{-\gamma b(R_0-1)}.$$

显然,当 $b \ll \gamma$ 时,M_2 是一稳定焦点.于是系统(1.2.2)在点 M_2 外围出现衰减的周期振荡.其振荡周期近似为

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{(R_0-1)\gamma b}} = 2\pi\sqrt{\frac{A}{\gamma}}, \qquad (1.2.18)$$

其中 A 为平均染病年龄.例如在反复流行麻疹的人群中,若其病程为 2 周(1/26 年).平均染病年龄经统计为 4.8 岁,由(1.2.18)式可预测出麻疹大约每隔 2.7 年将流行一次,尽管其振幅将逐渐减少.

§1.3 传染病数学建模的目的与作用及应注意的问题

在对传染病的动力学建模思想和一些基本概念有所了解的基础上,我们再来对 1.1.1 小节中所提及的建模的目的与作用作些更细致的论述,并结合提出一些模型建立和研究中应注意的问题,也许使读者可流行病的建模能有更好的理解和体会.国际著名的流行病动力学家,美国 Iowa 大学教授 H. W. Hethcote 在他 1992 年出版的专著“Modeling HIV Transmission and AIDS in the United States”中[24],对流行病数学建模列举了下述 15 条目的与作用:

1. 模型公式化的过程使假设、变量与参数更为清晰.

2. 精确数学模型的性态可用数学方法和计算机模拟去分析.

3. 建模允许不同假设和公式化效果的探查.

4. 建模提供诸如阈值、再生数等概念.

5. 建模是检验理论和评价定量猜想的实验工具.

6. 具有适当复杂性的模型可用于回答一些具体问题.

7. 建模可被用于通过适应数据来估计关键参数.

8. 模型为各种不同信息的组织、连接和交叉检验提供结构.

9. 模型可用于比较不同类型的疾病,或在不同时间或在不同种群内比较.

10. 模型可用于理论评估,比较或优化各种不同的发现、预防、治疗和控制方案.

11. 模型可用于评价结果对参数值改变的敏感性.

12. 建模可建议需要收集的最重要的数据.

13. 建模可对流行病学观察的设计与分析作出贡献.

14. 模型可用于确认趋势,作一般性预防,或估计预报中的不确定性.

15. 建模结果的确实性和强劲性可通过不同模型中参数值的范围来评估.

建立传染病模型的主要理由是可利用模型对影响疾病传播的生物学和社会机理作清晰描述,通过模型的研究来揭示疾病流行规律,预测流行趋势,为发现、预防和控制疾病的流行提供理论根据和策略.数学模型也是检验理论和定量评估猜想与结论的实验工具.例如,通过模型的研究可以验证:双剂量的预防接种方案对麻疹将导致群体免疫,而单剂量方案则不可能[25];通过爱滋病模型的研究,人们看到若有一半的同性恋者变成独身者或采用安全措施,则 HIV 病毒将在同性恋人群中最终消亡.人们还可以针对需要弄清楚的具体问题建立相关的模型进行研究.例如可以通过模型去研究对于 HIV 病毒的传播而言是否共用针头吸毒比性活动更为重要? 双性恋者与娼妓在 HIV 传播中扮演多么重要的角色? HIV 从高危群体到低危群体的传播有多快? 持续传播是否可能是在异性人群中频繁改变性伙伴所致? 等等.Hyman 与 Stanley 曾通过 HIV 病毒在高低接触率群体中的传播,解释了为什么在许多人群中爱滋病例初始增长是时间的三次函数[26].

由于在人群中进行传染病实验是不道德和不切实际的,这就使利用模型通过理论分析和计算机模拟来进行所需的实验显得格外重要.当然,为保证实验结果的可靠性,首先必须使模型的建立比较合理.这就需要使模型中的每一项都符合相应的机理.然而,任何传染病模型都是现实的简化和在一定程度上的理想化.例如,通常总是假定种群的成员是均匀的混合;假定各仓室成员规则地按确定规律运动而忽略了个体之间的差异和一些偶然的因素,即便这些规律也仅是现实情况的近似和简化.因此,由模型所得的结论与现实必然存在一定的误差.这种误差将随疾病和环境的不同而变动,而且难以检测或度量.简单的模型,结

构简单,参数较少,从而容易进行分析和研究,但却可能与实际差异较大;复杂模型可能更接近实际,但却难以进行理论分析,而且其中某些参数的值也可能难以获得.建模者的艺术在于善于作适当的选择,使得既使研究的的结论有效又使模型简单而便于研究.这种选择还往往与所研究的具体疾病和所希望回答的具体问题紧密相关.数学建模者应与传染病学工作者相互合作,针对某一具体疾病和所希望回答的问题,去确定哪些因素必须包含在模型之中,而哪些可以忽略,以及应该选用怎样结构的模型等.例如,对传染病期较短的麻疹等疾病来说,假定有效接触率系数 β 为一常数是合理的,但对像 AIDS 等疾病来说却不合理,因为从 HIV 感染到 AIDS 发作大约需要高达 10 年的时间.对短时间流行的疾病,出生、死亡等生命动力因素可以忽略;而长时期流行的地方病,生命动力因素必须包含.又如通常 SIR 模型与 SEIR 模型在渐近性态上没有本质的差异,因而选用前者更为简便.再如,对所欲讨论的阈值与渐近性态而言,若发现所研究的常微分方程模型与相应的时滞微分方程模型是基本相同的,那么当然应该选用更为简单的常微分方程模型.

要使模型的研究结论能较为真实地反映客观现实,除了模型结构的选取外,十分重要的问题在于参数的筛选和参数值的获取.遗憾的是相关参数值的收集常是不完全的,甚至准确的数据是无法得到的,在传染病学中又难以进行重复性实验.因此,我们必须对所获得的宝贵数据作恰当的统计学分析和处理.此外,我们还可通过所建立的模型用不同的参数和不同的数据集合作理论上的实验.例如,利用计算机模拟来观察当一个或 n 个参数值改变时会对结果带来什么影响,从而能更全面正确地得出应有的结论.

在模型的诸多参数中去识别关键参数是至关重要的.若某一参数值的微小变动将引起结果的很大改变,则称此结论对此参数是敏感的;若其结果在某参数值变化的较大范围内是相同的,则称为不敏感.传染病建模的一个重要目的是对敏感和不敏感参数的确定,因为这一信息可以提供对传染病过程的洞察力.通过对模型的理论分析和计算机模拟,可以使我们确定那些与所讨论问题有关的敏感参数,从而使我们下决心去为收集这些参数值付出更大的努力.

利用让模型所预测的疾病发生率去符合实际的发生率数据的方法,可以去估计有效接触率等关键参数.Anderson 与 May 对许多直接传染疾病的有效接触率作出过估计[15,27],Hethcote 和 Van Aric 对疾病在多群体中传播时有效接触率的估计提供了一些模型[28].有兴趣的读者可以参阅上述文献.

由于模型和数据与现实的误差,由其所得的结论也只能是现实的一种近似,因而我们对有关的重要预报或结论,往往需要通过不同的模型的比较来加以验证.如果多个学者通过不同的模型得到了共同的预报或结论,则当然提高了其可信度.例如,三篇不同的论文,用不同的方法对两种麻疹的接种策略进行了比较,

得到了其中一种策略更好的共同结论[29]，这种论证应该是可信的. 又如当一个结论对大范围内的参数值成立时，则此结论是强健的.

比较的方法可使我们加深对疾病传播过程的理解，譬如在不同时间或不同人群中比较同一疾病，或在同一种群中比较不同疾病. 对不同疾病估计并比较其关键参数是加深认识这些疾病的一种重要方法. 例如，May[18,24] 以及 Hethcote[30,25]曾对麻疹、百日咳、水痘、白喉、腮腺炎、德国麻疹、小儿麻痹症、天花等疾病的基本再生数进行过估计，并从这些再生数中推断出为了获得上述各类疾病的群体免疫，人群所必须接受免疫接种的比例.

控制和优化的方法也常被用于传染病模型的研究. Wickwire 于 1977 年曾对传染病控制方面的建模文章有过概括[31]. Hethcote 与 Waltman 早在 1973 年就曾用动力学方法去寻求使控制疾病流行花费最少的最优接种策略[32]. Longini 等于 1978 年对香港和亚洲的流感在有限接种资源情况下确定了接种的最佳年龄和社会群体[33]. Hethcote 于 1988 年在三个地理区域对麻疹找到了接种的理想最佳年龄[34].

在建立传染病动力学模型时，通常首先考虑的是确定性模型，即用差分、微分、积分或泛函微分方程等所描述的具有确定参数的模型，因为它们相对地比较容易研究，而且在一定程度上也确能近似地反映现象. 有时，为了能更好地贴近现实，要考虑传染病传播中一些不可避免的随机因素去建立随机模型. 在随机模型中疾病以不同的概率在不同仓室中传播. 对这种随机系统的分析研究要比相应的确定系统困难得多. 通常采用的 Monte Carlo 模拟方法也并不容易，因为若要得到定量的结果需要执行许多次计算机程序(25 到 100 甚至更多). 本书仅讨论确定性模型. 但是，应当指出，确定性与随机性的传染病模型的概念、方法和研究的问题是很不同的. 例如，确定性的传染病模型通常有严格的阈值来区分疾病是否流行；而随机模型所得的结果则是疾病流行的概率和疾病绝灭的平均时间. 确定性模型不反映疾病传播中的偶然性，其参数通常设置为观察值的平均数，方差方面的信息是被忽略的，初值问题的解是惟一确定的，结果的可靠性或置信度是不知道的，当有效接触率、平均染病期等在模型中确定后，这些值的置信区间是无法得到的，比较与预防的置信区间也是无法获得的. 对参数相关性的某些理解可通过参数值变化对结果影响的敏感度分析来获得. 若参数观察值的方差高而且结果对此参数敏感，则结果的置信度低，而正确的置信区间的缺乏意味着结果的可靠性是难以确定的.

参考文献

[1] F Brauer and C Castillo-Chavez. Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology, Tests in Applied Mathematics 40. Springer, 2001

[2] (美)皮特-布鲁克史密斯(译者:马永波).未来的灾难:瘟疫复活与人类生存之战.海口:海南出版社,1999

[3] World Health Organization Report. 1995

[4] World Malaria Situation in 1993, Wkly. Epidemic. Roc. 1996, 71: 17～22

[5] Epidemiological Fact Sheets on HIV/AIDS and Sexually Transmitted Infections

[6] 艾滋病疫情动态,2000年全国艾滋病疫情简介.卫生部艾滋病预防与控制中心

[7] D Bernoulli. Essai d'une nouvelle analyse de la mortalité causée par la petite vérole et des avantages de l'inoculation pour al prévenir, in Mémoires de Mathématiques et de physique. Paris: Académie Royale des Sciences, 1760, 1～45

[8] W H Hamer. Epidemic disease in England, Lancet, 1, 1906, 733～739

[9] R Ross. The Prevention of Malaria, 2nd ed. Murray, London, 1911

[10] W O Kermack, A G McKendrick. Contributions to the mathematical theory of epidemics. Proc. Roy. Soc., 1927, (A115): 700～721

[11] W O Kermack, A G McKendrick. Contributions to the mathematical theory of epidemics. Proc. Roy. Soc., 1932, (A138): 55～83

[12] N T J Bailey. The Mathematical Theory of Infectious Disease, 2nd ed., Hafner, New York, 1975

[13] G F Raggett. Modelling the Eyam plague, IMA Journal. 1982, 18: 221～226

[14] R Anderson, R May. Population Biology of Infectious Diseases. Berlin, Heidelberg. New York: Springer-Verlag, 1982

[15] R Anderson, R May. Infectious Diseases of Humen: Dynamics and Control. Oxford: Oxford University Press. 1991

[16] M C M De Jong, O Diekmann, J A P Heesterbeek. How does transmission depend on population size? in Human Infectious Diseases, Epidemic Models, D Mollison ed., Cambridge UK: Cambridge University Press, 1995, 84～94

[17] K Dietz. Overall population patterns in the transmission cycle of infectious disease agents, In Population Biology of Infectious Disease, Springer, 1982

[18] J A P Heesterbeek, J A J Metz. The saturating contact rate in marriage and epidemic models. J. Math. Biol, 1993, 31: 529～539

[19] Wei-min Liu, S A Levin, Y Lwasa. Influence of nonlinear incidence rates upon the behavior of SIRS epidemiological models. J. Math. Biol., 1986, 23: 187～204

[20] W M Liu, H W Hethcote, S A Levin. Dynamical behavior of epidemiological models with nonlinear incidence rates. J. Math. Biol., 1987, 25: 359～380

[21] H Hethcote. The mathematics of infectious diseases. SIAM Review, 2000, 42: 599～653

[22] S Busenderg, P Van Driessche. Analysis of a disease transimission model in a population with varying size. J. Math. Biol., 1990, 28: 257～270

[23] H Hethcote. An immunization model for a heterogeneous population. Theor. Pop. Biol., 1978, 14: 338～349

[24] H Hethcote. Modeling HIV Transmission and AIDS in the United States. Lecture Notes in Biomath. 95, Berlin: Springer-Verlag, 1992

[25] H Hethcote. Measles and rubella in the United States. Am. J. Epidem., 1983, 117: 2～13

[26] J Hyman, E Stonley. Using Mathematical models to understand the AIDS epidemic. Math. Biosci., 1988, 90: 415～473

[27] R Anderson. Population Dynamics of Infectious Diseases. Theorey and Applications. New York: Chapman and Hall, 1982

[28] H Hethcote, J Van Ark. Epidemiological models for heterogeneous populations: proportionate mixing, parameter estimation, and immunization programs. Math. Biosci., 1987, 84: 85～118

[29] H Hethcote. Rubella. In: Applied Mathematical Ecology. L Gross, T Hallam and S Levin, eds. Springer-Verlag, New York, 1989, 212～234

[30] H Hethcote. Three basic epidemiological models. In: Applied Mathematical Ecology. L Gross, T Hallam and S Levin, eds. New York: Springer-Verlag, 1989, 119～144

[31] K Wickwire. Mathematical models for the control of pests and infectious diseases: a survey. Theor. Pop. Biol, 1977: 8, 182～238

[32] H Hethcote, P Waltman. Optimal vaccination schedules in a deterministic epidemic model. Math. Biosci., 1973, 18: 365～381

[33] J Longini, E Ackerman, L Elveback. An optimization model for influenza an epidemics. Math. Biosci., 1978, 38: 141～157

[34] H Hethcote. Optimal ages of vaccination for measles. Math. Biosci., 1988, 89: 29～52

[35] 马知恩,周义仓.常微分方程的定性与稳定性方法.北京:科学出版社,2001

第 2 章　传染病动力学的发展方向概述

本章将对传染病动力学几个主要发展方向作一初步的介绍.着眼于建模思想、研究的主要问题和常用的最基本的方法,其目的使读者在专题深入学习之前,先对传染病动力学的研究动向有一比较全面的初步认识.其中一些方向系统、深入的论述将在以后几章中分别进行.

§2.1　具有时滞的传染病动力学模型

具有时间滞后(简称时滞)的数学模型所反映的基本事实是:t 时刻的运动变化规律,不仅取决于 t 时刻本身,还受到 t 时刻以前某些状况的影响,甚至是以前某种因素的反映.这种情况在客观世界中是大量存在的.例如,人们在淋浴开始时,常会把水调得时冷时热,这是因为人所感觉到的水温与调节时间有一段滞后所致.又如,人群在 t 时刻生育的数量,取决于 10 个月前怀孕的情况,即取决于 $t-10$(月)时的人群和环境状况.所以,考虑时滞因素往往能更真实地反映自然.

2.1.1　建模思想

患病者数量变化规律的积分形式

让我们先回顾一下 Kermack-Mckendrick(简称 K-M)的 SIS 模型:

$$\begin{cases}\dfrac{dS}{dt}=-\beta SI+\gamma I,\\ \dfrac{dI}{dt}=\beta SI-\gamma I\end{cases}\tag{2.1.1}$$

其中 $\dfrac{1}{\gamma}$ 表示平均恢复期,也就是平均染病期.形如 γI 的恢复率实际上表明病人数量的变化在平均染病期内呈指数分布.为了把这一结论显示得更加清楚,我们把(2.1.1)中第二个方程用积分形式写出.将此方程式右端的 βSI 项看作已知,形式地求这个关于 I 的线性微分方程过 $I(0)=I_0$ 的解,得

$$I(t)=I_0e^{-\gamma t}+\int_0^t\beta S(u)I(u)e^{-\gamma(t-u)}du.\tag{2.1.2}$$

为了解释表达式(2.1.2)的实际涵义,我们先用(1.2.4)的方法来解释 $e^{-\gamma t}$ 的涵义.设 t 时刻的病人数为 $x(t)$,$x(0)=x_0$,病人的恢复率为 γ,且生病期间

无死亡.这时病人数的变化规律为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\gamma x, \\ x(0) = x_0.\end{cases}$$

解之得

$$x(t) = x_0 \mathrm{e}^{-\gamma t} \qquad 或 \qquad \frac{x(t)}{x_0} = \mathrm{e}^{-\gamma t}.$$

可见病人的数量比例$\dfrac{x(t)}{x_0}$在染病期内呈指数分布:$\mathrm{e}^{-\gamma t}$.换句话说,$t = 0$时刻的染病者到 t 时刻仍为病人的概率为 $\mathrm{e}^{-\gamma t}$.因此,表达式(2.1.2)右端的第一项 $I_0\mathrm{e}^{-\gamma t}$ 表示$t = 0$时已有的病人到 t 时刻仍为病人的数量.$\mathrm{e}^{-\gamma(t-u)}$ 应该是 u 时刻新的染病者经过 $t - u$ 时间段后到达时刻t 时仍为病人的概率.在 u 时刻单位时间内所增加的新病人数为 $\beta S(u)I(u)$,从而在微小时间段$[u, u + \mathrm{d}u]$内新增病人的数量为 $\beta S(u)I(u)\mathrm{d}u$,这些病人到达 t 时刻时仍为病人的数量为 $\beta S(u)I(u)\mathrm{e}^{\gamma(t-u)}\mathrm{d}u$.于是(2.1.2)右端的积分式表示从 $t = 0$ 算起到 t 时刻所有新的染病者在 t 时刻仍为病人的数量.所以,在 t 时刻所有病人的数量$I(t)$为上述两项之和,由(2.1.2)式表示.这就是(2.1.2)式的实际涵义.

记

$$P(t) = \mathrm{e}^{-\gamma t},$$

将(2.1.2)中的概率函数写成更一般的形式 $P(t)$,得

$$I(t) = I_0 P(t) + \int_0^t \beta S(u)I(u)P(t-u)\mathrm{d}u, \tag{2.1.3}$$

其中根据实际意义应假定 $P(t)$ 关于 t 单调不增,且满足 $P(0) = 1$. 利用数学期望概念.类似于 1.2.4 段的推导,可知平均染病期为

$$\int_0^{+\infty} P(t)\mathrm{d}t.$$

具有确定时滞的传染病模型的建立

关于上述概率函数 $P(t)$,有两种常见形式:一种就是以前所讨论的指数函数 $P(t) = \mathrm{e}^{-\gamma t}$,即恢复率系数为 γ .它反映病人的数量按指数规律逐渐恢复;另一种重要形式是阶跃函数

$$P(t) = \begin{cases}1, & 0 \leqslant t < \tau, \\ 0, & t \geqslant \tau,\end{cases} \tag{2.1.4}$$

其中 $\tau = \dfrac{1}{\gamma}$ 为平均染病期.形如(2.1.4)的概率函数反映了当染病者所经历的病程到达 τ 时,完全康复而不再有传染力,当病程小于 τ 时始终具有相同的传染力.采用形式(2.1.4),有

$$P(t-u)=\begin{cases}1, & 0\leqslant t-u<\tau,\\0, & t-u\geqslant\tau,\end{cases}$$

即 $P(t-u)=\begin{cases}1, & t-\tau<u\leqslant t,\\0, & 0\leqslant u<t-\tau.\end{cases}$

注意到当 $t\geqslant\tau$ 时 $I_0P(t)=0$,从而当 $t\geqslant\tau$ 时方程(2.1.3)变成

$$I(t)=\int_0^t\beta S(u)I(u)P(t-u)\mathrm{d}u=\int_{t-\tau}^t\beta S(u)I(u)\mathrm{d}u,\quad(2.1.5)$$

两端对 t 求导,得其微分形式

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=\beta S(t)I(t)-\beta S(t-\tau)I(t-\tau).\quad(2.1.6)$$

方程(2.1.6)是一具有时滞 τ 的常微分方程,也称为微分 - 差分方程,它是泛函微分方程的一种重要形式.有关时滞微分方程的基本知识可参阅[1 ~ 4].

方程(2.1.6)所表示的传染病学意义是十分明显的.其中 $\beta S(t)I(t)$ 表示 t 时刻单位时间内染病者的数量;$\beta S(t-\tau)I(t-\tau)$ 表示 $t-\tau$ 时刻单位时间内染病者的数量.由于所有病人都经过时间段 τ 康复,而且没有出生和死亡,所以 t 时刻单位时间内病人数量的改变应该是上述两项之差.因此,方程(2.1.6)也可以根据上述分析而直接写出.这样一来,当不考虑种群动力学因素时,具有固定恢复期 τ(即固定患病期 τ)的 SIS 模型为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=-\beta S(t)I(t)+\beta S(t-\tau)I(t-\tau),\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=\beta S(t)I(t)-\beta S(t-\tau)I(t-\tau).\end{cases}\quad(2.1.7)$$

具有分布时滞的传染病模型的建立

模型(2.1.7)是一个具有确定时滞(fixed delay)或离散时滞(discrete delay)的微分方程组.它假定病人的患病期(恢复期)都是统一的常数 τ.这是一种理想的简化.实际上病人恢复期的长短因人而异.经过一时间段 τ,有的病人可能恢复,有的病人尚未恢复.设经历病程 τ 后尚未恢复仍为病人的概率为 $P(\tau)$.显然有 $P(0)=1$.这样在 $t-\tau$ 时刻单位时间内的新患者,经历病程 τ 到达 t 时刻时仍为病人的数量为 $\beta S(t-\tau)I(t-\tau)P(\tau)$.于是,在时间段 $[t-(\tau+\mathrm{d}\tau),t-\tau]$ 的新病人数 $\beta S(t-\tau)I(t-\tau)\mathrm{d}\tau$ 到 t 时刻仍为病人的数量为 $\beta S(t-\tau)I(t-\tau)P(\tau)\mathrm{d}\tau$.所以在 t 时刻以前所有的患者到 t 时刻仍为病人的数量为

$$I(t)=\int_0^{+\infty}\beta S(t-\tau)I(t-\tau)P(\tau)\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^t\beta S(u)I(u)P(t-u)\mathrm{d}u.$$

设 $P(t)$ 可导,将上式两端对 t 求导得

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=\beta S(t)I(t)+\int_{-\infty}^t\beta S(u)I(u)P'(t-u)\mathrm{d}u$$

或

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=\beta S(t)I(t)-\int_0^{+\infty}\beta S(t-\tau)I(t-\tau)(-P'(\tau))\mathrm{d}\tau,\quad(2.1.8)$$

其中设 $\int_0^{+\infty}P(\tau)\mathrm{d}\tau=\frac{1}{\gamma}$ 表示平均染病期，$\int_0^{+\infty}-P'(\tau)\mathrm{d}\tau=1$.

(2.1.8) 式的传染病学意义也是很清楚的. 事实上，注意到 $P(\tau)$ 是 $t-\tau$ 时刻的新病人经过时间 τ 到 t 时刻仍为病人的概率，类似于 1.2.4 段的分析可知，把恢复时间看作一随机变量 x，概率 $P(t-\tau<x\leqslant t)=1-P(\tau)$. 于是 $-P'(\tau)$ 就是在 τ 时刻病人恢复的概率分布密度. 从而(2.1.8) 式右端的积分式表示 t 时刻以前所有病人在 t 时刻单位内时间恢复的数量，即 t 时刻的恢复率. $\beta S(t)I(t)$ 为 t 时刻的患病率. 所以(2.1.8) 式表示 t 时刻病人的变化率为此时刻患病率与恢复率之差. 若将病人经历时间段 τ 后恢复的概率分布密度 $-P'(\tau)$ 改记为 $f(\tau)$，则(2.1.8) 式可写成

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=\beta S(t)I(t)-\int_0^{+\infty}\beta S(t-\tau)I(t-\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau,$$

其中 $\int_0^{+\infty}f(\tau)\mathrm{d}\tau=1$. 因此，恢复期按概率密度 $f(\tau)$ 连续分布的 $K-M$ SIS 模型为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=-\beta S(t)I(t)+\displaystyle\int_0^{+\infty}\beta S(t-\tau)I(t-\tau)f(\tau)\mathrm{d}t,\\ \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=\beta S(t)I(t)-\displaystyle\int_0^{+\infty}\beta S(t-\tau)I(t-\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau.\end{cases}\quad(2.1.9)$$

这是一个具有分布时滞(distributed delay)或连续时滞(continuous delay)的微分方程组.

积分方程的传染病模型的建立

我们也可以直接来建立积分方程形式的模型. 系统(2.1.2)或一般的形式(2.1.3)给出了在无种群动力因素时，患病者数量变化规律的积分形式. 现在考虑有种群动力因素情形. 设人口的输入率为 A，自然死亡率与因病死亡率系数分别为 d 与 α，再设患病者经历时间段 u 后仍为患病者的概率为 $P(u)$，$P(0)=1$，$\int_0^{+\infty}P(u)\mathrm{d}u=\tau$(平均染病期). 类似于(2.1.3) 式可知，$t$ 时刻的患病者数应为 $t=0$ 时已有的病人到 t 时刻仍活着的病人数与从 $t=0$ 到 t 时刻的新患者在 t 时刻仍活着的病人数之和.

设 I_0 表示 $t=0$ 时已有的患病者，这些病人在 t 时刻仍为患病者的数量应为 $I_0P(t)$，由于自然和因病死亡，到 t 时刻尚存活的数量为 $I_0P(t)\mathrm{e}^{-(d+\alpha)t}$.

再从 0 到 t 的时间段上考虑微小时间段$[u,u+\mathrm{d}u]$，在此时间段 $\mathrm{d}u$ 内新感

染者数量为 $\beta S(u)I(u)\mathrm{d}u$，到时刻 t 仍为病人者的数量为 $\beta S(u)I(u)P(t-u)\mathrm{d}u$. 其中尚存活者数量为 $\beta S(u)I(u)P(t-u)\mathrm{e}^{-(d+\alpha)(t-u)}\mathrm{d}u$. 于是从 0 到 t 时间段新患病者到 t 时刻仍活着的病人数量为 $\int_0^t \beta S(u)I(u)P(t-u)\mathrm{e}^{-(d+\alpha)(t-u)}\mathrm{d}u$. 所以，在 t 时刻存活的患者总数为

$$I(t)=I_0P(t)\mathrm{e}^{-(\alpha+d)t}+\int_0^t \beta S(u)I(u)P(t-u)\mathrm{e}^{-(\alpha+d)(t-u)}\mathrm{d}u.$$

由于有因病死亡，容易得出总人口数 $N(t)=I(t)+S(t)$ 的变化规律为

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=A-dN(t)-\alpha I(t).$$

将其作为 N 的一阶线性微分方程形式地求解得

$$N(t)=N_0\mathrm{e}^{-dt}+\int_0^t [A-\alpha I(u)]\mathrm{e}^{-d(t-u)}\mathrm{d}u.$$

于是具有种群动力因素的上述 SIS 模型可用下述积分方程组给出

$$\begin{cases}I(t)=I_0P(t)\mathrm{e}^{-(\alpha+d)t}+\int_0^t \beta[N(u)-I(u)]I(u)P(t-u)\mathrm{e}^{-(d+\alpha)(t-u)}\mathrm{d}u,\\ N(t)=N_0\mathrm{e}^{-dt}+\int_0^t [A-\alpha I(u)]\mathrm{e}^{-d(t-u)}\mathrm{d}u.\end{cases}$$

2.1.2 模型举例

具有出生与死亡以及常数恢复期的 SIS 模型

设种群的出生率为常数 A，单位时间内自然死亡率系数为 μ，从而自然死亡率为 μN. 为方便起见，记 $\frac{A}{\mu}=K$，即 $A=\mu K$. 于是种群的变化适合下列方程

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=\mu K-\mu N=\mu(K-N).$$

可见 $K=\frac{A}{\mu}$ 是环境对此种群的容纳量，即当 $N=K$ 时种群将停止增长，$N>K$ 时将出现负增长.

先考虑无垂直传染和因病死亡情形下的 SIS 模型. 我们当然可以建立 $S(t)$ 与 $I(t)$ 所满足的方程组，但由于这时种群总成员数 N 将随时间变化，而且由 $S(t)+I(t)=N(t)$，所以可以任意选择两个变量，有时我们选取 I 与 N 更为方便. 设恢复期为 τ，注意到在 $t-\tau$ 时刻的染病者到 t 时应恢复，但由于自然死亡率 μ 的存在，这些染病者到 t 时刻仍活着的概率为 $\mathrm{e}^{-\mu\tau}$，从而染病者在 t 时刻仍活着而成为康复者的数量为 $\beta I(t-\tau)S(t-\tau)\mathrm{e}^{-\mu\tau}$. 于是 SIS 模型应为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=\beta I(t)[N(t)-I(t)]-\beta I(t-\tau)[N(t-\tau)\\ \qquad\qquad -I(t-\tau)]\mathrm{e}^{-\mu\tau}-\mu I(t),\\ \dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=\mu[K-N(t)].\end{cases}\tag{2.1.10}$$

再考虑有因病死亡的情形.设因病死亡率系数为 α,由于自然和因病死亡,在病程结束时仍活着而成为康复者的数量为 $\beta I(t-\tau)[N(t-\tau)-I(t-\tau)]\mathrm{e}^{-(\mu+\alpha)\tau}$. 于是(2.1.10)式将变成

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=\beta I(t)[N(t)-I(t)]-\beta I(t-\tau)[N(t-\tau)\\ \qquad\qquad -I(t-\tau)]\mathrm{e}^{-(\mu+\alpha)\tau}-(\mu+\alpha)I(t),\\ \dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=\mu[K-N(t)]-\alpha I(t);\end{cases}\tag{2.1.11}$$

或者用变量 S 与 I 表出为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=\mu K-\mu S(t)-\beta S(t)I(t)+\beta S(t-\tau)I(t-\tau)\mathrm{e}^{-(\mu+\alpha)\tau},\\ \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=\beta S(t)I(t)-\beta S(t-\tau)I(t-\tau)\mathrm{e}^{-(\mu+\alpha)\tau}-(\mu+\alpha)I(t).\end{cases}\tag{2.1.12}$$

如果出生率不是常数,而是与人口数成正比为 $bN(t)$,无垂直传染,而且选用标准发生率,则模型(2.1.12)应相应地修改为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=bN(t)-\mu S(t)-\dfrac{\beta S(t)I(t)}{N(t)}+\beta\dfrac{S(t-\tau)I(t-\tau)}{N(t-\tau)}\mathrm{e}^{-(\mu+\alpha)\tau},\\ \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\beta S(t)I(t)}{N(t)}-\dfrac{\beta S(t-\tau)I(t-\tau)}{N(t-\tau)}\mathrm{e}^{-(\mu+\alpha)\tau}-(\mu+\alpha)I(t),\end{cases}\tag{2.1.13}$$

其中 $N(t)$ 满足方程

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=(b-\mu)N(t)-\alpha I(t).\tag{2.1.14}$$

如果有垂直传染,则(3.1.13) 中的 $bN(t)$ 应分解为 $bS(t)$ 与 $bI(t)$ 两部分,分别加在第一与第二两个方程中.

具有常数潜伏期 ω 和常数恢复期 τ 的 SEIR 模型

若考察无种群动力因素情形,仿照(2.1.7) 式,采用双线性发生率,可将模型直接写出

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=-\beta S(t)I(t),\\ \dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=\beta S(t)I(t)-\beta S(t-\omega)I(t-\omega),\\ \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=\beta S(t-\omega)I(t-\omega)-\beta S(t-\omega-\tau)I(t-\omega-\tau),\\ \dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}=\beta S(t-\omega-\tau)I(t-\omega-\tau),\end{cases}\tag{2.1.15}$$

这里 $t-\omega$ 时刻的感染者经过潜伏期 ω，在 t 时刻成为具有传染力的患病者；而在 $t-\omega-\tau$ 时刻的感染者，在 $t-\tau$ 时刻患病，在 t 时刻成为康复者.

若考虑种群动力因素，设出生率为 A，自然死亡率系数为 μ，因病死亡率系数为 α，仍不考虑垂直传染. 记 $A=\mu K$，则相应的 SEIR 模型为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=\mu(K-S(t))-\beta S(t)I(t),\\ \dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=\beta S(t)I(t)-\beta S(t-\omega)I(t-\omega)\mathrm{e}^{-\mu\omega}-\mu E(t),\\ \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=\beta S(t-\omega)I(t-\omega)\mathrm{e}^{-\mu\omega}-\beta S(t-\omega-\tau)I(t-\omega-\tau)\\ \qquad\cdot\mathrm{e}^{-(\omega+\tau)\mu}\mathrm{e}^{-\alpha\tau}-(\mu+\alpha)I(t),\\ \dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}=\beta S(t-\omega-\tau)I(t-\omega-\tau)\mathrm{e}^{-\mu(\omega+\tau)}\mathrm{e}^{-\alpha\tau}-\mu R(t),\\ \dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=\mu[K-N(t)]-\alpha I(t),\end{cases}\tag{2.1.16}$$

其中 $N(t)=S(t)+E(t)+I(t)+R(t).$ (2.1.17)

具有常数免疫期的模型

若出生率为 A(记作 μK)，自然死亡率系数为 μ，因病死亡率系数为 α，恢复率系数为 δ，免疫丧失率系数为 τ，选用双线性发生率，则相应的 SIRS 模型为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=\mu(K-S(t))-\beta S(t)I(t)+\tau R(t),\\ \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=\beta S(t)I(t)-(\mu+\delta+\alpha)I(t),\\ \dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}=\delta I(t)-\mu R(t)-\tau R(t).\end{cases}\tag{2.1.18}$$

这时，免疫丧失率 τR，意味着康复者丧失免疫力而回到易感者 S 类的比例是按指数 $\mathrm{e}^{-\tau t}$ 分布的. 平均免疫期为 $\dfrac{1}{\tau}$.

若假设免疫期为一常数 $\dfrac{1}{\tau}$，则相应的模型为

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=\mu[K-S(t)]-\beta S(t)I(t)+\delta I(t-\frac{1}{\tau})\mathrm{e}^{-\frac{\mu}{\tau}},\\ \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=\beta S(t)I(t)-(\mu+\delta+\alpha)I(t),\\ \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}=\delta I(t)-\mu R(t)-\delta I(t-\frac{1}{\tau})\mathrm{e}^{-\frac{\mu}{\tau}}.\end{cases} \tag{2.1.19}$$

若假定恢复期也是一常数 $\frac{1}{\delta}$,则相应的模型为

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=\mu[K-S(t)]-\beta S(t)I(t)+\beta S(t-\frac{1}{\delta}-\frac{1}{\tau})I(t-\frac{1}{\delta}-\frac{1}{\tau})\\ \qquad\cdot\mathrm{e}^{-\mu(\frac{1}{\delta}+\frac{1}{\tau})}\mathrm{e}^{-\alpha\frac{1}{\delta}},\\ \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=\beta S(t)I(t)-\beta S(t-\frac{1}{\delta})I(t-\frac{1}{\delta})\mathrm{e}^{-(\mu+\alpha)\frac{1}{\delta}}-(\mu+\alpha)I(t),\\ \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}=\beta S(t-\frac{1}{\delta})I(t-\frac{1}{\delta})\mathrm{e}^{-(\mu+\alpha)\frac{1}{\delta}}-\beta S(t-\frac{1}{\delta}-\frac{1}{\tau})I(t-\frac{1}{\delta}-\frac{1}{\tau})\\ \qquad\cdot\mathrm{e}^{-\mu(\frac{1}{\delta}+\frac{1}{\tau})}\mathrm{e}^{-\alpha\frac{1}{\delta}}-\mu R(t).\end{cases}$$

$$(2.1.20)$$

当然,我们还可以考虑种群密度制约因素,垂直传染,潜伏期等因素.这将使模型变得更为复杂.

2.1.3 模型研究的基本方法

对于具有时滞的传染病模型来说,人们关心的主要问题仍然是区分疾病是否流行的阈值的表达式,平衡位置的稳定性,周期解的存在性与稳定性,系统的持续性,以及有关控制与预防策略等.特别是时滞的变化对上述各种性态的影响.下面,我们仅就离散时滞模型平衡点的稳定性问题,通过例子说明一些基本的常用方法,进一步的研究将在第 4 章中论述.

局部稳定性的研究举例

我们以 SIS 模型(2.1.7)为例来说明研究平衡点局部稳定性的特征方程法.由于 $S(t)+I(t)=K$(常数).从而可将方程组(2.1.7)化成下列方程式

$$\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t}=\beta I(t)[K-I(t)]-\beta I(t-\tau)[K-I(t-\tau)]. \tag{2.1.21}$$

判定了方程式(2.1.21)的平衡点 I^* 的稳定性后,由 $S^*+I^*=K$,也就得到了方程组(2.1.7)平衡点(S^*,I^*)的稳定性.下面我们分四步来研究(2.1.21)平衡点的局部稳定性

(1) 求平衡点.

寻求所谓(2.1.21)的平衡点就是求方程的常数解,显然应该令

$$I(t) \equiv I(t-\tau) \equiv I^*,$$

代入(2.1.21)去求解 I^*. 然而若将 I^* 代入(2.1.21),则得到

$$0 = 0.$$

即任何常数 I^* 都适合方程(2.1.21). 这是因为把(2.1.5)化为(2.1.6)时,通过求导运算扩大了解的范围.(2.1.6)的解不一定能满足(2.1.5). 在这种情况下,我们必须回到(2.1.5)式来求平衡点,即求方程

$$I(t) = \int_{t-\tau}^{t} \beta I(t)[K - I(t)]\mathrm{d}u \tag{2.1.22}$$

的不动点. 令 $I = I^*$ 代入(2.1.22)得

$$I^* = \beta I^*(K - I^*)\tau,$$

从而解得

$$I^* = 0 \quad 与 \quad I^* = K - \frac{1}{\beta\tau}.$$

(2) 求关于平衡点 I^* 的线性近似方程.

作变量替换

$$I(t) - I^* = u(t),$$

代入方程(2.1.22),并取其线性近似部分,注意到 I^* 满足(2.1.22)得

$$u(t) = \int_{t-\tau}^{t} \beta(K - 2I^*)u(x)\mathrm{d}x; \tag{2.1.23}$$

或代入方程(2.1.21),取其线性部分得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \beta(K - 2I^*)u(t) - \beta(K - 2I^*)u(t-\tau). \tag{2.1.24}$$

方程(2.1.24)也可从(2.1.23)求导数得到.

(3) 求特征方程.

令 $u(t) = c\mathrm{e}^{\lambda t}$,代入(2.1.23)或(2.1.24)化简后得

$$\lambda - A + A\mathrm{e}^{-\lambda\tau} = 0, \tag{2.1.25}$$

其中 $A = \beta(K - 2I^*)$.

(4) 判定特征根实部的符号.

与常微分方程类似,当所有特征根均具有负实部时,平衡点局部渐近稳定;若至少有一特征根具有正实部时,不稳定. 特征方程(2.1.25)虽然形式十分简单,但它却是一个超越方程. 一般说来将有无穷多个根,对它们的判定并非易事. 下面我们介绍两种方法:

第一种方法是分离特征方程的实部与虚部利用反证法来论断特征根实部的符号.

定理 2.1.1 考察方程(2.1.21). 令 $R_0 = \beta K\tau$.

1) 当 $R_0 \leqslant 1$ 时,(2.1.21)仅有平衡点 $I^* = 0$,且它是局部渐近稳定的;

2) 当 $R_0 > 1$ 时,(2.1.21) 除 $I^* = 0$ 外还存在正平衡点 $I^* = K - \frac{1}{\beta\tau}$. 这时 $I^* = 0$ 不稳定, $I^* = K - \frac{1}{\beta\tau}$ 是局部渐近稳定的.

证明　平衡点的存在性已由第 1) 步得知,现证明其稳定性. 由第 3) 步已知 (2.1.21) 关于平衡点 I^* 的特征方程为(2.1.25) 式.

设特征根为 $\lambda = x + iy(y \geqslant 0)$,代入特征方程(2.1.25),分离其实虚部得

$$\begin{cases} x - A + Ae^{-x\tau}\cos y\tau = 0, \\ y - Ae^{-x\tau}\sin y\tau = 0. \end{cases} \tag{2.1.26}$$

先考察无病平衡点 $I^* = 0$,此时, $A = \beta K$.

当 $y > 0$ 时,由(2.1.26) 的第二个方程可得

$$y\tau = \beta K\tau e^{-x\tau}\sin y\tau. \tag{2.1.27}$$

由(2.1.27) 容易看出,当 $\beta K\tau \leqslant 1$ 时,所有特征根均有负实部. 事实上,如果 $x \geqslant 0$,则由于 $e^{-x\tau}\sin y\tau < y\tau$,(2.1.27) 式不可能成立.

当 $y = 0$ 时,由(2.1.26) 的第一个方程可得

$$\begin{aligned} \tau x &= \beta K\tau(1 - e^{-x\tau}) \\ &= \beta K\tau\left(x\tau - \frac{(x\tau)^2}{2!} + \cdots\right) < \beta K\tau x\tau. \end{aligned} \tag{2.1.28}$$

若存在 $x > 0$,则(2.1.28) 式表明

$$1 < \beta K\tau \leqslant 1,$$

矛盾;若 $x = 0$,则特征根 $\lambda = 0$,从而方程(2.1.22) 所对应的解为不动点 I^* 本身.

综上所述,当 $R_0 = \beta K\tau \leqslant 1$ 时, $I^* = 0$ 是局部渐近稳定的,易见此时正平衡点 $I^* = K - \frac{1}{\beta\tau}$ 不存在.

当 $R_0 > 1$ 时,容易证明特征方程(2.1.25) 至少存在一个正实根. 事实上,令

$$F(\lambda) = \lambda - \beta K + \beta Ke^{-\lambda\tau}.$$

有 $F(0) = 0, F'(0) = 1 - \beta K\tau < 0$,于是有 $F(\lambda) < 0$,当 $0 < \lambda \ll 1$ 时;而 $F(+\infty) > 0$,故由连续函数的介值定理知 $F(\lambda) = 0$ 至少存在一正根,故 $I^* = 0$ 不稳定.

下面讨论当 $R_0 > 1$ 时正平衡点 $I^* = K - \frac{1}{\beta\tau}$ 的稳定性. 此时,(2.1.26) 的第二方程为

$$y\tau = (2 - \beta\tau K)e^{-x\tau}\sin y\tau.$$

当 $y > 0$ 时,若 $x \geqslant 0$,由于 $2 - \beta\tau K < 1$,上式显然不能成立.

当 $y = 0$ 时,(2.1.26) 式的第一个方程变为

$$x\tau = (2 - \beta\tau K)(1 - e^{-x\tau}) < (2 - \beta\tau K)x\tau.$$

若 $x > 0$,上式不能成立;若 $x = 0$,则 $\lambda = 0$,相应解为平衡点.所以当 $\beta K\tau > 1$ 时正平衡点 $I^* = K - \frac{1}{\beta\tau}$ 是局部渐近稳定的. ▌

第 2 种方法是利用下述不等式,但只能证明渐近稳定部分.

引理 2.1.1[5] 设 μ 与 τ 为实常数,λ 为复数.当 $\mu > 0, \tau > 0, \mathrm{Re}\lambda \geqslant 0$ 时不等式

$$\left|\frac{1 - e^{-(\lambda+\mu)\tau}}{\lambda + \mu}\right| < \frac{1 - e^{-\mu\tau}}{\mu} \tag{2.1.29}$$

与

$$\left|\frac{1 - e^{-\lambda\tau}}{\lambda}\right| \leqslant \tau \tag{2.1.30}$$

成立.

证明 当 $\mu > 0, \mathrm{Re}\lambda \geqslant 0$ 时有

$$\begin{aligned}\left|\int_0^\tau e^{-(\lambda+\mu)x}\mathrm{d}x\right| &\leqslant \int_0^\tau |e^{-(\lambda+\mu)x}|\,\mathrm{d}x = \int_0^\tau |e^{-\lambda x}|\, e^{-\mu x}\mathrm{d}x\\ &\leqslant \int_0^\tau e^{-\mu x}\mathrm{d}x = \frac{1 - e^{-\mu\tau}}{\mu},\end{aligned}$$

而积分

$$\int_0^\tau e^{-(\lambda+\mu)x}\mathrm{d}x = \frac{1 - e^{-(\lambda+\mu)\tau}}{\lambda + \mu},$$

从而(2.1.29)式成立.令 $\mu \to 0$,对(2.1.29)式两端取极限,则得(2.1.30)式. ▌

现在利用引理 2.1.1 来讨论平衡点的局部稳定性.

对于 $I^* = 0$,相应的特征方程(2.1.25)为①

$$\frac{\beta K(1 - e^{-\lambda\tau})}{\lambda} = 1.$$

若 $\mathrm{Re}\lambda \geqslant 0$,由不等式(2.1.30)得

$$1 \leqslant \beta K\tau.$$

从而当 $\beta K\tau < 1$ 时所有特征根均具有负实部,故 $I^* = 0$ 局部渐近稳定.对于 $I^* = K - \frac{1}{\beta\tau}$,相应特征方程为

$$\beta\left(\frac{2}{\beta\tau} - K\right)\frac{1 - e^{-\lambda\tau}}{\lambda} = 1.$$

若 $\mathrm{Re}\lambda \geqslant 0$,当 $\beta K\tau \geqslant 2$ 时,上式显然不能成立;当 $1 < \beta K\tau \leqslant 2$ 时,由(2.1.30)

---

① 设 $\lambda \neq 0$,$\lambda = 0$ 时,讨论同第一种方法.

式可知上式不能成立. 故此时正平衡点局部渐近稳定.

由以上讨论可见,当 $R_0 = \beta K\tau \leqslant 1$ 时,模型(2.1.7) 仅有无病平衡点$(K, 0)$,它是局部渐近稳定的;当 $R_0 > 1$ 时,(2.1.7) 除$(K,0)$外还有一地方病平衡点$\left(\frac{1}{\beta\tau}, K - \frac{1}{\beta\tau}\right)$. 此时,无病平衡点不稳定,而地方病平衡点局部渐近稳定.

由基本再生数的定义易见

$$R_0 = \beta K\tau \tag{2.1.31}$$

就是基本再生数,$R_0 = 1$ 是区分疾病能否消亡的阈值.

注意到这里的固定患病期相当于(1.1.2) 段 K-M SIS 模型中的平均患病期 $\frac{1}{\gamma}$,可见具有确定时滞的模型(2.1.7) 与无时滞的相应模型(1.1.8) 的结论是一样的. 这一事实说明对这种最简单的K-M的SIS模型来说,病人按指数分布康复与按阶跃函数康复,无论地方病平衡点的大小,稳定性与基本再生数都是一样的. 应当指出,这是因为模型结构简单而且没有考虑任何种群动力因素的缘故. 一般说来,指数分布与阶跃分布将会产生差异,甚至于定性性态上的差异.

在模型(2.1.7) 中时滞 τ 表示患病期,也就是恢复期. 由(2.1.31) 可见基本再生数 $R_0 = 1$ 等价于患病期 $\tau = \frac{1}{\beta K}$. 从而当 $\tau < \frac{1}{\beta K}$ 时疾病将最终消失;而当 $\tau > \frac{1}{\beta K}$ 时将会导致地方病. 可见患病期过长将会改变无病平衡点的稳定性而产生地方病.

由于我们所证明的稳定性只是局部的. 当 $\tau > \frac{1}{\beta K}$ 时,无病平衡点$(K,0)$不稳定,在它附近的轨线均远离点$(K,0)$,这表示疾病不会消亡. 但由于仅知地方病平衡点(S^*, I^*)局部稳定,在它附近的轨线趋向于它. 换句话说,当病人数距 I^* 较大时是否仍会趋向于(S^*, I^*)从而最终形成地方病尚不得而知. 要严格地证明这一点需要讨论全局稳定性.

全局稳定性的研究举例

在常微分方程中我们讨论平衡点的全局稳定性时常用的方法是构造一个无限大正定的 Liapunov 函数,使它沿系统轨线的全导数在所讨论区域内是负定的(或是常负的,但使导数为零的集合内不含非平凡的正半轨线),则相应平衡点在所讨论区域内是全局渐近稳定的. 对于时滞系统也有类似的结论,只不过所构造的一般是一个 Liapunov 泛函.

下面我们以一个具有免疫丧失的传染病模型为例来说明这种方法.

例[6] 考虑一具有疫苗接种的 SIR 模型. 设疾病传播的仓室框图如下:

pS

$\xrightarrow{A}$ S $\xrightarrow{\beta SI}$ I $\xrightarrow{\gamma I}$ R

dS dS αS dR

其中总人口的输入率(包括出生)为常数 A,且均为易感者.采用双线性发生率,d 为自然死亡率系数,α 为因病死亡率系数,γ 为恢复率系数.p 为对易感者的有效接种率系数,即单位时间内有 pS 易感者被有效接种疫苗,他们将直接由易感类 S 进入移出类 R.又假定疫苗接种的有效期为常数 τ,从而 $t-\tau$ 时刻的接种者在 t 时刻还活着的将会失去免疫能力而再次成为易感者.我们还假定疾病的恢复者具有终身免疫能力.于是,相应的模型如下

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=A-dS(t)-pS(t)-\beta S(t)I(t)+pS(t-\tau)\mathrm{e}^{-d\tau},\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=\beta S(t)I(t)-(d+\alpha+\gamma)I(t),\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}=\gamma I(t)+pS(t)-dR(t)-pS(t-\tau)\mathrm{e}^{-d\tau}.\end{cases}\tag{2.1.32}$$

由于 $N(t)=S(t)+I(t)+R(t)$,故

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=A-dN(t)-\alpha I(t).$$

注意到(2.1.32)的前两个方程中不含 R,故只需讨论方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=A-(d+p)S(t)-\beta S(t)I(t)+pS(t-\tau)\mathrm{e}^{-d\tau},\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=\beta S(t)I(t)-(d+\alpha+\gamma)I(t).\end{cases}\tag{2.1.33}$$

定理 2.1.2 考察系统(2.1.33),$(S,I)\in D=\{(S,I)\mid S>0,I>0,S+I\leqslant\dfrac{A}{d}\}$.令 $\bar{R}_0=\dfrac{\beta A}{(d+\alpha+\gamma)[d+p(1-\mathrm{e}^{-d\tau})]}=\dfrac{\beta S_0}{(d+\alpha+\gamma)}$.

(1) 当 $\bar{R}_0\leqslant 1$ 时,(2.1.33)仅有无病平衡点 $P_0(S_0,0)$,在域 D 内全局渐近稳定;

(2) 当 $\bar{R}_0>1$ 时,(2.1.33)除 P_0 外尚存在惟一地方病平衡点 $P^*(S^*,I^*)$.这时,P_0 不稳定;P^* 在 D 内全局渐近稳定.其中

$$S_0=\frac{A}{d+p(1-\mathrm{e}^{-d\tau})},\quad S^*=\frac{d+\alpha+\gamma}{\beta},\quad I^*=\frac{A}{d+\alpha+\gamma}\left(1-\frac{1}{\bar{R}_0}\right).$$

证明 平衡点的存在性由系统(2.1.33)容易得出.下面仅证明其稳定性.

(1) 首先将平衡点 P_0 变换成原点,为此令 $x=S-S_0$,于是(2.1.33)化为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-(d+p)x(t)-\beta x(t)I(t)-\beta S_0 I(t)+p\mathrm{e}^{-d\tau}x(t-\tau),\\ \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=I(t)[\beta S_0-(d+\alpha+\gamma)]+\beta x(t)I(t).\end{cases}\tag{2.1.34}$$

$$(x,I)\in\bar{D}=\left[(x,I)\mid x>-S,I>0,x+I\leqslant\frac{A}{d}-S_0\right].$$

取 Liapunov 函数 $V_{11}=\dfrac{x^2}{\alpha}+S_0I$.

沿系统(2.1.34)的轨线求 V_{11} 对 t 的全导数,可得

$$\left.\frac{\mathrm{d}V_{11}}{\mathrm{d}t}\right|_{(2.1.34)}=-(d+p)x^2-\beta x^2I+p\mathrm{e}^{-d\tau}x(t)x(t-\tau)$$
$$-S_0[(d+\alpha+\gamma)-\beta S_0]I(t).$$

我们希望$\dfrac{\mathrm{d}V_{11}}{\mathrm{d}t}$负定.困难在于处理 $p\mathrm{e}^{-d\tau}x(t)x(t-\tau)$ 项.先将其适当放大.由于

$$x(t)x(t-\tau)\leqslant\frac{x^2(t)+x^2(t-\tau)}{2},$$

从而

$$\frac{\mathrm{d}V_{11}}{\mathrm{d}t}\leqslant-(d+p)x^2-\beta x^2I+\frac{p\mathrm{e}^{-d\tau}}{2}[x^2(t)+x^2(t-\tau)]$$
$$-S_0[(d+\alpha+\gamma)-\beta S_0]I(t).$$

不等式右端的项$\dfrac{p\mathrm{e}^{-d\tau}}{2}x^2(t)$可以并入右端的第一项而保持负号,故尚需消去项$\dfrac{p\mathrm{e}^{-d\tau}}{2}x^2(t-\tau)$.为此再构造 Liapunov 泛函

$$V_{12}=\frac{p\mathrm{e}^{-d\tau}}{2}\int_{t-\tau}^{t}x^2(u)\mathrm{d}u,$$

而

$$\left.\frac{\mathrm{d}V_{12}}{\mathrm{d}t}\right|_{(2.1.34)}=\frac{p\mathrm{e}^{-d\tau}}{2}[x^2(t)-x^2(t-\tau)].$$

这样,取 $V_1=V_{11}+V_{12}$,就有

$$\left.\frac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}t}\right|_{(2.1.34)}\leqslant-[d+p(1-\mathrm{e}^{-d\tau})]x^2-\beta x^2I-S_0[(d+\alpha+\gamma)-\beta S_0]I(t).$$

当 $R_0<1$ 时,显然$\dfrac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}t}$在$\bar{D}$内除 $x=I=0$ 外负定,故 P_0 在 D 内全局渐近稳定;

当 $R_0 = 1$ 时，$\frac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}t}$ 常负而且当且仅当 $x = 0$ 时为零. 由(2.1.34)第一方程易见，$x = 0$ 若为其解必有 $I = 0$，故 $\frac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}t} = 0$ 的集合内不含(2.1.34)的非平凡轨线. 所以 P_0 在 D 内仍全局渐近稳定.

(2) 当 $R_0 > 1$ 时，P_0 的不稳定性容易从系统(2.1.33)的线性近似系统的特征根讨论获得. 下面证明 P^* 在 D 内的全局稳定性.

令 $x = S - S^*$，系统(2.1.33)变为

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -(d+p)x(t) - \beta xI - (d+\alpha+\gamma)(I - I^*) + p\mathrm{e}^{-d\tau}x(t-\tau),\\ \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \beta xI,\end{cases} \tag{2.1.35}$$

其中 $I^* = \frac{A}{d+\alpha+\gamma}\left(1 - \frac{1}{R_0}\right) > 0$.

取 $V_{21} = \frac{x^2}{2} + \frac{(d+\alpha+\gamma)}{\beta}\left(I - I^* - I^*\ln\frac{I}{I^*}\right)$,

$$\left.\frac{\mathrm{d}V_{21}}{\mathrm{d}t}\right|_{(2.1.35)} = -(d+p)x^2 - \beta x^2 I + p\mathrm{e}^{-d\tau}x(t)x(t-\tau)$$

$$\leqslant -(d+p)x^2 + \frac{p\mathrm{e}^{-d\tau}}{2}[x^2(t) + x^2(t-\tau)].$$

再取 $V_{22} = \frac{p\mathrm{e}^{-d\tau}}{2}\int_{t-\tau}^{t} x^2(u)\mathrm{d}u$，$V_2 = V_{21} + V_{22}$ 可得

$$\left.\frac{\mathrm{d}V_2}{\mathrm{d}t}\right|_{(2.1.35)} \leqslant -[d + p(1 - \mathrm{e}^{-d\tau})]x^2.$$

又 $\left.\frac{\mathrm{d}V_2}{\mathrm{d}t}\right|_{(2.1.35)} = 0$ 当且仅当 $x = 0$. 而若 $x = 0$ 为(2.1.35)的解，必有 $I = I^*$. 故使 $\frac{\mathrm{d}V_2}{\mathrm{d}t} = 0$ 的集合内不含(2.1.35)的非平凡轨线，所以 $P^*(S^*, I^*)$ 在 D 内全局渐近稳定. ▌

应当指出，对模型(2.1.32)而言，按基本再生数 R_0 的定义有 $R_0 = \frac{\beta\frac{A}{d}}{d+\alpha+\gamma}$，它并非构成阈值的 $\bar{R}_0$. 注意到 S_0 是无病人时易感者的数量，由 $\bar{R}_0$ 的表达式可见，$\bar{R}_0$ 表示在无病人时一个染病人在其平均染病期内所能传染的病人数. 无病人并不等于全部人群都是易感者，这是因为由于疫苗接种，在移出者 R 类中还有免疫者 pS 存在. 容易看出，当 $\tau = 0$(免疫有效期为零)时，即接种失

败,这时 $S_0 = \dfrac{A}{d}$,从而 $\bar{R}_0 = R_0$,当 $\tau > 0$ 时,我们称 $\bar{R}_0$ 为**接种再生数**.

§2.2 具有年龄结构的传染病模型

2.2.1 具有年龄结构种群模型的基本知识

年龄对于种群增长规律和传染病流行规律而言都是一个重要的因素,因为不同年龄段的物种具有不同的生育力和死亡率等种群动力因素;年龄也影响着传染率和恢复率等疾病传播因素.通常有三类具有年龄结构的模型:一类是离散模型;一类是连续模型;一类是具有生理阶段结构的模型.本节先就种群模型进行介绍.

具有离散年龄结构的种群模型

把所讨论物种的最大成活年龄区间分成 n 个相等的子区间,同时把从 t_0 开始的时间也按与年龄子区间相等的长度加以划分.将这两类子区间分别从小到大依次编号.用 $N_{ij}(i = 1,2,\cdots,n, j = 1,2,\cdots,n,\cdots)$ 表示第 j 个时间段内、年龄位于第 i 段的种群的个体数量.忽略种群规模变化中的密度制约因素.设 p_i 是年龄处于第 i 段的个体能活到 $i+1$ 段的概率.即

$$N_{i+1,j+1} = p_i N_{ij}.$$

再设 B_i 是年龄为 i 段上的每一个体在一个时间段内平均生育的下一代的数量.于是有

$$\begin{cases} N_{1j+1} = B_1 N_{1j} + B_2 N_{2j} + B_3 N_{3j} + \cdots + B_n N_{nj}, \\ N_{2j+1} = p_1 N_{1j}, \\ N_{3j+1} = p_2 N_{2j}, \\ \qquad \cdots\cdots \\ N_{nj+1} = p_{n-1} N_{n-1j}. \end{cases}$$

设初始值,即在第一个时间段上年龄位于各段的个体数量,$N_{11}, N_{21}, \cdots, N_{n1}$ 为已知.

利用矩阵将上述线性系统简洁地用向量差分方程表示为

$$N_{j+1} = AN_j, \tag{2.2.1}$$

其中向量 $N_j = \begin{bmatrix} N_{1j} \\ N_{2j} \\ \vdots \\ N_{nj} \end{bmatrix}$,

$$
\text{矩阵 } A = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & B_3 & \cdots & B_{n-1} & B_n \\ p_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & p_{n-1} & 0 \end{bmatrix}.
$$

方程(2.2.1)就是一个具有离散年龄结构的种群模型,称为 **Leslie 矩阵模型**.

具有连续分布年龄结构的种群模型

对于个体数量很大且可世代重叠的种群,可以认为年龄是连续分布的.下面来建立这种模型.

设 $f(a,t)\mathrm{d}a$ 表示时刻 t、年龄位于区间 $[a,a+\mathrm{d}a]$ 的个体数量. $f(a,t)$ 称为**年龄分布函数**.设时间与年龄同步($\mathrm{d}t=\mathrm{d}a$).时刻 t 年龄位于区间 $[a-\mathrm{d}a,a]$ 的个体数量为 $f(a-\mathrm{d}a,t)\mathrm{d}a$,在时刻 $t+\mathrm{d}t$ 这些个体除死亡者外均应成长进入年龄区间 $[a,a+\mathrm{d}a]$ 而达到数量 $f(a,t+\mathrm{d}t)\mathrm{d}a$.另一方面,设 $\gamma(a-\mathrm{d}a)$ 是单位时间内年龄在区间 $[a-\mathrm{d}a,a]$ 内的个体死亡的概率,故在 t 到 $t+\mathrm{d}t$ 时间段内,年龄为 $[a-\mathrm{d}a,a]$ 的个体在成长为年龄 $[a,a+\mathrm{d}a]$ 过程中的死亡数为

$$
\gamma(a-\mathrm{d}a)\mathrm{d}t \cdot f(a-\mathrm{d}a,t)\mathrm{d}a.
$$

于是有

$$
f(a-\mathrm{d}a,t)-f(a,t+\mathrm{d}t)=\gamma(a-\mathrm{d}a)\cdot f(a-\mathrm{d}a,t)\mathrm{d}t.
$$

将上式两端分别用 Taylor 公式展开,仅保留一次项并约去 $\mathrm{d}t(\mathrm{d}a=\mathrm{d}t)$ 因子后得

$$
\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial a}+\gamma(a)f=0.
$$

这是一个一阶双曲型偏微分方程. 为求其边界条件 $f(0,t)$ 的表达式,设 $B(a)\mathrm{d}a$ 表示每一个体在年龄区间 $[a,a+\mathrm{d}a]$ 平均生育下一代的数量.于是

$$
f(0,t)\mathrm{d}a=\int_0^{+\infty}B(a)f(a,t)\mathrm{d}a\mathrm{d}a.
$$

这样一来,种群的年龄分布函数所满足的定解问题是

$$
\begin{cases} f_t+f_a+\gamma(a)f=0, & (2.2.2)_1 \\ f(0,t)=\int_0^{+\infty}B(a)f(a,t)\mathrm{d}a, & (2.2.2)_2 \\ f(a,0)=f_0(a), & (2.2.2)_3 \end{cases}
$$

其中第三个方程是初始条件,给出在开始时刻种群年龄分布的情况.

平衡年龄分布与稳定年龄分布

定义 2.2.1 若年龄分布函数 $f(a,t)\equiv f(a)$ 与时间无关,则称 $f(a)$ 是一

平衡的年龄分布函数.

平衡年龄分布函数表示各年龄的成员数不随时间而改变.

定义 2.2.2　记 $N(t)=\int_0^{+\infty} f(a,t)\mathrm{d}a$,表示 t 时刻种群的全体成员数.若

$$\frac{f(a,t)}{N(t)}=A(a),$$

则称 $f(a,t)$ 为**稳定的年龄分布函数**.此时,种群称为具有**稳定年龄分布的种群**.

稳定年龄分布函数表示各年龄的成员数在全体成员中所占比例,$\frac{f(a,t)\mathrm{d}a}{N(t)}$ 不随时间而改变.

显然,平衡年龄分布函数一定是稳定年龄分布函数,但稳定年龄分布函数并不一定是平衡年龄分布函数.

定理 2.2.1　种群具有稳定年龄分布函数的充要条件是其年龄分布函数可以变量分离.

证明　必要性是显然的.现证充分性

设 $f(a,t)=A(a)T(t),T(0)>0$.由于

$$N(t)=\int_0^{+\infty} A(a)T(t)\mathrm{d}a=T(t)\int_0^{+\infty} A(a)\mathrm{d}a,$$

所以 $\frac{f(a,t)}{N(t)}=\frac{A(a)}{\int_0^{+\infty} A(a)\mathrm{d}a}$,与 t 无关.　∎

定理 2.2.2　方程 $(2.2.2)_1$ 存在适合边界条件 $(2.2.2)_2$ 且具有稳定年龄分布解的充要条件是存在常数 λ,适合方程

$$\int_0^{+\infty} B(a)\mathrm{e}^{-\lambda a}\pi(a)\mathrm{d}a=1, \tag{2.2.3}$$

且此解的形式为 $\bar{A}(a)\mathrm{e}^{\lambda t}$,其中 $\pi(a)=\mathrm{e}^{-\int_0^a \gamma(u)\mathrm{d}u}$ 表示生物个体从出生活到年龄为 a 的概率.方程(2.2.3)称为此模型的**特征方程**.

证明　(1) 必要性.设 $(2.2.2)_1$ 存在稳定年龄分布的解.由定理2.2.1此解必可变量分离,设为

$$f(a,t)=A(a)T(t),$$

代入 $(2.2.2)_1$ 得

$$A(a)T'(t)+A'(a)T(t)+\gamma(a)A(a)T(t)=0,$$

即

$$-\gamma(a)-\frac{A'(a)}{A(a)}=\frac{T'(t)}{T(t)}.$$

上式相等说明等式两端的值只能为一常数,设为 λ,从而有

$$\begin{cases} T'(t) - \lambda T(t) = 0, \\ A'(a) + [\lambda + \gamma(a)]A(a) = 0. \end{cases}$$

解之得

$$\begin{cases} T(t) = T(0)e^{\lambda t}, \\ A(a) = A(0)e^{-\lambda a}\pi(a). \end{cases}$$

于是

$$f(a,t) = A(0)T(0)e^{-\lambda(a-t)}\pi(a). \tag{2.2.4}$$

代入边界条件$(2.2.2)_2$,并消去公因式后,得

$$\int_0^{+\infty} B(a)e^{-\lambda a}\pi(a)da = 1.$$

这说明 λ 满足特征方程(2.2.3).

(2) 充分性.设存在常数 λ 适合特征方程(2.2.3),将其代入(2.2.4),所得到的解 $f(a,t)$ 显然可变量分离,从而是稳定的年龄分布函数,且适合边界条件$(2.2.2)_2$. 由 (2.2.4) 可见此解具有形式 $\bar{A}(a)e^{\lambda t}$, 其中 $\bar{A}(a) = A(0)T(0)e^{-\lambda a}\pi(a)$. ▌

定理 2.2.3 方程$(2.2.2)_1$有且仅有一族适合边界条件$(2.2.2)_2$的稳定年龄分布解.

证明 由定理 2.2.2 我们只需证明特征方程(2.2.3) 有且仅有一实数解.令

$$G(\lambda) = \int_0^{+\infty} B(a)e^{-\lambda a}\pi(a)da.$$

容易看出,$G(-\infty) = +\infty, G(+\infty) = 0$,而且

$$G'(\lambda) = -\int_0^{+\infty} aB(a)e^{-\lambda a}\pi(a)da < 0.$$

所以 $G(\lambda) = 1$ 有且仅有一个实根.于是,$e^{-\lambda a}\pi(a)$ 就是$(2.2.2)_1$ 满足边界条件$(2.2.2)_2$ 的稳定年龄分布,$(2.2.2)_1$ 满足边界条件$(2.2.2)_2$ 的所有稳定年龄分布只能是 $e^{\lambda a}\pi(a)$ 的常数倍,即(2.2.2) 仅有一族稳定的年龄分布. ▌

应当指出,由稳定年龄分布解的表达式(2.2.4) 可见,这样的解一般说来并不能满足事先给定的初始条件$(2.2.2)_3$.若要它满足初始条件 $f_0(a)$,就需要求

$$f_0(a) = A(0)T(0)e^{-\lambda a}\pi(a). \tag{2.2.5}$$

换句话说,必须要求给定的初始条件 $f_0(a)$ 与 $e^{-\lambda a}\pi(a)$ 成比例.今后凡论及模型(2.2.2) 的稳定年龄分布解时,都理解为初始条件已适当地给定.

定理 2.2.4 考察模型(2.2.2).设 $N(t)$ 是具稳定年龄分布种群在 t 时刻的全体成员数,令

$$R = \int_0^{+\infty} B(a)\pi(a)\mathrm{d}a, \tag{2.2.6}$$

其中 $\pi(a) = \mathrm{e}^{-\int_0^a \gamma(u)\mathrm{d}u}$. 则对此稳定年龄分布的种群有

(1) 当 $R < 1$ 时, $\lim\limits_{t \to +\infty} N(t) = 0$,种群走向绝灭;

(2) 当 $R > 1$ 时, $\lim\limits_{t \to +\infty} N(t) = +\infty$,种群数量无限增长;

(3) 当 $R = 1$ 时, $f(a,t) = f_0(a)$,种群呈平衡年龄分布.

证明　由定理 2.2.2 知当种群呈稳定的年龄分布时,其年龄分布具有形式

$$f(a,t) = f_0(a)\mathrm{e}^{\lambda t},$$

其中 λ 为特征方程(2.2.3) 的实根, $f_0(a)$ 由(2.2.5) 给定. 此时

$$N(t) = \int_0^{+\infty} f(a,t)\mathrm{d}a = \mathrm{e}^{\lambda t}\int_0^{+\infty} f_0(a)\mathrm{d}a.$$

(1) 当 $R = \int_0^{+\infty} B(a)\pi(a)\mathrm{d}a < 1$ 时,由特征方程(2.2.3),必有 $\lambda < 0$,从而

$$\lim_{t \to +\infty} N(t) = \lim_{t \to +\infty} \mathrm{e}^{\lambda t}\int_0^{+\infty} f_0(a)\mathrm{d}a = 0;$$

(2) 当 $R > 1$ 时,由特征方程可见必有 $\lambda > 0$,从而

$$\lim_{t \to +\infty} N(t) = +\infty;$$

(3) 当 $R = 1$ 时,由特征方程知,必有 $\lambda = 0$,从而

$$f(a,t) = f_0(a).$$

▌

由(2.2.6) 式定义的 R 称为**种群的再生数**. 它是区分种群走向绝灭与否的阈值.

上述定理 2.2.4 的结论是对系统(2.2.2) 所存在的稳定年龄分布种群而言的. 对于(2.2.2) 的其它解所表示的种群而言有以下重要结论. 现陈述如下,证明可参阅[7,8].

定理 2.2.5　设 λ^* 为特征方程(2.2.3) 的实根. 则系统(2.2.2) 的任一解,即具有任一年龄分布函数 $f(a,t)$ 的种群,满足

(1) 当 $\lambda^* < 0$ 时, $\lim\limits_{t \to +\infty} N(t) = 0$,种群走向绝灭;

(2) 当 $\lambda^* > 0$ 时,有 $\lim\limits_{t \to +\infty} N(t) = +\infty$,且

$$\lim_{t \to +\infty} \| \mathrm{e}^{-\lambda^* t} f(a,t) - g(f_0)\mathrm{e}^{-\lambda^* a}\pi(a) \| = 0,$$

即年龄分布函数 $f(a,t)$ 随 t 的增大而渐近于稳定的年龄分布函数 $g(f_0)\mathrm{e}^{-\lambda^* a}\pi(a)\mathrm{e}^{\lambda^* t}$;

(3) 当 $\lambda^* = 0$ 时,年龄分布函数 $f(a,t)$ 将趋向于平衡年龄分布函数 $g(f_0)\pi(a)$,其中常数

$$g(f_0) = \frac{\int_0^{+\infty} B(s)\mathrm{e}^{-\lambda^* s}\int_0^s \mathrm{e}^{\lambda^* u}\mathrm{e}^{\int_u^s \gamma(a)\mathrm{d}a} f_0(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s}{\int_0^{+\infty} B(s)s\mathrm{e}^{-\lambda^* s}\mathrm{e}^{\int_0^s \gamma(a)\mathrm{d}a}\mathrm{d}s}.$$

从以上定理可见，种群的平衡年龄分布结构是不稳定的，当出生率系数 $B(a)$ 或死亡率系数 $\gamma(a)$ 稍有变化时，将导致 $R = \int_0^{+\infty} B(a)\pi(a)\mathrm{d}a$ 由 $R = 1$ 变为 $R < 1$ 或 $R > 1$，从而种群必走向绝灭，或成员趋向无穷. 之所以会出现这一不合实际的情况，是因为我们在建模时忽略了密度制约等其它因素. 如果考虑密度对出生、死亡的影响，则模型(2.2.2)相应地变为

$$\begin{cases} f_t + f_a + \gamma(a,N)f = 0, \\ f(0,t) = \int_0^{+\infty} B(a,N)f(a,t)\mathrm{d}a, \\ f(a,0) = f_0(a). \end{cases} \tag{2.2.7}$$

由于 B 与 γ 均通过 N 与 $f(t,N)$ 有关，所以模型(2.2.7)中的方程和边界条件都是非线性的. 这给模型的研究带来了很大的难度. 对某些特殊情况的讨论可参阅[9].

具有分组年龄(生理阶段)结构的种群模型[10]

在许多情况下，年龄对种群增长的影响并不表现在每一年龄值上，而反映在不同年龄阶段上，例如对人群来说，可划分为幼儿、少年、青壮年、老年等几个不同的年龄段. 各年龄段的人群其出生、死亡以及其它习性可能有明显的差异. 这时，我们可从连续分布年龄结构的模型出发，导出分组年龄结构或称生理阶段结构的模型. 下面仍以简单的模型(2.2.2)为例介绍分组年龄结构模型导出的过程.

将最大年龄区间分成 n 段记作 $[a_{i-1}, a_i]$，$i = 1,2,\cdots,n$，其中 $a_0 = 0$，$a_n = +\infty$. 最后一个年龄段 $[a_{n-1}, a_n]$ 对应于所有年龄不小于 a_{n-1} 的人群. 设年龄在 $[a_{i-1}, a_i]$ 段的人群具有相同的出生率 B_i 和死亡率 γ_i. 并假定由(2.2.2)所确定的种群已达到稳定的年龄分布，即 $f(a,t) = A(a)\mathrm{e}^{\lambda t}$，从而在年龄段 $[a_{i-1}, a_i]$ 的个体数为

$$N_i(t) = \int_{a_{i-1}}^{a_i} A(a)\mathrm{e}^{\lambda t}\mathrm{d}a = p_i\mathrm{e}^{\lambda t}, \tag{2.2.8}$$

其中 $p_i = \int_{a_{i-1}}^{a_i} A(a)\mathrm{d}a$ 表示在 $t = 0$ 时(初始时刻)年龄段 $[a_{i-1}, a_i]$ 的个体数.

由于下面的需要，我们来建立 p_i 与 $A(a_{i-1})$ 之间的关系式. 为此，将 $f(a,t) = A(a)\mathrm{e}^{\lambda t}$ 代入 $(2.2.2)_1$ 中得一常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}A(a)}{\mathrm{d}a} = -(\gamma_i + \lambda)A(a).$$

在区间$[a_{i-1}, a_i]$上求解得

$$A(a) = A(a_{i-1})\exp[-(\gamma_i + \lambda)(a - a_{i-1})]. \tag{2.2.9}$$

再在区间$[a_{i-1}, a_i]$上积分得

$$p_i = A(a_{i-1})\{1 - \exp[-(\gamma_i + \lambda)(a_i - a_{i-1})]\}/(\gamma_i + \lambda), i = 1,2,\cdots,n. \tag{2.2.10}$$

为方便起见,令 $c_i = \dfrac{A(a_i)}{p_i}$. 由(2.2.9),(2.2.10)知

$$c_i = \frac{\gamma_i + \lambda}{\exp[(\gamma_i + \lambda)(a_i - a_{i-1})] - 1}.$$

现在来把系统(2.2.2)化成相应的常微分方程组. 首先将 $f(a,t) = A(a)\mathrm{e}^{\lambda t}$ 代入(2.2.2),并在$[0, a_1]$上将方程$(2.2.2)_1$两端对 a 积分得

$$(\mathrm{e}^{\lambda t})'\int_0^{a_1} A(a)\mathrm{d}a + \mathrm{e}^{\lambda t}(A(a_1) - A(0)) + \gamma_1\mathrm{e}^{\lambda t}\int_0^{a_1} A(a)\mathrm{d}a = 0. \tag{2.2.11}$$

由边界条件$(2.2.2)_2$可知

$$\begin{aligned} A(0)\mathrm{e}^{\lambda t} = f(0,t) &= \int_0^{+\infty} B(a)A(a)\mathrm{e}^{\lambda t}\mathrm{d}a \\ &= \sum_{i=1}^{n}\int_{a_{i-1}}^{a_i} B_iA(a)\mathrm{e}^{\lambda t}\mathrm{d}a. \end{aligned}$$

再由(2.2.8)式可得

$$A(0)\mathrm{e}^{\lambda t} = \sum_{i=1}^{n} B_iN_i(t).$$

由于 $A(a_1) = p_1c_1$,故

$$\mathrm{e}^{\lambda t}A(a_1) = c_1p_1\mathrm{e}^{\lambda t} = c_1N_1(t).$$

于是,方程(2.2.11)可改写为

$$\frac{\mathrm{d}N_1}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n} B_iN_i(t) - (\gamma_i + c_1)N_1(t). \tag{2.2.12}$$

再对方程$(2.2.2)_1$在$[a_{i-1}, a_i]$上两端积分,类似地可得

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}N_i}{\mathrm{d}t} = c_{i-1}N_{i-1} - (\gamma_i + c_i)N_i(t), \quad 2 \leqslant i \leqslant n-1, \\ \dfrac{\mathrm{d}N_n}{\mathrm{d}t} = c_{n-1}N_{n-1} - \gamma_nN_n(t). \end{cases} \tag{2.2.13}$$

这样一来,研究系统$(2.2.2)_1$满足边界条件$(2.2.2)_2$的稳定年龄分布解就转化为研究由(2.2.12)与(2.2.13)所构成的 n 维常微分方程组的解,这将使问题大

为简化.

由此常微分方程组可见,常数 c_i 是从 i 年龄组的个体进入 $i+1$ 组的转移率系数.

$p_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是初始时刻第 i 个年龄组的个体数.我们可以把各年龄组的个体数 p_i 通过第一个年龄组的个体数 p_1 和转移率系数、死亡率系数表示出来.事实上,由(2.2.9)与(2.2.10)式不难看出

$$A(a_i)-A(a_{i-1})=-(\gamma_i+\lambda)p_i. \tag{2.2.14}$$

由于 $A(a_i)=c_ip_i$,代入(2.2.14)式化简可得

$$p_i=\frac{c_{i-1}p_{i-1}}{c_i+\gamma_i+\lambda},\qquad i\geqslant 2.$$

反复迭代得

$$p_i=\frac{c_{i-1}c_{i-2}\cdots c_1p_1}{(c_i+\gamma_i+\lambda)(c_{i-1}+\gamma_{i-1}+\lambda)\cdots(c_2+\gamma_2+\lambda)}. \tag{2.2.15}$$

下面考察特征方程(2.2.3)在年龄组结构系统中对应于什么?

$$\int_0^{+\infty}B(a)\mathrm{e}^{-\lambda a}\pi(a)\mathrm{d}a=\sum_{i=1}^{n}B_i\int_{a_{i-1}}^{a_i}\mathrm{e}^{-\lambda a}\pi(a)\mathrm{d}a$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{B_i}{A(0)}\int_{a_{i-1}}^{a_i}A(a)\mathrm{d}a=\sum_{i=1}^{n}\frac{B_ip_i}{A(0)}$$

$$=\frac{B_1p_1}{A(0)}+\sum_{i=2}^{n}\frac{B_ic_{i-1}c_{i-2}\cdots c_1p_1}{A(0)(c_i+\gamma_i+\lambda)(c_{i-1}+\gamma_{i-1}+\lambda)\cdots(c_2+\gamma_2+\lambda)}.$$

由(2.2.14)式有

$$A(0)=A(a_1)+(\gamma_1+\lambda)p_1,$$

而 $A(a_1)=c_1p_1$,从而 $A(0)=(c_1+\gamma_1+\lambda)p_1$.于是特征方程(2.2.3)在这种情况下变为

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{B_ic_{i-1}c_{i-2}\cdots c_1}{(c_i+\gamma_i+\lambda)(c_{i-1}+\gamma_{i-1}+\lambda)\cdots(c_2+\gamma_2+\lambda)(c_1+\gamma_1+\lambda)}=1. \tag{2.2.16}$$

相应地,种群的再生数 $R=\int_0^{+\infty}B(a)\pi(a)\mathrm{d}a$ 变成

$$R=\sum_{i=1}^{n}\frac{B_ic_{i-1}c_{i-2}\cdots c_1}{(c_i+\gamma_i)(c_{i-1}+\gamma_{i-1})\cdots(c_2+\gamma_2)(c_1+\gamma_1)}. \tag{2.2.17}$$

事实上(2.2.17)可从(2.2.16)式中令 $\lambda=0$ 得到.将(2.2.17)右端展开,也可写成

$$R=B_1\frac{1}{c_1+\gamma_1}+B_2\frac{c_1}{(c_2+\gamma_2)(c_1+\gamma_1)}+\cdots$$

$$+ B_n \frac{c_{n-1}\cdots c_1}{(c_n+\gamma_n)(c_{n-1}+\gamma_{n-2})\cdots(c_1+\gamma_1)}.$$

定理(2.2.4) 的结论在这里仍然成立.

2.2.2 具有年龄结构的传染病模型

本段将通过一个具有年龄结构的传染病模型为例来说明建模思想、疾病消亡与否阈值的寻求、以及无病稳定年龄分布的稳定性.进一步的研究将在第 6 章中论述.

具年龄结构的 MSEIR 模型的建立

与前述的传染病模型相比,这里我们添加了一个仓室 M.当母亲被某种传染病感染后,她的体内将产生相应的抗体,而这种抗体将通过胎盘传递给胎儿.所以对那些处于潜伏期、染病期和已恢复的母亲,她们所生育的下一代,在一个短暂时期内有自然免疫力,称为**被动免疫**(passive immunity).经过一定时期后,免疫力丧失,变成易感者.我们把这类个体归入 M 类,并用 M、S、E、I、R 分别表示在被动免疫类、易感者类、潜伏者类、染病者类和康复者类成员的年龄分布函数,种群全体成员的年龄分布函数为 $f(a,t)=M+S+E+I+R$.于是,例如,时刻 t 年龄段为$[a_1,a_2]$ 的易感者数量为$\int_{a_1}^{a_2}S(a,t)\mathrm{d}a$,$t$ 时刻种群的成员总数为$\int_0^{+\infty}f(a,t)\mathrm{d}a$.

设从 M、E、I 各类中传递到下一仓室的传递率系数分别为常数 δ、ε、γ;自然死亡率系数为 $d(a)$;在 t 时刻从年龄为 a 的易感类移出成为患病者的移出率系数为 $\beta(a,t)$.不考虑因病死亡率和垂直传染.于是综合年龄分布种群模型和传染病模型的建立方法,容易得到具有年龄结构的下述一阶偏微分方程组:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial M}{\partial a}+\dfrac{\partial M}{\partial t}=-(\delta+d(a))M,\\ \dfrac{\partial S}{\partial a}+\dfrac{\partial S}{\partial t}=\delta M-d(a)S-\beta(a,t)S,\\ \dfrac{\partial E}{\partial a}+\dfrac{\partial E}{\partial t}=\beta(a,t)S-d(a)E-\varepsilon E,\\ \dfrac{\partial I}{\partial a}+\dfrac{\partial I}{\partial t}=\varepsilon E-d(a)I-\gamma I,\\ \dfrac{\partial R}{\partial a}+\dfrac{\partial R}{\partial t}=\gamma I-d(a)R.\end{cases}\tag{2.2.18}$$

显然

$$\frac{\partial f}{\partial a}+\frac{\partial f}{\partial t}=-d(a)f(a,t),$$

其中 $\beta(a,t)S$ 为 t 时刻年龄为 a 的易感者的疾病发生率.下面建立 $\beta(a,t)$ 的表达式.年龄为 a 的易感者可能与任一年龄的染病者接触而造成感染.设单位时间内一个年龄为 a 的易感者与年龄为 $\bar{a}$ 的他人的有效接触次数,即有效接触率为变量分离形式:$b(a)\bar{b}(\bar{a})$.当被接触者为病人时,就会传染.在年龄段 $[\bar{a},\bar{a}+\mathrm{d}\bar{a}]$ 上的病人数为 $I(\bar{a},t)\mathrm{d}a$,在种群成员总数中所占比例为 $\dfrac{I(\bar{a},t)\mathrm{d}\bar{a}}{\int_0^{+\infty} f(\bar{a},t)\mathrm{d}\bar{a}}$,

因此

$$\beta(a,t)=\frac{\int_0^{+\infty} b(a)\bar{b}(\bar{a})I(\bar{a},t)\mathrm{d}\bar{a}}{\int_0^{+\infty} f(\bar{a},t)\mathrm{d}\bar{a}}. \tag{2.2.19}$$

边界条件应由新生儿组成,新生儿有具被动免疫者和易感者两部分.设种群的出生率系数为 $B(a)$.于是边界条件为

$$\begin{cases} M(0,t)=\int_0^{+\infty} B(a)[M(a,t)+E(a,t)+I(a,t)+R(a,t)]\mathrm{d}a, \\ S(0,t)=\int_0^{+\infty} B(a)S(a,t)\mathrm{d}a, \\ E(0,t)=0, \\ I(0,t)=0, \\ R(0,t)=0. \end{cases} \tag{2.2.20}$$

初始条件为

$$\begin{aligned} &M(a,0)=M_0(a),S(a,0)=S_0(a),E(a,0)=E_0(a), \\ &I(a,0)=I_0(a),R(a,0)=R_0(a). \end{aligned} \tag{2.2.21}$$

于是具有年龄结构的这个 MSEIR 模型便由具有表达式(2.2.19) 的方程组(2.2.18)、边界条件(2.2.20) 与初始条件(2.2.21) 构成.

稳定年龄分布

对上述 MSEIR 模型作归一化变换,令

$$m(a,t)=\frac{M(a,t)}{f(a,t)},\quad s(a,t)=\frac{S(a,t)}{f(a,t)},\quad e(a,t)=\frac{E(a,t)}{f(a,t)},$$

$$i(a,t)=\frac{I(a,t)}{f(a,t)},\quad r(a,t)=\frac{R(a,t)}{f(a,t)}.$$

方程组(2.2.18) 变为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial m}{\partial a}+\dfrac{\partial m}{\partial t}=-\delta m,\\ \dfrac{\partial s}{\partial a}+\dfrac{\partial s}{\partial t}=\delta m-\beta(a,t)s,\\ \dfrac{\partial e}{\partial a}+\dfrac{\partial e}{\partial t}=\beta(a,t)s-\varepsilon e,\\ \dfrac{\partial i}{\partial a}+\dfrac{\partial i}{\partial t}=\varepsilon e-\gamma i,\\ \dfrac{\partial r}{\partial a}+\dfrac{\partial r}{\partial t}=\gamma i.\end{cases}\tag{2.2.22}$$

假定种群的总成员已达到稳定的年龄分布，即

$$f(a,t)=A(0)T(0)\mathrm{e}^{-\lambda a}\pi(a)\mathrm{e}^{\lambda t}.\tag{2.2.4}$$

容易看出，若取常数 $A(0)T(0)=\rho$，其中

$$\rho=\frac{1}{\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\lambda a}\pi(a)\mathrm{d}a},$$

则初始时刻($t=0$)时的成员总数为

$$\int_0^{+\infty}f(a,0)\mathrm{d}a=\rho\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\lambda a}\pi(a)\mathrm{d}a=1.$$

实际上，这相当于适当选取初值 $A(0)T(0)$，将初始时刻的成员总数归一化. 这时有

$$f(a,t)=\rho\mathrm{e}^{-\lambda a}\pi(a)\mathrm{e}^{-\lambda t},$$

代入(2.2.19)式得

$$\beta(a,t)=b(a)\int_0^{+\infty}\bar{b}(\bar{a})i(\bar{a},t)\rho\mathrm{e}^{-\lambda\bar{a}}\pi(\bar{a})\mathrm{d}\bar{a}.\tag{2.2.23}$$

边界条件变为

$$\begin{cases}m(0,t)=\displaystyle\int_0^{+\infty}B(a)[1-s(a,t)]\mathrm{e}^{-\lambda a}\pi(a)\mathrm{d}a,\\ s(0,t)=\displaystyle\int_0^{+\infty}B(a)s(a,t)\mathrm{e}^{-\lambda a}\pi(a)\mathrm{d}a.\end{cases}\tag{2.2.24}$$

由定理 2.2.2 知

$$m(0,t)+s(0,t)=\int_0^{+\infty}B(a)\mathrm{e}^{-\lambda a}\pi(a)\mathrm{d}a=1.$$

当系统(2.2.18)达到稳定年龄分布状态时，m,s,e,i,r 均仅为 a 的函数而与 t 无关. 这时方程组(2.2.22)蜕化为下述常微分方程组，

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}a} = -\delta m, \\ \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}a} = \delta m - kb(a)s, \\ \dfrac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}a} = kb(a)s - \varepsilon e, \\ \dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}a} = \varepsilon e - \gamma i, \\ \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}a} = \gamma i. \end{cases}$$

而(2.2.23)式蜕化为

$$\beta(a) = kb(a), \quad k = \int_0^{+\infty} \bar{b}(\bar{a}) i(\bar{a}) \rho \mathrm{e}^{-\lambda \bar{a}} \pi(\bar{a}) \mathrm{d}\bar{a}, \tag{2.2.25}$$

边界条件(2.2.24)蜕化为此常微分方程组的初始条件$(m_0, s_0, 0, 0, 0)$$(m_0 + s_0 = 1)$.解此常数微分方程组,得

$$\begin{cases} m(a) = (1 - s_0)\mathrm{e}^{-\delta a}, \\ s(a) = \mathrm{e}^{-\Lambda(a)}\left[s_0 + \delta(1 - s_0)\displaystyle\int_0^a \mathrm{e}^{-\delta x + \Lambda(x)} \mathrm{d}x\right], \\ e(a) = \mathrm{e}^{-\varepsilon a}\displaystyle\int_0^a \beta(y)\mathrm{e}^{\varepsilon y - \Lambda(y)}\left[s_0 + \delta(1 - s_0)\displaystyle\int_0^y \mathrm{e}^{-\delta x + \Lambda(x)} \mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y, \\ i(a) = \mathrm{e}^{-\gamma a}\displaystyle\int_0^a \varepsilon \mathrm{e}^{(\gamma - \varepsilon)z}\displaystyle\int_0^z \beta(y)\mathrm{e}^{\varepsilon y - \Lambda(y)}\left[s_0 + \delta(1 - s_0)\displaystyle\int_0^y \mathrm{e}^{-\delta x + \Lambda(x)} \mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \\ r(a) = \displaystyle\int_0^a \gamma i(x)\mathrm{d}x, \end{cases} \tag{2.2.26}$$

其中 $\Lambda(a) = \int_0^a \beta(u)\mathrm{d}u, \beta(u) = kb(u)$.

容易看出,当$k = 0$时有$i(a) \equiv 0$,从而$e(a) = r(a) \equiv 0, s(a) = s_0(a)$, $m(a) = m_0(a)(s_0(a) + m_0(a) \equiv 1)$,即对应于无病稳定年龄分布$(m_0, s_0, 0, 0, 0)$ ①;当$k > 0$时,存在地方病稳定年龄分布.

定理 2.2.6[10] 考察具有边界条件(2.2.24)的系统(2.2.22).令

$$R_0 = \int_0^{+\infty} \bar{b}(\bar{a}) \rho \mathrm{e}^{-(\lambda + \gamma)\bar{a}} \pi(\bar{a}) \int_0^{\bar{a}} \varepsilon \mathrm{e}^{(\gamma - \varepsilon)z} \int_0^z b(y)\mathrm{e}^{\varepsilon y} \mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}\bar{a}, \tag{2.2.27}$$

则当$R_0 > 1$时系统(2.2.22)存在惟一的正的(地方病)稳定年龄分布如

---

① 实际上,当$e_0(a) \equiv i_0(a) \equiv r_0(a) \equiv 0$时,随着$t$的增大,若干代之后,必有$m_0(a) \equiv 0$.从而$s_0(a) \equiv 1$.所以无病稳定年龄分布实际上也就是(0,1,0,0,0).

(2.2.26) 所示;当 $R_0 \leqslant 1$ 时,仅有无病稳定年龄分布.

证明　关键在于证明当 $R_0 > 1$ 时存在由(2.2.25)所确定的正常数 k.将由(2.2.26)所确定的稳定年龄分布函数 $i(a)$ 代入(2.2.23)式得

$$\beta(a) = b(a)\int_0^{+\infty} \bar{b}(\bar{a})\rho e^{-\lambda\bar{a}}\pi(\bar{a})e^{-\gamma\bar{a}}\int_0^{\bar{a}} \varepsilon e^{(\gamma-\varepsilon)z}\int_0^z \beta(y)e^{\varepsilon y-\Lambda(y)} \cdot [s_0 + \delta(1-s_0)\int_0^y e^{-\delta x+\Lambda(x)}dx]dydzd\bar{a}. \tag{2.2.28}$$

由于此时 $s(a,t) \equiv s(a)$ 与 t 无关,由(2.2.24)式知

$$s_0 = s(0) = s(0,0) = \int_0^{+\infty} B(a)s(a)e^{-\lambda a}\pi(a)da. \tag{2.2.29}$$

将(2.2.26)中 $s(a)$ 的表达式代入(2.2.29)得

$$s_0 = s_0F_1 + \delta(1-s_0)F_2, \tag{2.2.30}$$

其中

$$F_1 = \int_0^{+\infty} B(a)e^{-\Lambda(a)}e^{-\lambda a}\pi(a)da,$$

$$F_2 = \int_0^{+\infty} B(a)e^{-\Lambda(a)}e^{-\lambda a}\pi(a)\int_0^a e^{-\delta x+\Lambda(x)}dxda.$$

再将由(2.2.30)形式表达的 s_0 代入(2.2.28)式,注意到 $\beta(u) = kb(u)$,整理后可得

$$1 = \int_0^{+\infty} \bar{b}(\bar{a})\rho e^{-(\lambda+\gamma)\bar{a}}\pi(\bar{a})\int_0^{\bar{a}} \varepsilon e^{(\gamma-\varepsilon)z}\int_0^z b(y)e^{\varepsilon y} \cdot \frac{\delta F_2 e^{-k\int_0^y b(u)du} + \delta(1-F_1)\int_0^y e^{-\delta x-k\int_x^y b(u)du}dx}{(\delta F_2 + 1 - F_1)}dydzd\bar{a}. \tag{2.2.31}$$

将(2.2.31)的右端看作 k 的函数,记作 $R_0(k)$.容易看出 $R_0(+\infty) = 0$,

$$R_0(0) = \int_0^{+\infty} \bar{b}(\bar{a})\rho e^{-(\lambda+\gamma)\bar{a}}\pi(\bar{a})\int_0^{\bar{a}} \varepsilon e^{(\gamma-\varepsilon)z}\int_0^z b(y)e^{\varepsilon y}dydzd\bar{a} = R_0,$$

而且 $R_0(k)$ 关于 k 单调减小.所以

当 $R_0 > 1$ 时,方程(2.2.31)有且仅有一正根 k.从而可确定

$$\beta(a) = kb(a), \qquad \Lambda(a) = k\int_0^a b(u)du.$$

因而系统(2.2.22)存在惟一的地方病稳定年龄分布(2.2.26);

当 $R_0 \leqslant 1$ 时,(2.2.31)无正根,故不存在正的稳定年龄分布.这时,可由解的表达式(2.2.26)直接看出系统存在无病稳定年龄分布. ∎

定理 2.2.6 表明,由(2.2.27)所定义的 R_0 可以看作是这个 MSEIR 模型的修正再生数.

稳定年龄分布的稳定性

下面利用 Liapunov 函数法来讨论无病稳定年龄分布的全局稳定性.

定理 2.2.7[10] 对于适合边界条件(2.2.24)的系统(2.2.22).无病稳定年龄分布当 $R_0 < 1$ 时是全局稳定的;当 $R_0 > 1$ 时不稳定.

证明 令

$$V(t) = \int_0^{+\infty} [P(a)e(a,t) + Q(a)i(a,t)]\mathrm{d}a,$$

其中 P、Q 为待定的正的有界可微函数.沿系统(2.2.22)的解求导得

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \int_0^{+\infty} \left\{P(a)\left[\beta(a,t)s - \varepsilon e - \frac{\partial e}{\partial a}\right] + Q(a)\left[\varepsilon e - \gamma i - \frac{\partial i}{\partial a}\right]\right\}\mathrm{d}a.$$

对其中含偏导数的项用分部积分,并注意到 $e(0,t) \equiv i(0,t) \equiv 0$,而且当 $a \to +\infty$ 时应有 $e \to 0, i \to 0$,从而

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \int_0^{+\infty} \{&\beta s P(a) + e[P'(a) - \varepsilon P(a) + \varepsilon Q(a)] \\ &+ [Q'(a) - \gamma Q(a)]i\}\mathrm{d}a.\end{aligned} \tag{2.2.32}$$

首先对任一确定的 Q 选取 $P(a)$ 使

$$P'(a) - \varepsilon P(a) + \varepsilon Q(a) = 0,$$

解之,得通解

$$P(a) = \mathrm{e}^{\varepsilon a}\left[c - \int_0^a \varepsilon Q(x)\mathrm{e}^{-\varepsilon x}\mathrm{d}x\right].$$

由于已设 $Q(a) > 0$ 连续有界,故 $\int_0^a \varepsilon Q(x)\mathrm{e}^{-\varepsilon x}\mathrm{d}x$ 单调增且收敛于 $\int_0^{+\infty} \varepsilon Q(x)\mathrm{e}^{-\varepsilon x}\mathrm{d}x$.于是可取

$$\begin{aligned}P(a) &= \mathrm{e}^{\varepsilon a}\left[\int_0^{+\infty} \varepsilon Q(x)\mathrm{e}^{-\varepsilon x}\mathrm{d}x - \int_0^a \varepsilon Q(x)\mathrm{e}^{-\varepsilon x}\mathrm{d}x\right] \\ &= \mathrm{e}^{\varepsilon a}\int_a^{+\infty} \varepsilon Q(x)\mathrm{e}^{-\varepsilon x}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

再利用 $\beta(a,t)$ 的表达式(2.2.23),可将(2.2.32)改写成

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = &\int_0^{+\infty} \left[\varepsilon s b(a)\mathrm{e}^{\varepsilon a}\int_a^{+\infty} Q(x)\mathrm{e}^{-\varepsilon x}\mathrm{d}x\int_0^{+\infty} \bar{b}(\bar{a})i(\bar{a},t)\rho\mathrm{e}^{-\lambda\bar{a}}\pi(\bar{a})\mathrm{d}\bar{a}\right]\mathrm{d}a \\ &+ \int_0^{+\infty} [Q'(a) - \gamma Q(a)]i\mathrm{d}a.\end{aligned} \tag{2.2.33}$$

再选择 $Q(a) > 0$,使

$$Q'(a) - \gamma Q(a) + \bar{b}(a)\rho\mathrm{e}^{-\lambda a}\pi(a) = 0.$$

与 $P(a)$ 同理可解得

$$Q(a) = \mathrm{e}^{\gamma a}\int_a^{+\infty} \bar{b}(\bar{a})\rho\mathrm{e}^{-\lambda\bar{a}}\mathrm{e}^{-\gamma\bar{a}}\pi(\bar{a})\mathrm{d}\bar{a},$$

代入(2.2.33)式得

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\int_0^{+\infty}\left[\varepsilon s b(a)\mathrm{e}^{\varepsilon a}\int_a^{+\infty}\mathrm{e}^{\gamma x}\int_x^{+\infty}\bar{b}(\bar{a})\rho\mathrm{e}^{-\lambda\bar{a}}\mathrm{e}^{-\gamma\bar{a}}\pi(\bar{a})\mathrm{d}\bar{a}\,\mathrm{e}^{-\varepsilon x}\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}a$$

$$\cdot\int_0^{+\infty}\bar{b}(\bar{a})\rho\mathrm{e}^{-\lambda\bar{a}}\pi(\bar{a})i(\bar{a},t)\mathrm{d}\bar{a}-\int_0^{+\infty}\bar{b}(a)\rho\mathrm{e}^{-\lambda a}\pi(a)i(a,t)\mathrm{d}a$$

$$=\left\{\int_0^{+\infty}[\varepsilon s b(a)\mathrm{e}^{\varepsilon a}\int_a^{+\infty}\mathrm{e}^{(\gamma-\varepsilon)x}\int_x^{+\infty}\bar{b}(\bar{a})\rho\mathrm{e}^{-\lambda\bar{a}}\mathrm{e}^{-\gamma\bar{a}}\pi(\bar{a})\mathrm{d}\bar{a}\mathrm{d}x]\mathrm{d}a-1\right\}$$

$$\cdot\int_0^{+\infty}\bar{b}(a)\rho\mathrm{e}^{-\lambda a}\pi(a)i(a,t)\mathrm{d}a.$$

将上式右端大括号内前一项中的三重累次积分变换顺序,并令 $s=1$. 不难看出它正好是由(2.2.31)所定义的修正再生数 R_0. 由于 $s\leqslant 1$,故有

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\leqslant(R_0-1)\int_0^{+\infty}\bar{b}(a)\rho\mathrm{e}^{-\lambda a}\pi(a)i(a,t)\mathrm{d}a.$$

可见,当 $R_0<1$ 时,$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\leqslant 0$,且$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=0$ 当且仅当 $i\equiv 0$,由方程组(2.2.22)可见,此时必有 $e\equiv 0, r\equiv 0$,即使$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=0$ 的区域内仅含无病稳定年龄分布. 于是当 $R_0<1$ 时此无病稳定年龄分布$(m_0,s_0,0,0,0)$全局渐近稳定.

当 $R_0>1$ 时,注意到第 53 页的脚注. 容易由(2.2.32)式看出,对于足够接近$(0,1,0,0,0)$的解$(0<1-s_0\ll 1, 0<i\ll 1)$,将有$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}>0$. 于是无病稳定年龄分布不稳定.

对于离散年龄结构的传染病模型将在第 6 章详细介绍. 对于是生理阶段结构的传染病模型,目前的研究结果尚为数不多. 我国学者近期的相关工作可参阅文献[49 ~ 52].

§2.3　在多群体中传播的传染病模型

若一种传染病在相互作用的多种群中传播,或在同一种群的不同群体中传播. 则将使模型中方程的个数增多,也可能使模型的结构复杂化. 下面我们通过例子来展示几种情况.

2.3.1　疾病在多个染病者群体传播的 S-DI-A 模型

设染病者由于其免疫系统等体内特征和所处环境的差异被分成 n 个群体,记作 $I_i(i=1,2,\cdots,n)$. 每一子群体中的病人均可与易感者 S 接触但有不同的有效接触率和移出率;假定这些病人在进入移出类 A 后有一定比例的因病死亡(例如艾滋病,在 HIV 感染期 I_i 内无因病死亡. 在晚期成为 AIDS 病人时一般不

再与易感者接触而进入移出类 A,且有一定比例死亡)①,输入率为常数 $K=\mu S^0$,且均为易感者,自然死亡率系数为 μ,移出率系数为 ν_i.若采用双线性发生率,则相应的 SDIA 模型为[11]

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=\mu S^0-\mu S-\sum\limits_{i=1}^{n}\beta_i I_i S,\\ \dfrac{\mathrm{d}I_i}{\mathrm{d}t}=p_i\sum\limits_{j=1}^{n}\beta_j I_j S-(\mu+\nu_i)I_i, \quad i=1,2,\cdots,n,\\ \dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}=\sum\limits_{j=1}^{n}\nu_j I_j-\delta A,\end{cases} \tag{2.3.1}$$

其中 p_i 为染病者进入 I_i 群体的比例系数,$\sum\limits_{i=1}^{n}p_i=1$;$\nu_i$ 是 I_i 类病人的移出率系数;δ 是自然死亡率系数与因病死亡率系数之和.

由于(2.3.1)中前 $n+1$ 个方程中不含 A,故只须讨论由前 $n+1$ 个方程所构成的方程组.由于这里的移出者被认为无活动能力,不与他人接触,故不计入总人口,即 $N=S+\sum\limits_{i=1}^{n}I_i$.为求其平衡点 $E^*(S^*,I_1^*,\cdots,I_n^*)$,令方程组右端为零,可得

$$p_i\mu(S^0-S^*)=(\mu+\nu_i)I_i^*,$$

从而

$$I_i^*=\frac{\mu(S^0-S^*)p_i}{\mu+\nu_i}, \tag{2.3.2}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\beta_j I_j^*=\frac{\mu(S^0-S^*)}{S^*}. \tag{2.3.3}$$

将(2.3.2)代入(2.3.3)得

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\beta_i p_i}{\mu+\nu_i}=\frac{1}{S^*},$$

令

$$R_0=S^0\sum_{i=1}^{n}\frac{\beta_i p_i}{\mu+\nu_i}, \tag{2.3.4}$$

于是

$$S^*=\frac{S^0}{R_0}. \tag{2.3.5}$$

再将(2.3.5)代入(2.3.2)可得

---

① 应当注意,此模型是以艾滋病为背景建立的.这里的移出类不是前面所讨论模型的恢复者类,而是指晚期病人,且假定已无与他人接触的可能.

$$I_i^* = \frac{S^0\mu(R_0 - 1)p_i}{R_0(\mu + \nu_i)}. \tag{2.3.6}$$

由(2.3.6)可见,当且仅当$R_0 > 1$时,模型(2.3.1)存在正(地方病)平衡点E^*,当$R_0 < 1$时,仅有无病平衡点$E_0(S^0,0,\cdots,0)$.

为了讨论平衡点的稳定性,也为了今后研究的需要,我们先介绍有广泛应用的 Lasalle 不变集原理和极限系统的有关知识.

定义 2.3.1 考虑自治系统

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x), \tag{2.3.7}$$

其中$f \in C(D \subset R^n, R^n)$.

设$\Omega \subset D$是一开子集,$V \in C^1(\Omega, R)$.若(2.3.7)的轨线有全导数

$$\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(2.3.7)} = \mathrm{grad}V(x) \cdot f(x) \leqslant 0, \qquad x \in \Omega,$$

则称V是系统(2.3.7)的 Liapunov 函数.

定理 2.3.1 (不变集原理)[34] 设V是系统(2.3.7)的定义在开子集$\Omega \subset D$内的一个 Liapunov 函数,V在$\bar{\Omega}$上连续,令

$$E = \{x \in \bar{\Omega} \mid V'(x) = 0\},$$

M是系统(2.3.7)在E中的最大不变子集,从Ω内出发的任一正半轨$\Gamma_+(x_0)(x_0 \in \Omega)$,恒在$\Omega$中且有界,则轨线$\Gamma_+(x_0)$的$\omega$极限集$\omega(\Gamma_+(x_0)) \subset M$,且有

$$\lim_{t \to +\infty} \mathrm{dist}(x(t, x_0), M) = 0.$$

推论 2.3.1 在定理 2.3.1 的条件下,若$M = \{x^*\}$,这里$f(x^*) = 0$,则系统(2.3.7)的平衡点x^*在Ω内是全局吸引的.

推论 2.3.2 设$V(x)$是系统(2.3.7)在R^n上有 Liapunov 函数且有下界,当$\| x \| \to +\infty$时,$V(x) \to +\infty$,则系统(2.3.7)的任一正半轨$\Gamma_+(x_0)$是有界的,且当$t \to +\infty$时该轨线趋向于$E = \{x \in R^n \mid V'(x) = 0\}$中的最大不变集$M$.特别地,若$M = \{x^*\}$,$f(x^*) = 0$,则平衡点$x^*$全局渐近稳定.

定义 2.3.2 (极限系统) 设有非自治系统

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(t, x), \qquad f: R \times D \subseteq R \times R^n \to R^n \tag{2.3.8}$$

与自治系统

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = g(y), \qquad g: D \subseteq R^n \to R^n, \tag{2.3.9}$$

且设解的存在惟一性条件满足,解的存在区间为$(a, +\infty)$.

若当$t \to +\infty$时,对$\forall x \in D$,$f(t,x)$一致地趋向于$g(x)$,则称系统

(2.3.9) 是(2.3.8) 的**极限系统**;而(2.3.8) 称为具有极限系统(2.3.9) 的渐近自治系统.

在一定条件下,渐近自治系统的解与其极限系统的解之间有密切关系.

定理 2.3.2[35] 设 $f \in C(R \times R^n)$, $g \in C(R^n)$ 均满足局部 Lipschitz 条件.若系统(2.3.8) 的任一解 $x(t)$ 均正向有界,且其极限系统(2.3.9) 的平衡点 E 全局渐近稳定,则系统(2.3.8) 的任一解 $x(t)$ 都有

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = E.$$

下面我们利用 Lasalle 不变集原理和极限系统理论来讨论模型(2.3.1) 平衡点的稳定性.

定理 2.3.3[12] 将不含最后一方程的模型(2.3.1) 记作(2.3.1)′,则

1) 当 $R_0 < 1$ 时,无病平衡点 E_0 在域 $G = \{(S, I_i) \mid 0 = N = S + \sum_{i=1}^{n} I_i \leqslant S^0,\ S \geqslant 0, I_i \geqslant 0\}$ 内全局渐近稳定;

2) 当 $R_0 > 1$ 时,E_0 不稳定.

证明 由于

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = \mu(S^0 - N) - \sum_{i=1}^{n} \gamma_i I_i \leqslant \mu(S^0 - N),$$

故 G 是系统(2.3.1)′ 的一个正向不变集.

1) 将系统(2.3.1)′ 写成下面的向量形式

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \mu(S^0 - S) - B^T I S, \\ \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = S B^T I P - D I, \end{cases} \tag{2.3.10}$$

其中 $I = (I_1, I_2, \cdots, I_n)^T$, $B = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)^T$, $D = \mathrm{ding}((\mu + \nu_1), (\mu + \nu_2), \cdots, (\mu + \nu_n))$, $P = (p_1, p_2, \cdots, p_n)^T$,而表达式(2.3.4) 可被写成

$$R_0 = S^0 B^T D^{-1} P.$$

取 Liapunov 函数

$$V = X^T I,$$

其中 X 是一待定的正的常向量.沿(2.3.10) 轨线的全导数有

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = S X^T B^T I P - X^T D I \leqslant S^0 X^T B^T I P - X^T D I.$$

为选取 X,令 $X^T D = B^T$,从而

$$X = D^{-1} B = \left(\frac{\beta_1}{\mu + \gamma_1}, \frac{\beta_2}{\mu + \gamma_2}, \cdots, \frac{\beta_n}{\mu + \gamma_n} \right)^T > 0.$$

于是,注意到上述 R_0 的表达式可知

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} \leqslant S^0 B^T D^{-1} B^T IP - B^T D^{-1} DI$$
$$= (S^0 B^T D^{-1} P - 1) B^T I = (R_0 - 1) B^T I.$$

可见当 $R_0 < 1$ 时，$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} \leqslant 0$，且当仅当 $I = 0$ 时 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = 0$. 即

$$E = \{I \in G \mid V'(I) = 0\} = \{I = 0\}.$$

显然，系统(2.3.10) 在 E 中的最大不变集就是 E 本身. 由 Lasalle 不变集原理可知，当 $t \to +\infty$ 时，系统(2.3.10) 的解均有 $I(t) \to 0$. 由此可知(2.3.10) 的极限系统为

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \mu(S^0 - S), \\ \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = 0. \end{cases}$$

此极限系统的平衡点$(S^0, 0, \cdots, 0)$ 显然在 G 内全局渐近稳定. 据定理 2.3.2 可知系统(2.3.10) 的无病平衡点 E_0 在 G 内全局渐近稳定.

2) 容易求得系统(2.3.1)′ 在 E_0 点处的 Jacobi 矩阵为

$$\begin{bmatrix} -\mu & L \\ 0 & D \end{bmatrix},$$

其中 $L = (-\beta_1 S^0 - \beta_2 S^0 \cdots - \beta_n S^0)$，

$$D = \begin{bmatrix} p_1\beta_1 S^0 - (\mu + \nu_1) & p_1\beta_2 S^0 & \cdots & p_1\beta_n S^0 \\ p_2\beta_1 S^0 & p_2\beta_2 S^0 - (\mu + \nu_2) & \cdots & p_2\beta_n S^0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_n\beta_1 S^0 & p_n\beta_2 S^0 & \cdots & p_n\beta_n S^0 - (\mu + \nu_n) \end{bmatrix}.$$

通过具体计算不难得到

$$\det D = (-1)^{n-1} \prod_{i=1}^{n} \frac{\mu + \nu_i}{\beta_i} (R_0 - 1).$$

可见，当 $R_0 > 1$ 时，矩阵 D 至少有一个具正实部的特征根，这说明 E_0 是不稳定的. ▌

进一步我们还可得到关于地方病平衡点 E^* 的下述结论.

定理 2.3.4 $R_0 > 1$ 时，系统(2.3.1)′ 的地方病平衡点 $E^*(S^*, I_1^*, \cdots, I_n^*)$ 在域 G 内全局渐近稳定.

证明思想是先通过变换

$$S = S^*(1 + x), \qquad I_i = I_i^*(1 + y_i), \qquad i = 1, \cdots, n.$$

将(2.3.1)′ 化为关于 x 与 y_i 的方程组. 然后利用 Liapunov 函数法. 这时取 Liapunov 函数为

$$V = V_0 + \sum_{i=1}^{n} V_i,$$

其中 $V_0 = \frac{x^2}{2}, V_i = \frac{\beta_i I_i^*}{\mu + \nu_i}[y_i - \ln(1 + y_i)], \quad i = 1,2,\cdots,n$.(具体推导可参阅文献[12].)

值得注意,在表达式(2.3.4)中 p_i 是染病后成为 I_i 类型病人的概率,$\frac{1}{\mu + \nu_i}$ 是 I_i 类病人的平均患病期,于是 $\beta_i S^0 p_i I \frac{1}{\mu + \nu_i}$ 便是当人群全是易感者(流行初期)S_0 时,感染者 I 中成为 I_i 群体的病人在其平均染病期中所传染的人数.从而 $S^0 \sum_{i=1}^{n} \frac{\beta_i p_i}{\mu + \nu_i} I$,便是所有病人 I 在其平均染病期内对 S_0 的传染人数.所以由(2.3.4)所定义的阈值 R_0 便是一个病人在其平均染病期内对易感者 S_0 的传染人数.也就是基本再生数.

2.3.2 疾病在多个易感群体中传播的 DS-I-A 模型

假设易感者按其免疫力等易感的程度划分为 n 个易感群体 $S_i, i = 1,2,\cdots,n$,患病者 I 不加区分.各易感群体成员有不同的输入,写成 μS_i^0,其中 μ 为自然死亡率,γ 为病人的移出率系数,δ 是自然死亡率系数与因病死亡率系数之和,采用标准发生率.关于易感者群体 S_i 的标准发生率为

$$\frac{\beta I S_i}{N} \alpha_i,$$

其中 α_i 反映了群体 S_i 中的成员易感的程度,于是一个患病者对易感类 S_i 的有效接触率为 $\alpha_i \beta$.因此,相应的 DS-I-A 模型为[11]

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}S_i}{\mathrm{d}t} = \mu(S_i^0 - S_i) - \frac{\beta \alpha_i S_i I}{N}, \\ \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\beta \alpha_k S_k}{N} I - (\mu + \gamma) I, \\ \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \gamma I - \delta A. \end{cases} \tag{2.3.11}$$

$$N = \sum_{i=1}^{n} S_i + I.$$

把模型(2.3.11)中除去最后一个方程后所构成的方程组记作(2.3.11)′.我们可以通过讨论(2.3.11)′的无病平衡点 $E_0(S_1^0, S_2^0, \cdots, S_n^0, 0)$ 的局部稳定性来求得区分疾病流行与否的阈值[13]

$$R_0 = \frac{\beta \sum_{i=1}^{n} \alpha_i S_i^0}{(\mu + \gamma) \sum_{i=1}^{n} S_i^0}, \tag{2.3.12}$$

即当 $R_0 < 1$ 时 E_0 局部渐近稳定,疾病消亡[①];当 $R_0 > 1$ 时 E_0 不稳定,疾病将持续生存.

注意到一个患病者在群体 S_i 中的有效接触率为 $\alpha_i \beta$. 故在初始时刻时($S_i = S_i^0$)一个患病者在各群体 $S_i (i = 1,2,\cdots,n)$ 中的平均有效接触率为

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} \beta \alpha_i S_i^0}{\sum_{i=1}^{n} S_i^0},$$

$\frac{1}{\mu + \gamma}$ 是患病者的平均染病期. 因此,由(2.3.12)所确定的 R_0 就是基本再生数.

对于一般的 $n + 2$ 维 DS-I-A 模型,其无病平衡点的全局稳定性以及地方病平衡点的稳定性均尚未完全解决.

2.3.3 疾病在多个易感群体和染病群体中传播的 DS-DI-DS 模型

一般来说,不同易感群体和不同染病群体之间的接触染病情况可以相当复杂. 下面我们仅考察由各自两个群体所构成的一种比较简单的性传播情况.

假设人群由于基因、免疫系统和性活动等其它因素的不同被分成两个子群体 $k, k = 1,2$, 每一群体中的患病者由于病原体菌株的不同也被分成两个子群体 I_k 与 $J_k, k = 1,2$. 再假设被携带一定菌株的患病者感染的病人具有相同菌株,每一易感者至多只能被一种菌株的病人所感染. r_k 表示 k 类成员的性接触率(单位时间,每个 k 类成员性接触他人的数目),它反映 k 类成员的性活动能力. I_k 与 J_k 分别表示被菌株 I 和 J 所感染的 k 类病人数. 分别称为 k 类 I 型病人和 k 类 J 型病人. 自然死亡率均记为 μ_k. 由于一般性病(艾滋病除外)因病死亡率很低,忽略不记. I_k 与 J_k 的恢复率系数分别记作 γ_k^I 与 γ_k^J.

k 类易感者的输入率为常数,写成 $\mu_k S_k^0$. 于是这个性传播的 DS-DI-DS 模型为

$$\begin{cases} \dot{S}_k = \mu_k (S_k^0 - S_k) - (B_k^I + B_k^J) + \gamma_k^I I_k + \gamma_k^J J_k, \\ \dot{I}_k = B_k^I - (\mu_k + \gamma_k^I) I_k, k = 1,2, \\ \dot{J}_k = B_k^J - (\mu_k + \gamma_k^J) J_k. \end{cases} \tag{2.3.13}$$

不难理解, B_k^I 与 B_k^J 应有以下表达式:

① 严格说需要说明 E_0 全局稳定才能断言疾病消亡.

$$B_k^I = S_k r_{k_i} \beta^I \frac{\sum_{j=1}^{2} r_j I_j}{\sum_{j=1}^{2} r_j T_j}, \quad B_k^J = S_k r_k \beta^J \frac{\sum_{j=1}^{2} r_j J_j}{\sum_{j=1}^{2} r_j T_j}, \tag{2.3.14}$$

其中 $T_k = S_k + I_k + J_k$. β^I 与 β^J 分别表示携带 I 型和 J 型菌株病人的传染概率. 事实上, $\beta^I r_j$ 表示一个 j 类 I 型病人的有效性接触率. 当接触者为进行性活动的易感者时便会传染, 而 k 类易感者进行性活动的人次在总人口进行性活动的人次中所占比例为

$$\frac{S_k r_k}{\sum_{j=1}^{2} r_j T_j}.$$

于是, 采用标准发生率, j 类 I 型病人单位时间对 k 类易感者的传染数量(即发生率), 记作 $f(S_k, I_j)$, 且

$$f(S_k, I_j) = \frac{S_k r_k}{\sum_{j=1}^{2} r_j T_j} \beta^I r_j I_j. \tag{2.3.15}$$

由于两类 I 型病人都可以与 k 类易感者发生性关系, 故(2.3.14) 中的第一式就是携带 I 型菌株的全体 I 型病人对 k 类易感者的发生率.

同理, (2.3.14) 中的第二式就是全体 J 型病人对 k 类易感者的发生率.

模型(2.3.13) 中第一个方程右端的第二项表示, 全体病人对 k 类易感者的发生率(即传染率). 这意味着各种病人与任一类易感者均可能发生性接触从而导致传染. 第一个方程右端的后两项表示 k 类的 I 型和 J 型病人康复后, 都仍成为 k 类易感者.

容易看出, 由于

$$\dot{T}_k = \mu_k (S_k^0 - T_k),$$

从而

$$\lim_{t \to +\infty} T_k(t) = S_k^0, \qquad k = 1, 2.$$

将 $S_k + I_k + J_k = S_k^0$ 代入(2.3.13) 化简后可得系统(2.3.13) 的极限系统是

$$\begin{cases} \dot{I}_k = \sigma_k^I (S_k^0 - I_k - J_k) \sum_{j=1}^{2} r_j I_j - \nu_k^I I_k, \\ \dot{J}_k = \sigma_k^J (S_k^0 - I_k - J_k) \sum_{j=1}^{2} r_j I_j - \nu_k^J J_k, \end{cases} \tag{2.3.16}$$

其中

$$\sigma_k^u = \frac{r_k \beta^u}{\sum_{j=1}^{2} r_j S_j^0}, \nu_k^u = \mu_k + \gamma_k^u, \quad u = I, J.$$

由极限系统的理论可知,(2.3.13) 平衡点的稳定性,等价于(2.3.16) 平衡点的稳定性.

定理 2.3.5[14]　考察系统(2.3.16).令

$$R^u = \frac{\nu_2^u \sigma_1^u S_1^0 r_1 + \nu_1^u \sigma_2^u S_2^0 r_2}{\nu_1^u \nu_2^u} = S_1^0 r_1 \frac{\sigma_1^u}{\nu_1^u} + S_2^0 r_2 \frac{\sigma_2^u}{\nu_2^u}, \quad u = I, J. \tag{2.3.17}$$

(1) 当 $R^I < 1$ 且 $R^J < 1$ 时,无病平衡点 $E_0(0,0,0,0)$ 局部渐近稳定;

(2) 当 $R^I > 1$ 或 $R^J > 1$ 时,E_0 不稳定.

证明　(2.3.17) 关于 E_0 的 Jacobi 矩阵为

$$\begin{bmatrix} Q^I & 0 \\ 0 & Q^J \end{bmatrix},$$

其中

$$Q^u = \begin{bmatrix} -(\nu_1^u - \sigma_1^u S_1^0 r_1) & \sigma_1^u S_1^0 r_2 \\ \sigma_2^u S_2^0 r_1 & -(\nu_2^u - \sigma_2^u S_2^0 r_2) \end{bmatrix}, \qquad u = I, J,$$

$$\det Q^u = \nu_1^u \nu_2^u - \nu_1^u \sigma_2^u S_2^0 r_2 + \nu_2^u \sigma_1^u S_1^0 r_1.$$

显然,当

$$\nu_1^u \nu_2^u > \nu_1^u \sigma_2^u S_2^0 r_2 + \nu_2^u \sigma_1^u S_1^0 r_1 \tag{2.3.18}$$

时有 $\det Q^u > 0$,且 Q^u 的迹为负,故(2.3.18) 对 $u = I$ 与 $u = J$ 均成立时,E_0 局部渐近稳定.不等式(2.3.18) 等价于 $R^u < 1$.

当

$$\nu_1^u \nu_2^u < \nu_1^u \sigma_2^u S_2^0 r_2 + \nu_2^u \sigma_1^u S_1^0 r_1, \tag{2.3.19}$$

对 $u = I$ 或 $u = J$ 成立时,或有 $\det Q^I < 0$ 或有 $\det Q^J < 0$,故 E_0 不稳定.不等式(2.3.19) 等价于 $R^u > 1$.　∎

实际上,我们还可以进一步证明[14]:当条件 $R^I \leqslant 1$ 且 $R^J \leqslant 1$ 时,无病平衡点 E_0 是全局渐近稳定的.

对模型(2.3.13) 的进一步研究可参阅[14].

现在来考察确定疾病消亡与否阈值的 R^u 表达式(2.3.17) 的涵义.

注意到(2.3.15) 式的涵义可知,当初始时刻两类人群均分别为易感者 S_1^0 与 S_2^0 时,一个 j 类的 I 型病人对 k 类易感者的发生率为

$$f(S_k^0, 1) = \frac{S_k^0 r_k}{\sum_{j=1}^{2} r_j S_j^0} \beta^I r_j,$$

于是(2.3.17) 式右端的第一项为

$$S_1^0 r_1 \frac{\sigma_1^u}{\nu_1^u} = \frac{S_1^0 r_1}{\sum_{j=1}^{2} r_j S_j^0} \cdot \beta^u r_1 \cdot \frac{1}{\mu_1 + \gamma_1^u} = f(S_1^0, 1) \frac{1}{\mu_1 + \gamma_1^u},$$

其涵义为当人群均为易感者时，一个1类 u 型病人在其患病期内对1类人群所传染的人数. 从而 R^u 表示当人群均为易感者时，一个1类 u 型病人和一个2类 u 型病人在它们患病期内分别对1类和2类人群所传染人数之和. 所以由(2.3.17)式所定义的 R^u 就是关于 u 型病人的基本再生数.

2.3.4 疾病在种群之间传播的模型

疾病在相互作用种群之间传播规律的研究，是传染病动力学与种群生态学的一种结合. 在这一领域的研究尚为数不多. 现简单地综述如下：

疾病仅在一个种群内传播的捕食模型

1986年文献[15]讨论了一类捕食系统的传染病模型. 该文仅研究了疾病在食饵中流行的简单情况. 其模型为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}=rX-(b+\alpha)Y-c[(1-f)X+Y]P,\\ \dfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}=\beta XY-(b+\alpha)Y-cYP,\\ \dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=\delta HP-\mathrm{d}P,\end{cases}\tag{2.3.20}$$

其中 H 为食饵总量，X 为食饵中易感者数量，Y 为食饵中染病者数量，P 为捕食者总量；r 为食饵的出生率系数，这里假定染病的食饵无生育力；b 与 α 分别为食饵的自然死亡率系数与因病死亡率系数；c 反映捕食者的捕食能力；$f,0\leqslant f\leqslant 1$，体现了捕食者对易感食饵和患病食饵捕获难易的差异；δ 为从捕获的易感和患病食饵到捕食者生育能量的转换系数；d 为捕食者的自然死亡率系数. 这里采用了双线性发生率 βXY.

文献[15]的研究表明，当由于捕食而使食饵总量小于某一阈值 H_T 时，疾病就会消亡；当食饵由于因病死亡而使其总量减少到一定水平时，捕食者将绝灭；此外，疾病还会使共存的两种群出现稳定的极限环(周期振荡).

1995年文献[16]还就标准发生率研究了疾病仅在食饵种群中传播的捕食模型，并得到一些控制种群规模的条件.

2001年文献[17]也研究了疾病仅在食饵种群中传播的捕食模型，但在从食饵转化为捕食者能量的过程中添加了时滞，其模型为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=rS(1-\dfrac{S+I}{K})-\beta SI-p_1SY,\\ \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=\beta SI-cI-p_2IY,\\ \dfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}=-dY+kp_1S(t-\tau)I(t-\tau)+kp_2I(t-\tau)Y(t-\tau),\end{cases}\tag{2.3.21}$$

其中 S 与 I 分别为食饵种群中易感者与染病者的数量；Y 为捕食者数量；K 为环境对食饵种群的容纳量；r 为食饵种群的内禀增长率；c 与 d 分别为患病食饵的死亡率与捕食者的自然死亡率. $p_1 S$ 与 $p_2 I$ 分别为捕食者对易感食饵和患病食饵的功能性反应函数；β 为有效接触率系数. k 为转化系数. 文献[17]研究了正平衡点的局部稳定性，以及时滞所导致的稳定性开关现象和 Hopf 分支形成的周期解.

2002年文献[53]研究了疾病仅在食饵中传播且具有比率功能性反应的模型，证明了 Hopf 分支的存在性和局部稳定性.

疾病在无相互作用的两种群中传播的模型

1985年文献[18]研究了疾病在两种群中直接传播且可交叉感染的模型，但此两种群均无密度制约且不存在相互作用.

1992年文献[19]在文献[18]模型的基础上，对两种群均添加了密度制约因素. 其模型为

$$\begin{cases}\dfrac{dH_1}{dt} = r_1 H_1\left(1 - \dfrac{H_1}{K_1}\right) - \alpha_1 Y_1, \\[2ex] \dfrac{dY_1}{dt} = \beta_{11} X_1 Y_1 + \beta_{12} X_1 Y_2 - \tau_1 Y_1, \\[2ex] \dfrac{dH_2}{dt} = r_2 H_2\left(1 - \dfrac{H_2}{K_2}\right) - \alpha_2 Y_2, \\[2ex] \dfrac{dY_2}{dt} = \beta_{22} X_2 Y_2 + \beta_{21} X_2 Y_1 - \tau_2 Y_2,\end{cases} \tag{2.3.22}$$

其中 $H_i(i = 1,2)$ 为种群 i 的总量 X_i 和 Y_i 分别为第 i 种群中易感者与染病者数量，r_i 为种群 i 的内禀增长率，K_i 为环境对 i 种群的容纳量，α_i 为种群 i 的因病死亡率系数，τ_i 为 i 种群的恢复率、自然死亡率和因病死亡率系数之和，β_{ii} 是种内有效接触系数，$\beta_{ij}(i \neq j)$ 是种间有效接触率系数.

模型(2.3.22)可能存在6个边界平衡点和1个正平衡点. 文献[19]对所有边界平衡点的存在性和局部稳定性进行了研究，但对正平衡点的存在性和稳定性没有给出分析证明，其数值模拟显示，当所有边界平衡点都不稳定时，正平衡点存在且全局稳定.

1995年文献[20]还对上述无相互作用的两种群研究了疾病不是直接传染，而是通过在体外存活的病菌传染的模型.

疾病在两种群中传播的捕食模型

1989 年文献[21]研究了疾病在两种群中均存在的捕食模型.其传染机理是:捕食者由于捕食染病的食饵而感染,而食饵则因接触染病捕食者的排泄物而染病.其模型为

$$
\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}x_0}{\mathrm{d}t} = ax - a\dfrac{x_0 x}{K} - \dfrac{x_0}{A + x_0 + ex_1}y - \beta x_0 y_1, \\[2ex]
\dfrac{\mathrm{d}y_0}{\mathrm{d}t} = -c\dfrac{B}{B + A}y_0 + c\dfrac{x_0 + ex_1}{A + x_0 + ex_1}y - k\dfrac{ex_1}{A + x_0 + ex_1}y_0, \\[2ex]
\dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = \beta y_1 x_0 - \dfrac{ax_1 x}{K} - \dfrac{ex_1}{A + x_0 + ex_1}y, \\[2ex]
\dfrac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t} = -c\dfrac{B}{B + A}y_1 + k\dfrac{ex_1}{A + x_0 + ex_1}y_0,
\end{cases}
\tag{2.3.23}
$$

其中 x_0 与 x_1 分别为食饵种群中易感者与患病者数量;y_0 与 y_1 分别为捕食种群中易感者与患病者数量;$x = x_0 + x_1$ 为食饵总量,$y = y_0 + y_1$ 为捕食者总量;a 为食饵种群的出生率系数,K 为环境对食饵的容纳量;$c\dfrac{B}{B + A}$ 为捕食种群的自然死亡率系数;$\dfrac{x_0}{A + x_0 + ex_1}$ 与 $\dfrac{ex_1}{A + x_0 + ex_1}$ 分别为捕食者对易感食饵和患病食饵的功能性反应函数,常数 $e > 1$ 反映了患病食饵容易被捕捉;常数 c 为食物到捕食者能量的转换系数;k 为易感捕食者吞食染病食饵后的传染系数. $\beta x_0 y_1$ 是染病捕食者对易感食饵的双线性发生率.

文献[21]在对应的二维无病捕食系统分别存在正平衡点和周期解的情况下,分别证明了系统(2.3.23)平衡点和周期解的存在性和局部渐近稳定性,还用数值模拟显示了正平衡点或正周期解是全局渐近稳定的,但未能给出分析证明.

2001 年文献[22]研究了疾病在食饵与捕食者中同时传播的四种模型.它们分别是具有双线性发生率和标准发生的 SIS 模型和 SIR 模型,其传染机理是食饵仅通过种内接触传染,而捕食者不仅通过种内接触传染而且还通过吞食染病食饵传染.在这些模型中密度制约因素既影响着种群的出生率也影响着自然死亡率.下面仅介绍具有标准发生率的下述 SIS 模型.

$$\begin{cases}\dfrac{dS_1}{dt}=(b_1-\dfrac{a_1r_1N_1}{K_1})N_1-[d_1+(1-a_1)\dfrac{r_1N_1}{K_1}]S_1\\ \qquad -aN_2S_1-\beta_1\dfrac{S_1}{N_1}I_1+\gamma_1I_1,\\ \dfrac{dI_1}{dt}=\beta_1\dfrac{S_1I_1}{N_1}-\gamma_1I_1-[d_1+(1-a_1)\dfrac{r_1N_1}{K_1}]I_1-aN_2I_1,\\ \dfrac{dN_1}{dt}=[r_1(1-\dfrac{N_1}{K_1})-aN_2]N_1,\\ \dfrac{dS_2}{dt}=kaN_1N_2-\alpha\dfrac{S_2I_1}{N_2}-d_2S_2-\beta_2\dfrac{S_2I_2}{N_2}+\gamma_2I_2,\\ \dfrac{dI_2}{dt}=\beta_2\dfrac{S_2I_2}{N_2}-d_2I_2+\alpha\dfrac{S_2I_1}{N_2}-\gamma_2I_2,\\ \dfrac{dN_2}{dt}=(kaN_1-d_2)N_2,\end{cases}\tag{2.3.24}$$

其中

$$N_i=S_i+I_i,\quad i=1,2,$$
$$r_1=b_1-d_1>0,\quad 0\leqslant a_1\leqslant 1.$$

在模型(2.3.24)中,食饵种群的密度制约因素按比例 a_1 与 $(1-a_1)$ 分成了两部分,分别影响出生与自然死亡;捕食种群没有考虑密度制约因素. $\beta_i, i=1,2$ 表示种内的有效接触系数;α 表示种间(捕食患病食饵)的有效接触系数.其余系数是容易理解的.

容易看出(2.3.24)实际上可以看作是关于 I_1、N_1、I_2、N_2 的四维系统:

$$\begin{cases}\dfrac{dI_1}{dt}=\beta_1\dfrac{(N_1-I_1)}{N_1}I_1-\gamma_1I_1-[d_1+(1-a_1)\dfrac{r_1N_1}{K_1}]I_1-aN_2I_1,\\ \dfrac{dN_1}{dt}=[r_1(1-\dfrac{N_1}{K_1})-aN_2]N_1,\\ \dfrac{dI_2}{dt}=\beta_2\dfrac{(N_2-I_2)}{N_2}I_2-d_2I_2+\alpha\dfrac{(N_2-I_2)}{N_2}I_1-\gamma_2I_2,\\ \dfrac{dN_2}{dt}=(kaN_1-d_2)N_2,\\ N_i\geqslant I_i\geqslant 0,\quad i=1,2,\qquad 0\leqslant a_1\leqslant 1.\end{cases}\tag{2.3.25}$$

$D=\{I_1,N_1,I_2,N_2)\mid 0\leqslant I_1\leqslant N_1\leqslant K_1, 0\leqslant I_2\leqslant N_2\}$ 是系统(2.3.25)的正向不变集.

系统(2.3.25)有5个边界平衡点和一个正平衡点.文献[22]对各个平衡点的吸引区域进行了全面而完整的分析,得出了保证各平衡点在相应区域中全局

(大范围)稳定与否的阈值.这些结论显示了以下事实:

1) 若捕食种群的能量转化系数 k 足够小,使得捕食种群走向绝灭,则当 $R_0 < 1$ 时,疾病将在食饵种群中消亡;当 $R_0 > 1$ 时则在食饵种群中形成地方病;

2) 若能量转化系数 k 足够大使捕食种群足以持续生存,则当 $R_1 < 1$ 且 $R_2 < 1$ 时,疾病将在两种群中均消亡;当 $R_1 < 1$ 而 $R_2 > 1$ 时疾病在食饵种群中消亡,而在捕食种群中持续生存;当 $R_1 > 1$ 时疾病在两种群中均不会消亡.

其中

$$R_0 = \frac{\beta_1}{\gamma_1 + d_1 - a_1 r_1}, \qquad R_1 = \frac{\beta_1}{\gamma_1 + d_1 + (1 - a_1) r_1 \dfrac{d_2}{kaK_1} + aN_{2E}},$$

$$R_2 = \frac{\beta_2}{d_2 + \gamma_2}, \qquad N_{2E} = \frac{r_1\left(1 - \dfrac{d_2}{kaK_1}\right)}{a}.$$

实际上,不难看出,R_0 与 R_2 分别表示孤立的食饵种群和捕者种群的基本再生数;R_1 是捕食者种群与食饵种群均达到共存的平衡位置时,食饵种群的再生数.

疾病在两竞争种群中传播的模型

最近文献[23]研究了具有双线性或标准发生率且有交叉传染的两竞争种群的 SIS 和 SIRS 四类模型,得到了比较完整的结果.现仅以具标准发生率的 SIS 模型为例作一概述.

设 $N_i = S_i + I_i, i = 1,2$,与(2.3.24),(2.3.25)类似,可建立具有密度制约和交叉感染的竞争种群模型如下:

$$\begin{cases} \dfrac{dI_1}{dt} = \dfrac{N_1 - I_1}{N_1}(\beta_{11} I_1 + \beta_{12} I_2) - \gamma_1 I_1 - \left[d_1 + (1 - a_1)\dfrac{r_1 N_1}{K_1}\right] I_1 - mN_2 I_1, \\ \dfrac{dN_1}{dt} = \left[r_1\left(1 - \dfrac{N_1}{K_1}\right) - mN_2\right] N_1, \\ \dfrac{dI_2}{dt} = \dfrac{N_2 - I_2}{N_2}(\beta_{21} I_1 + \beta_{22} I_2) - \gamma_2 I_2 - \left[d_2 + (1 - a_2)\dfrac{r_2 N_2}{K_2}\right] I_2 - nN_1 I_2, \\ \dfrac{dN_2}{dt} = \left[r_2\left(1 - \dfrac{N_2}{K_2}\right) - nN_1\right] N_2. \end{cases} \tag{2.3.26}$$

其中

$$N_i \geqslant I_i \geqslant 0, \qquad 0 \leqslant a_i \leqslant 1, \quad i = 1,2.$$

容易看出,区域 $D = \{(I_1, N_1, I_2, N_2) \mid 0 \leqslant I_i \leqslant N_i \leqslant K_i, i = 1,2\}$ 是系统(2.3.26)的正向不变集.

此系统可能存在 6 个边界平衡点和一个正平衡点. 文献[23] 对各平衡点存在的条件及其在相应区域内的全局(大范围) 吸引性作了全面完整的讨论.

记

$$\Phi = \frac{r_1}{r_2}, \qquad \Psi_1 = \frac{r_1}{nK_1}, \qquad \Psi_2 = \frac{mK_2}{r_2},$$

$$R_1^* = \frac{\beta_{11}}{\gamma_1 + d_1(1-a_1)r_1}, \qquad R_2^* = \frac{\beta_{22}}{\gamma_2 + d_2(1-a_2)r_2},$$

$$R_3^* = \frac{\beta_{12}\beta_{21}}{(\Lambda_1 - \beta_{11})(\Lambda_2 - \beta_{22})},$$

$$\Lambda_i = \gamma_i + [d_i + (1-a_i)\frac{r_i N_{iE}}{K_1}] + mN_{jE}, \qquad i,j = 1,2, \quad i \neq j.$$

(N_{1E}, N_{2E}) 是方程组

$$\begin{cases} r_1\left(1 - \dfrac{N_1}{K_1}\right) - mN_2 = 0, \\ r_2\left(1 - \dfrac{N_2}{K_2}\right) - nN_1 = 0 \end{cases}$$

的正解. 文献[23] 的研究结果表明:

1) 当 $\Phi < \min\{\Psi_1, \Psi_2\}$ 时,种群 1 走向绝灭,种群 2 持续生存. 此时,若 $R_2^* < 1$,则种群 2 中疾病消亡;若 $R_2^* > 1$,则种群 2 中疾病持续生存.

2) 当 $\Phi > \max\{\Psi_1, \Psi_2\}$ 时,种群 2 走向绝灭,而种群 1 持续生存. 此时,若 $R_1^* < 1$,则种群 1 中疾病消亡;若 $R_1^* > 1$,则种群 1 中疾病持续生存.

因此,R_1^* 与 R_2^* 相当于单种群传染病模型中疾病消亡与否的阈值.

3) $\Psi_2 < \Phi < \Psi_1$(或 $\Psi_1 < \Phi < \Psi_2$),$\Lambda_1 - \beta_{11} > 0, \Lambda_2 - \beta_{22} > 0$ 时,两种群将持续共存. 此时,若交叉感染存在,即 $\beta_{ij} > 0(i \neq j)$,当 $R_3^* > 1$ 时正平衡点存在且大范围渐近稳定,形成地方病;若 $R_3^* < 1$,则两种群中疾病均会消亡.

当 $\Lambda_1 - \beta_{11} < 0, \Lambda_2 - \beta_{22} < 0$ 时,无论是否存在交叉感染,疾病均不会消亡.

由上述结论 3) 可见,当系统中存在交叉感染且疾病流行时,通过切断交叉感染或减少交叉感染系数 $\beta_{ij}(i \neq j)$ 使 $R_3^* < 1$,便可使疾病在两种群中消亡.

§2.4　非自治传染病动力学模型

前面所介绍的模型都是自治系统,即假定了模型中所有的系数都是常数. 这在系数变化不显著时是合理的假定. 然而,有时模型的某些系数可能随时间有较明显的变化. 例如种群的输入率(包括出生)、死亡率、恢复率,以及患病者的有效接触率等系数都可能随季节或更一般地随时间而变化. 这时就需要研究具有时

变系数的传染病模型,即非自治的传染病模型.

由于非自治系统没有平衡点,相应的问题是周期解的存在性与稳定性.非自治系统的解,一般说来,在 $t \to +\infty$ 时其极限不一定存在,故需要考察其上下极限.这时人们所关心的疾病能否消亡问题,就是讨论当 $t \to +\infty$ 时患病者人数 $I(t)$ 是否趋于零?或者说是否持续生存?

定义 2.4.1 对于 n 维自治系统

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(t,x), \quad f: I \times D \subseteq R \times R_+^n \to R_+^n, \tag{2.4.1}$$

R_+^n 是 n 维空间的正锥体,$\{(x_1,\cdots,x_n) \mid x_i \geqslant 0, i = 1,2,\cdots,n\}$.$f$ 满足解的存在惟一性条件.其解 $x = x_i(t,x^0)$ 的存在区间为 $I = [0,+\infty)$. $\forall x^0 \in D$, $x_i(t,x^0) \geqslant 0,\ i = 1,2,\cdots,n$.

1) 若 $\exists i$,使 $\lim\limits_{t\to+\infty} x_i(t,x^0) = 0$,则称 $x_i(t,x^0)$ 走向绝灭;

2) 若 $\exists i$,使 $\limsup\limits_{t\to+\infty} x_i(t,x^0) > 0$,则称 $x_i(t,x^0)$ 弱持续生存;

3) 若 $\exists i$,使 $\limsup\limits_{t\to+\infty} \dfrac{\int_0^t x_i(u,x^0)\mathrm{d}u}{t} > 0$,则称 $x_i(t,x^0)$ 弱平均持续生存;

4) 若 $\exists i$,使 $\limsup\limits_{t\to+\infty} x_i(t,x^0) > 0$,但 $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{\int_0^t x_i(u,x^0)\mathrm{d}u}{t} = 0$,则称 $x_i(t,x^0)$ 勉强持续生存;

5) 若 $\exists i$,使 $\liminf\limits_{t\to+\infty} \int_0^t x_i(u,x^0)\mathrm{d}u > 0$,则称 $x_i(t,x^0)$ 强持续生存;

6) 若存在 i 和与 x^0 无关的正数 δ_i,使 $\liminf\limits_{t\to+\infty} x_i(t,x^0) \geqslant \delta_i$,则称 $x_i(t,x^0)$ 一致持续生存.

下面我们对一个相当一般的非自治 SIR 模型来讨论疾病消亡与否的阈值[24].设有下述一般形式的 SIR 模型:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = N(t)B(t,N) - \alpha(t,N)I(t), \\ \dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = N(t)f(t,N) - g(t,N)S(t) - \Phi^*(t,S,I,N), \\ \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \Phi^*(t,S,I,N) - [g(t,N) + \gamma(t,N) + \alpha(t,N)]I(t), \\ \dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = \gamma(t,N)I(t) - g(t,N)R(t). \end{cases} \tag{2.4.2}$$

$$N(t) = S(t) + I(t) + R(t),$$

其中 $B(t,N) = f(t,N) - g(t,N)$ 表示种群 N 的出生率系数与自然死亡率系

数之差. $\Phi^*(t,S,I,N)$ 是疾病的发生率, $\gamma(t,N)$ 是恢复率系数, $\alpha(t,N)$ 是因病死亡率系数. 它们都是种群数量 N 和时间 t 的函数且满足以下基本假设:

1) $f,g:R^2 \to R$, 对一切 $N \geqslant 0$ 连续, 有界且有正下界;

2) f 对 N 连续可微且 $\dfrac{\partial f}{\partial N} \leqslant 0$;

3) $\exists \varepsilon > 0$ 与 $\bar{N} > \varepsilon$, 使 $B(t,0) \geqslant \varepsilon > 0, B(t,\bar{N}) < 0$;

4) B 对 N 连续可微且 $\exists \delta_1 > 0$ 使对 $\forall N \geqslant 0$ 有 $\dfrac{\partial B}{\partial N} \leqslant -\delta_1 < 0$;

5) Φ^* 连续可微, $\dfrac{\partial \Phi^*}{\partial I} > 0$, 对任意正的 S,I,N, Φ^* 关于一切 t 有界且有正下界;

6) $\Phi^*(t,0,I,N) = \Phi^*(t,S,0,N) = 0$;

7) $\dfrac{\partial \Phi^*}{\partial S} > 0$, 且对 $\forall K,\varepsilon, 0 < \varepsilon < K, \exists M > 0$, 使当 $0 \leqslant S \leqslant K, 0 \leqslant I \leqslant K, \varepsilon \leqslant N \leqslant K$ 时有 $\dfrac{\partial \Phi}{\partial S} < M$;

8) $\gamma,\alpha:R^2 \to R$ 是 Lipschitz 连续, 对 $\forall N \geqslant 0$, 关于 t 有界且有正下界.

上述 8 个条件看起来似乎很多限制, 其实是适用于很广泛类型的函数和疾病发生率. 例如对于时变系数的 Logistic 方程

$$\frac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t} = a(t)N(t)\left[1 - \frac{N(t)}{K(t)}\right],$$

只需假设 $a(t)$ 连续有正下界, $k(t)$ 连续有上界, 则条件 1) ~ 4) 均满足. 标准发生率

$$\Phi^* = \beta(t)\frac{SI}{N}$$

以及推广的双线性与饱和发生率

$$\Phi^* = \beta(t)S^pI^q, \qquad \Phi^* = \beta(t)\frac{S^pI^q}{1+I^q},$$

只要 $p \geqslant 1, q > 0, \beta(t)$ 连续有界且有正下界, 则条件 5) ~ 7) 均满足.

由于种群的输入(出生)是指数形式的, 我们作规一化变换, 令

$$x(t) = \frac{S(t)}{N(t)}, \qquad y(t) = \frac{I(t)}{N(t)}, \qquad z(t) = \frac{R(t)}{N(t)},$$

模型(2.4.2)变为

$$\begin{cases} \dot{N} = N(t)[B(t,N) - \alpha(t,N)y(t)], \\ \dot{x} = f(t,N)[1 - x(t)] - \Phi(t,x,y,N) + \alpha(t,N)x(t)y(t), \\ \dot{y} = \Phi(t,x,y,N) - [f(t,N) + \gamma(t,N) + \alpha(t,N)]y(t) + \alpha(t,N)y^2(t), \\ \dot{z} = \gamma(t,N)y(t) - f(t,N)z(t) + \alpha(t,N)z(t)y(t), \end{cases} \tag{2.4.3}$$

其中 $x(t)+y(t)+z(t)\equiv 1,\Phi(t,x,y,N)=\dfrac{1}{N}\Phi^*(t,xN,yN,N)$.

条件 5),6),7) 相应地变为

5′) Φ 连续可微,$\Phi_y>0$,对任意正的 x,y,N,Φ 关于 t 有界且有正下界;

6′) $\Phi(t,x,0,N)=\Phi(t,0,y,N)=0$;

7′) $\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}>0$, 且对 $\forall K>0,\varepsilon>0,\varepsilon<K,\exists M>0$ 使当 $0\leqslant x\leqslant 1$, $0\leqslant y\leqslant 1,\varepsilon\leqslant N\leqslant K$ 时有 $\dfrac{\partial\Phi}{\partial x}<M$.

定理 2.4.1 对于任一 $x_0>0$,系统(2.4.3)过初值(t_0,x_0)的解分量 $x(t)=x(t,t_0,x_0)$ 必满足

$$\limsup_{t\to+\infty}x(t)>0.$$

证明 用反证法. 设 $\exists x_0$ 使 $\limsup\limits_{t\to+\infty}x(t)=0$. 由于易知对一切 $t\geqslant 0, x(t)>0$,故 $\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=0$,由微分中值定理可知

$$\Phi(t,x,y,N)-\Phi(t,0,y,N)=\frac{\partial\Phi}{\partial x}(t,\bar{x},y,N)x,\quad 0\leqslant\bar{x}\leqslant x.$$

由条件 7′) 与 6′) 知

$$\Phi(t,x(t),y(t),N(t))\leqslant Mx(t),$$

故

$$\lim_{t\to+\infty}\Phi(t,x(t),y(t),N(t))=0.$$

从而, $\forall\varepsilon>0,\exists T>t_0$ 使得对一切 $t>T$ 有

$$\Phi(t,x(t),y(t),N(t))\leqslant\varepsilon.$$

由系统(2.4.3) 的第 3 个方程知

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}&=\Phi(t,x,y,N)-[f(t,N)+\gamma(t,N)]y-\alpha(t,N)(1-y)y\\&\leqslant\varepsilon-[f(t,N)+\gamma(t,N)]y(t),\quad t>T.\end{aligned}$$

由条件 1) 和 8),$f(t,N)+\gamma(t,N)$ 有正下界,记作 m,于是

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\leqslant\varepsilon-my(t),\qquad t>t. \tag{2.4.4}$$

解之得

$$y(t)\leqslant\frac{\varepsilon}{m}-\left(\frac{\varepsilon}{m}-y_0\right)\mathrm{e}^{-m(t-t_0)},\quad t>T.$$

由于 $\varepsilon>0$ 可任意小,从而

$$\lim_{t\to+\infty}y(t)=0. \tag{2.4.5}$$

再考察(2.4.3) 的第 4 个方程

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \gamma(t,N)y(t) - [f(t,N) - \alpha(t,N)y(t)]z(t).$$

设 $f(t,N)$ 的正下界为 f_*，$\alpha(t,N)$ 与 $\gamma(t,N)$ 的上界分别为 α^*,γ^*. 由 (2.4.5) 式可知，$\forall \varepsilon > 0, \varepsilon < \frac{f_*}{2\alpha^*}$，$\exists T_1 > t_0$ 使得当 $t > T_1$ 时有 $y(t) < \varepsilon$，从而

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \leqslant \gamma^* \varepsilon - \frac{f_*}{2} z(t).$$

与不等式(2.4.4)类似，可知 $\lim\limits_{t\to+\infty} z(t) = 0$. 因此，

$$\lim_{t\to+\infty}[x(t) + y(t) + z(t)] = 0.$$

这与 $x(t) + y(t) + z(t) \equiv 1$ 矛盾. 所以

$$\limsup_{t\to+\infty} x(t) > 0. \qquad \blacksquare$$

定理 2.4.1 告诉我们，易感者在总人口中的比例 $x(t)$ 不可能趋向于零，至少是弱持续生存的. 由定理 2.4.1 的证明还可看到，只要染病者的比例 $\frac{I(t)}{N(t)} = y(t) \to 0$，必有移出者的比例 $\frac{R(t)}{N(t)} = z(t) \to 0$. 所以关键在于讨论染病者的比例 $y(t)$ 是否趋向于零?下面我们将致力于寻找疾病消亡与否的条件.

由于模型(2.4.3)的前三个方程中不含有 z，故我们只需讨论由前三个方程所构成的系统

$$\begin{cases} \dot{N} = N(t)[B(t,N) - \alpha(t,N)y(t)], \\ \dot{x} = f(t,N)[1 - x(t)] - \Phi(t,x,y,N) + \alpha(t,N)x(t)y(t), \\ \dot{y} = \Phi(t,x,y,N) - [f(t,N) + \gamma(t,N) + \alpha(t,N)]y(t) + \alpha(t,N)y^2(t). \end{cases} \tag{2.4.6}$$

注意到 $\Phi(t,x,0,N) = 0$，显见 $(N^*(t),1,0)$ 是(2.4.6)的一组解，其中 $N^*(t)$ 是方程

$$\dot{N} = N(t)B(t,N) \tag{2.4.7}$$

的任一正解.

引理 2.4.1　考察方程(2.4.7).

1) 存在 $\delta > 0$ 与 $T \geqslant t_0$，使得对一切 $t > T$ 有 $S \leqslant N(t) \leqslant \overline{N}$ 成立，其中 $N(t)$ 是(2.4.7)的正解，$\overline{N}$ 为一常数，适合 $B(t,\overline{N}) < 0$；

2) 设 $N_1(t), N_2(t)$ 为方程(2.4.7)的任意两正解，则必有

$$\lim_{t\to+\infty}[N_1(t) - N_2(t)] = 0. \tag{2.4.8}$$

证明　1) 由条件(3)与(4)可知

$$\left.\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}\right|_{N\geqslant\overline{N}} \leqslant \overline{N}B(t,\overline{N}) < 0.$$

故 $\exists T_1 \geqslant t_0$,使得当 $t \geqslant T_1$ 时有 $N(t) \leqslant \overline{N}$.

另一方面,由条件(3),$\exists \varepsilon > 0$ 使 $B(t,0) \geqslant \varepsilon$.由于 $B(t,N)$ 关于 N 单调减少,故 $\exists \delta > 0$,使得当 $0 \leqslant N \leqslant \delta$ 时有 $B(t,N) \geqslant B(t,\delta) > \frac{\varepsilon}{2}$.于是当 $0 < N \leqslant \delta$ 时,有

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = N(t)B(t,N(t)) \geqslant N(t)B(t,\delta) \geqslant \frac{\varepsilon}{2}N(t).$$

所以,$\exists T_2 \geqslant t_0$,使得当 $t \geqslant T_2$ 时有 $N(t) \geqslant \delta$.

取 $T = \max\{T_1, T_2\}$,当 $t \geqslant T$ 时有

$$\delta \leqslant N(t) \leqslant \overline{N}.$$

2) 由解的惟一性定理知,$N_1(t) \neq N_2(t), \forall t \geqslant 0$. 不妨假设 $N_1(t) > N_2(t)$,将它们分别代入方程(2.4.7),相减可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\ln N_1(t) - \ln N_2(t)] + B(t,N_2(t)) - B(t,N_1(t)) = 0.$$

积分得

$$\ln N_1(t) - \ln N_2(t) + \int_{t_0}^{t} [B(u,N_2(u)) - B(u,N_1(u))]\mathrm{d}u$$
$$= \ln N_1(t_0) - \ln N_2(t_0).$$

注意到 $N_1(t) > N_2(t)$,可得

$$\int_{t_0}^{+\infty} [B(t,N_2(t)) - B(t,N_1(t))]\mathrm{d}t \leqslant \ln N_1(t_0) - \ln N_2(t_0) < +\infty.$$

由条件(4) 易知 $B(t,N_2(t)) - B(t,N_1(t)) > 0$,且一致连续,从而

$$\lim_{t\to+\infty}[B(t,N_2(t)) - B(t,N_1(t))] = 0.$$

再由 $B(t,N)$ 关于 N 的单调性,可知

$$\lim_{t\to+\infty}[N_1(t) - N_2(t)] = 0.$$ ▌

定义 2.4.2[25] 设有函数列 $\{f_i(t)\}, i = 1,2,\cdots,n$.若对任意 $i \neq j$,存在相应的正常数 a,d(可能与 i,j 有关)使

$$\int_s^t [f_i(\tau) - f_j(\tau)]\mathrm{d}\tau \geqslant a(t-s) - d \qquad (\text{或} \leqslant -a(t-s)+d)$$

对一切 $t \geqslant s$ 成立,则称函数列 $\{f_i(t)\}$ **彼此积分无关**.

引理 2.4.2[25] 设有方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = A(t)x, \qquad x \in D \subset R^n, \qquad A(t) = (a_{ij}(t))_{n\times n}$$

为一三角矩阵函数,$t \in [0,+\infty)$.若 $A(t)$ 对角线元素列 $\{a_{ii}\}, i = 1,2,\cdots,n$,彼此积分无关,则此对角线元素就是方程互异的特征根.此时微分方程可通过适

当线性变换化为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = B(t)y,$$

其中矩阵 $B(t)$ 是由特征根构成的对角矩阵.

定理 2.4.2[24]　考察系统(2.4.6),令

$$R(t) = \frac{\partial \Phi}{\partial y}(t,1,0,N^*(t)) - [f(t,N^*(t)) + \gamma(t,N^*(t)) + \alpha(t,N^*(t))], \tag{2.4.9}$$

$$\bar{R} = \limsup_{t\to+\infty} \frac{1}{t-t_0}\int_{t_0}^{t} R(u)\mathrm{d}u, \tag{2.4.10}$$

其中 $N^*(t)$ 是方程(2.4.7) 的任一正解.

1) 若 $\bar{R} > 0$, 则$\limsup\limits_{t\to+\infty} y(t) > 0$,即 $y(t)$ 弱持续生存;

2) 若 $\bar{R} < 0$, 则(2.4.6) 的解$(N^*(t),1,0)$ 是局部渐近稳定的.

证明　首先我们证明 $\bar{R}$ 与方程(2.4.7) 的正解 $N^*(t)$ 的选择无关.

设 $N_1(t)$ 与 $N_2(t)$ 是方程(2.4.9) 的任意两正解,将 $N_1(t)$ 与 $N_2(t)$ 分别代入(2.4.9) 式,得

$$R_1(t) = \Phi_y(t,1,0,N_1(t)) - [f(t,N_1(t)) + \gamma(t,N_1(t)) + \alpha(t,N_1(t))],$$

$$R_2(t) = \Phi_y(t,1,0,N_2(t)) - [f(t,N_2(t)) + \gamma(t,N_2(t)) + \alpha(t,N_2(t))].$$

由(2.4.8) 式与基本假设易知

$$\lim_{t\to+\infty}[R_1(t) - R_2(t)] = 0,$$

从而

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t-t_0}\int_{t_0}^{t} [R_1(u) - R_2(u)]\mathrm{d}u = 0.$$

设

$$\frac{1}{t-t_0}\int_{t_0}^{t} R_1(u)\mathrm{d}u - \frac{1}{t-t_0}\int_{t_0}^{t} R_2(u)\mathrm{d}u = \delta(t), \quad \delta(t)\to 0, t\to+\infty.$$

从而

$$\frac{1}{t-t_0}\int_{t_0}^{t} R_1(u)\mathrm{d}u = \frac{1}{t-t_0}\int_{t_0}^{t} R_2(u)\mathrm{d}u + \delta(t).$$

两端取上极限得

$$\bar{R}_1 = \bar{R}_2.$$

这说明 $\bar{R}_1$ 不依赖于方程(2.4.7) 正解的选取.

现在,我们来证明定理的结论. 系统(2.4.6) 关于$(N^*(t),1,0)$ 的线性近似系统的系数矩阵为

$$A(t)=\begin{bmatrix} N^*B_N(t,N^*)+B(t,N^*) & 0 & N^*\alpha(t,N^*) \\ \Phi_N(t,1,0,N^*) & -f(t,N^*)+\Phi_x(t,1,0,N^*) & -\Phi_y(t,1,0,N^*)+\alpha(t,N^*) \\ \Phi_N(t,1,0,N^*) & \Phi_x(t,1,0,N^*) & R(t) \end{bmatrix}.$$

由于 $\Phi(t,1,0,N)\equiv 0$,故有

$$\Phi_x(t,1,0,N)=\Phi_N(t,1,0,N)\equiv 0.$$

于是

$$A(t)=\begin{bmatrix} N^*B_N(t,N^*)+B(t,N^*) & 0 & N^*\alpha(t,N^*) \\ 0 & -f(t,N^*) & -\Phi_y(t,1,0,N^*)+\alpha(t,N^*) \\ 0 & 0 & R(t) \end{bmatrix},$$

其中 $A(t)$ 是一上三角矩阵.在我们的基本假设下,容易验证,它的对角线元素是相互积分无关的.于是由引理 2.4.2,可通过适当线性变换将(2.4.6) 关于 $(N^*(t),1,0)$ 的线性近似系统变为

$$\begin{cases} \dot{x}_1=[N^*(t)B_N(t,N^*(t))+B(t,N^*(t))]x_1(t), \\ \dot{x}_2=-f(t,N^*(t))x_2(t), \\ \dot{x}_3=R(t)x_3(t). \end{cases} \tag{2.4.11}$$

因此,系统(2.4.6)的解 $(N^*(t),1,0)$ 的局部稳定性问题就化为系统(2.4.11) 零解的稳定性问题.

注意到 $N^*(t)$ 满足方程(2.4.7) 与 $N(t)\geqslant\delta$,再由条件(4),我们有

$$\begin{aligned} &\int_{t_0}^{t}[N^*(u)B_N(u,N^*(u))+B(u,N^*(u))]\mathrm{d}u \\ &=\int_{t_0}^{t}N^*(u)B_N(u,N^*(u))\mathrm{d}u+\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}\ln N^*(t) \\ &\leqslant -\delta_1\delta(t-t_0)+\ln N^*(t)-\ln N^*(t_0). \end{aligned}$$

于是由(2.4.11) 的第一个方程知,当 $t\to+\infty$ 时 $x_1(t)\to 0$.

据条件(1) 知 $f(t,N^*(t))$ 有正上界,故由(2.4.11) 的第二个方程可知当 $t\to+\infty$ 时 $x_2(t)\to 0$.

因此,系统(2.4.11) 零解的稳定性取决于 $\bar{R}$ 的正负号.当 $\bar{R}<0$ 时局部渐近稳定,当 $\bar{R}>0$ 时不稳定. ▎

应当指出模型(2.4.6) 从而(2.4.3) 疾病消亡与否的阈值之所以能得出,得益于这类模型相应的 Jacobi 矩阵是一三角阵.对不具备这一特点的非自治传染病模型,阈值的获得尚未解决,稳定性的讨论也是一个比较困难的问题.

还应指出,$\bar{R}=0$ 仅是系统(2.4.6) 的解$(N^*(t),1,0)$ 局部稳定与否的阈值.$\bar{R}<0$ 仅保证了在$(N^*(t),1,0)$ 邻近患病比例很小时,疾病会逐渐消亡;当患病者比例较大时的情况不得而知.换句话说,$\bar{R}>0$ 并不能保证解$(N^*(t),1,0)$ 的全局稳定性.这一结论可从以下特例中看出.

例　考虑自治系统

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = B[N(t)]N(t),\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 1 - x - x(y + 20y^2),\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x(y + 20y^2) - 2y.\end{cases} \tag{2.4.12}$$

设 $B(0) > 0, B_N < 0$ 且 $\exists \bar{N}$ 使$B(\bar{N}) < 0$,容易看出,(2.4.12) 的第一个方程存在正平衡位置 N^*,且它全局渐近稳定.

对比模型(2.4.6),这里 $\alpha(t,N) \equiv 0, f(t,N) = \gamma(t,N) \equiv 1, \Phi(t,x,y,N) = x(y + 20y^2)$.而

$$R(t) = \Phi_y(1,0) - (f + \gamma) = -1, \qquad \bar{R} = -1 < 0.$$

据定理2.4知,平衡点$(N^*,1,0)$是局部渐近稳定的.但它却并不全局稳定,因为由(2.4.12) 的后两个方程容易看出(2.4.12) 尚有两个正平衡点.　▌

如果不考虑因病死亡率,那么我们可以进一步得到疾病全局消失与否的阈值.此时,$\alpha(t,N) \equiv 0$,假设已知方程(2.4.7) 的一个正解 $N^*(t)$.于是模型(2.4.6)可简化为

$$\begin{cases}\dot{x} = f(t)[1 - x(t)] - \Phi(t,x,y),\\ \dot{y} = \Phi(t,x,y) - [f(t) + \gamma(t)]y(t).\end{cases} \tag{2.4.13}$$

其中 $f(t) = f(t,N^*(t)), \gamma(t) = \gamma(t,N^*(t)), \Phi(t,x,y) = \Phi(t,x,y,N^*(t))$.

定理 2.4.3[24]　令　$R(t) = \Phi_y(t,1,0) - [f(t) + \gamma(t)]$,

$$\bar{R} = \limsup_{t\to+\infty} \frac{\int_{t_0}^{t} R(u)\mathrm{d}u}{t - t_0}.$$

设

$$\Phi(t,1,y) \leqslant y\Phi_y(t,1,0). \tag{2.4.14}$$

1) 当 $\bar{R} < 0$ 时,对(2.4.13) 的任一正解 $y(t)$ 有

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0, \qquad \text{疾病消亡}.$$

2) 当 $\bar{R} > 0$ 时,系统(2.4.13) 的零解不稳定.疾病持续.

证明　$\bar{R} > 0$结论是定理2.4 的特例.故只需证明 $\bar{R} < 0$ 情形.注意到$0 < x(t) \leqslant 1$,由基本假设(7′) 可知

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln y(t) &= \frac{\dot{y}(t)}{y} = \frac{\Phi(t,x,y)}{y} - [f(t) + \gamma(t)]\\ &\leqslant \frac{\Phi(t,1,y)}{y} - [f(t) + \gamma(t)]\end{aligned}$$

$$< \Phi_y(t,1,0) + \varepsilon - [f(t) + \gamma(t)].$$
$$= R(t) + \varepsilon,$$

其中 ε 为任意小的正数.

积分得

$$y(t) < y(t_0)e^{\int_{t_0}^{t}(R(u)+\varepsilon)du}.$$

当 $\bar{R} < 0$ 时,可取 ε 足够小使当 $t \gg 1$ 时有

$$y(t) < y(t_0)e^{\frac{\bar{R}}{2}(t-t_0)},$$

从而

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0, \qquad \forall\, y(t_0) > 0.$$ ▌

应当指出,条件(2.4.14)是比较容易满足的.例如

$$\Phi(t,x,y) = \Psi(t,x)y,$$

其中 $\Psi(t,x)$ 表示在 t 时刻当易感者数为 x 时一个病人的传染率(单位时间内传染的个体数).由基本假设(7′)知

$$\Psi(t,x) \leqslant \Psi(t,1).$$

注意到 $\Phi_y(t,1,0) = \Psi(t,1)$,条件(2.4.14)显然满足.所以定理2.4.5实际上是对相当广泛的一些类型的发生率获得了疾病全局消亡与否的阈值.

再生数

在 $R(t)$ 的表达式(2.4.9)中令

$$A(t) = \frac{1}{t-t_0}\int_{t_0}^{t}\Phi_y(u,1,0,N^*(u))du, \tag{2.4.15}$$

$$B(t) = \frac{1}{t-t_0}\int_{t_0}^{t}[f(u,N^*(u)) + \gamma(u,N^*(u)) + \alpha(u,N^*(u))]du, \tag{2.4.16}$$

从而(2.4.10)式可写成

$$\bar{R} = \limsup_{t\to+\infty}[A(t) - B(t)].$$

若 $\lim\limits_{t\to+\infty} A(t)$ 或 $\lim\limits_{t\to+\infty} B(t)$ 存在,则

$$\bar{R} = \limsup_{t\to+\infty} A(t) - \liminf_{t\to+\infty} B(t).$$

此时,令

$$R_0 = \frac{\limsup\limits_{t\to+\infty} A(t)}{\liminf\limits_{t\to+\infty} B(t)}. \tag{2.4.17}$$

当 $R_0 < 1$ 时有 $\bar{R} < 0$,从而 $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = 0$;

当 $R_0 > 1$ 时有 $\bar{R} > 0$,从而 $\limsup\limits_{t\to+\infty} y(t) > 0$.

所以 $R_0 = 1$ 是区分疾病消亡与否的阈值.

下面来解释 R_0 的实际涵义. 注意到

$$\begin{aligned}\Phi(t,x,y,N^*) &= \Phi(t,x,y,N^*) - \Phi(t,x,0,N^*)\\ &= \frac{\partial \Phi}{\partial y}(t,x,\bar{y},N^*)y, \quad 0 < \bar{y} < y,\end{aligned}$$

故

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y}(t,x,\bar{y},N^*) = \frac{\Phi(t,x,\bar{y},N^*)}{y} = \frac{\Phi^*(t,S,\bar{I},N)}{I}.$$

由于 Φ^* 表示疾病的发生率,故 $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$ 表示一个患病者在单位时间内传染的个体数. 从而(2.4.15) 中的 $A(t)$ 表示当人群中全为易感者时在各时刻 t 的患病者能传染人数的平均值. 在(2.4.16) 的 $B(t)$ 中如果将出生率系数 f 替换成自然死亡系数 d,那么 B 将替换成

$$\widetilde{B} = \frac{1}{t-t_0}\int_{t_0}^{t}[f(u,N^*(u)) + \gamma(u,N^*(u)) + \alpha(u,N^*(u))]\mathrm{d}u,$$

这显然是在各时刻 t 患病者的平均患病期. 若将 $\widetilde{B}$ 替换(2.4.17) 中的 B,则所得的 $\widetilde{R}_0$ 显然可看作是自治模型中基本再生数的推广. 与(1.2.8)、(1.2.9) 对照可见,由(2.4.17) 所表示阈值 R_0 可以看作是自治模型中修正再生数(当人群均为易患者时的修正接触数) 在非自治模型中的推广. 事实上,在模型(2.4.2) 中若令 $\Phi^* = \frac{\beta SI}{N}$, f, g, α, γ 均为常数,则(2.4.3) 退化为一自治的具有指数出生和标准发生率的 SIS 模型. 这时

$$\Phi(t,x,y,N) = \frac{\Phi^*(t,xN,xy,N)}{N} = \beta xy, \qquad \Phi_y(t,1,0,N^*) = \beta,$$

于是 $A(t) = \beta, B(t) = f + \gamma + \alpha$,从而

$$R_0 = \frac{\beta}{f+\gamma+\alpha},$$

这正是由(1.2.8) 式所表达的修正接触数 θ.

§2.5　具有脉冲的传染病模型

在前面所讨论的模型中,我们总是假定种群的出生率或为一常数,或与当时种群的个体数量成正比(指数出生). 总之,都是假定种群每时每刻都有出生. 这一假定对那些个体数量大且世代重叠的种群一般说来是合理的,但对有些动物(例如某些海洋动物) 来说,它们总是在每年的特殊月份中生育后代. 换句话说,其出生率并不是时间的连续函数,而是以脉冲形式出现的. 另外,为控制传染病的流行而注射某些疫苗,也往往是在每年一定时间内进行的. 也是一种脉冲形

式.因此,在上述两种情况下,用脉冲微分方程描述种群的增长和疾病传染的规律更加符合客观实际.

2.5.1 脉冲微分方程的基本概念

脉冲微分方程是对在一系列固定时刻发生快速变化或跳跃的运动规律的描述,是对某些客观现象更真实的反映,在科学技术领域有着广泛的应用.20 世纪 80 年代以来,其基本理论已有很大发展,一般脉冲微分方程的定性理论也基本完善.若按脉冲时间来划分,有固定时刻和非固定时刻两类脉冲方程;若按方程类型划分,有脉冲常微分方程、脉冲时滞微分方程、脉冲积分方程等.下面仅以固定时刻的脉冲常微分方程为例介绍有关基本概念,有兴趣的读者可进一步参阅[26,27].

脉冲微分方程及其解

固定时刻的脉冲常微分方程一般可表示为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f(t,x), & t\neq\tau_k,\ k=1,2,\cdots,\\ \Delta x_k=I_k(x(\tau_k)), & t=\tau_k,\\ x(t_0)=x_0,\end{cases}\tag{2.5.1}$$

其中 $f\in C[R\times R^n,R^n]$ 且满足局部 Lipschitz 条件,$I_k\in C[R^n,R^n]$,$\Delta x_k=x(\tau_k^+)-x(\tau_k)$,$x_0\in R^n$,$x(\tau_k^+)=\lim\limits_{h\to0^+}x(\tau_k+h)$.

定义 2.5.1 设 $t_0<\tau_1<\tau_2<\cdots$,$x(t)$ 称为是方程(2.5.1)的解,如果下列条件满足:

1) 当 $t\neq\tau_k$ 时,$x(t)$ 满足微分方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f(t,x);$$

2) 当 $t=\tau_k$ 时,$x(t)$ 产生跳跃,且满足

$$\begin{cases}x(\tau_k^-)=x(\tau_k), \quad x(\tau_k^-)=\lim\limits_{h\to0^-}x(\tau_k+h),\\ x(\tau_k^+)=x(\tau_k)+\Delta x_k=x(\tau_k)+I_k(x(\tau_k))\equiv\varphi_k(x(\tau_k));\end{cases}$$

3) 当 $t_0\leqslant t\leqslant\tau_1$ 时,$x(t)$ 是下列初值问题的解

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f(t,x),\\ x(t_0)=x_0;\end{cases}$$

4) 当 $t>\tau_k$ 时,$x(t)$ 是下列初值问题的解

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f(t,x), & \tau_k<t\leqslant\tau_{k+1},\\ x(\tau_k)=x(\tau_k^+), & k=1,2,\cdots,\end{cases}$$

即以在 τ_k 处跳跃后的值 $x(\tau_k^+)$ 为初值的解.

有时也把方程(2.5.1)写成

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(t,x), & t \neq \tau_k, \\ x(\tau_k^+) = \varphi_k(x(\tau_k)). \end{cases} \tag{2.5.2}$$

例 2.5.1　设有方程

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = a(t)x, & t \neq \tau_k, \\ \Delta x_k = d_k x, & t = \tau_k, \\ x(t_0) = x_0, & t_0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots. \end{cases}$$

求从 (t_0, x_0) 出发的右行 $(t \geqslant t_0)$ 解.

解　当 $t_0 \leqslant t \leqslant \tau_1$ 时,解显然为

$$x(t) = x_0 \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)\mathrm{d}s\right).$$

由定义知

$$\begin{aligned} x(\tau_1^+) &= x_0 \exp\left(\int_{t_0}^{\tau_1} a(s)\mathrm{d}s\right) + d_1 x_0 \exp\left(\int_{t_0}^{\tau_1} a(s)\mathrm{d}s\right) \\ &= x_0(1 + d_1)\exp\left(\int_{t_0}^{\tau_1} a(s)\mathrm{d}s\right), \end{aligned}$$

于是当 $\tau_1 < t \leqslant \tau_2$ 时有解

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0(1 + d_1)\exp\left(\int_{t_0}^{\tau_1} a(s)\mathrm{d}s\right)\exp\left(\int_{\tau_1}^{t} a(s)\mathrm{d}s\right) \\ &= x_0(1 + d_1)\exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)\mathrm{d}s\right), \end{aligned}$$

而

$$x(\tau_2^+) = x(\tau_2) + d_2 x(\tau_2) = x_0(1 + d_1)(1 + d_2)\exp\left(\int_{t_0}^{\tau_2} a(s)\mathrm{d}s\right),$$

故当 $\tau_2 < t \leqslant \tau_3$ 时有解

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0(1 + d_1)(1 + d_2)\exp\left(\int_{t_0}^{\tau_2} a(s)\mathrm{d}s\right)\exp\left(\int_{\tau_2}^{t} a(s)\mathrm{d}s\right) \\ &= x_0 \prod_{k=1}^{2}(1 + d_k)\exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)\mathrm{d}s\right). \end{aligned}$$

一般地,当 $t \geqslant t_0$ 时有解

$$x(t) = x_0 \prod_{t_0 \leqslant \tau_k \leqslant t}(1 + d_k)\exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)\mathrm{d}s\right).$$

例 2.5.2 写出具有脉冲形式出生率的 n 维 Lotka-Volterra 系统.

解 n 维 Lotka-Volterra 系统为

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i\Big[(b_i - d_i) - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{ij}\Big], \qquad i = 1,2,\cdots,n,$$

其中 b_i, d_i 分别为第 i 种群的出生率和死亡率系数. ▌

由脉冲方程定义,容易直接写出具有脉冲出生率的 Lotka-Volterra 系统如下:

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i\Big[(-d_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{ij}\Big], \qquad t \neq t_k, k = 1,2,\cdots,$$

$$\Delta x_{ik} = x_i(t_k^+) - x_i(t_k) = b_{ik}x_i(t_k), \quad i = 1,2,\cdots,n.$$

脉冲微分方程的周期解

我们知道对于自治的微分方程,人们关心的问题首先是其平衡点的存在性和稳定性.对于脉冲微分方程而言,即使方程右端不依赖于 t,由于 Δx_k 依赖于时间 τ_k,所以系统不是自治的,一般说来,无平衡点可谈.当 $\Delta\tau_k = \tau_k - \tau_{k-1}$ 为常数时,通常所关心的是周期为 $\Delta\tau_k$ 的周期解的存在性和稳定性.

定义 2.5.2 将不含初值条件的系统(2.5.1)记作(2.5.1)′.设

1) 存在正数 ω,使 $f(t+\omega, x) = f(t,x), \forall t \in R$;

2) 存在正整数 m,使 $\tau_{k+m} = \tau_k + \omega, I_{k+m} = I_k$.

若(2.5.1)′在$[0,\omega]$上的解 $x(t)$ 满足

$$x(t+\omega-0) = x(t-0), \quad t \in R,$$

则称 $x(t)$ 是方程(2.5.1)′在$[0,\omega]$上的周期解.

显然,当解 $x(t)$ 满足 $x(0) = x(\omega)$ 时,由(2.5.1)′所定义向量场的周期性假设可知

$$x^*(t) = \begin{cases} x(t - j\omega), t \in [j\omega, (j+1)\omega] \setminus \{\tau_k\}, \\ x^*(t) \text{ 在 } \tau_k \text{ 处左连续} \end{cases}$$

就是方程(2.5.1)′的一个周期为 ω 的周期解,简称 ω 周期解.

因此,(2.5.1)′的 ω 周期解的存在问题,等价于(2.5.1)′在$[0,\omega]$上满足边值条件:$x(0) = x(\omega)$ 的解的存在问题.

周期解局部稳定性的判定

周期解稳定性的判定是一个比较困难的问题.下面介绍的定理,对一些较特殊的周期系统往往是可行的.

定理 2.5.1[28] 设有周期系统

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = f(t,y), & f \in C[R \times R^n, R^n], \\ y(k^+) = \varphi_k(y(k)), & \varphi_k \in C[R^n, R^n], \end{cases} \tag{2.5.3}$$

其中 $f(t+1,y) = f(t,y), \forall t \in R; \varphi_{k+1} = \varphi_k$;且系统(2.5.3)关于其周期解

$y(t)$ 的线性近似系统为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=A(t)x,\\ x(k^{+})=B_k x_k,\end{cases}\tag{2.5.4}$$

并设 $\Phi(t)$ 是(2.5.4) 中方程的一个基解矩阵,即满足

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=A(t)\Phi(t),\qquad \Phi(0)=E(\text{单位阵}).$$

若矩阵

$$M=B_1\Phi(1)$$

的一切特征根的绝对值均小于 1,则系统(2.5.4) 的零解,也即系统(2.5.3) 的周期解 $y(t)$ 局部渐近稳定.

2.5.2　具有脉冲的 SIS 传染病模型

我们仅以简单的传染病模型为例来介绍具有脉冲出生和脉冲疫苗接种的模型,进一步的讨论将在第 5 章中进行.

具有脉冲出生的 SIS 模型

设种群的内禀增长率 $r=b-d$,其中 b 与 d 分别为出生率和自然死亡率系数,密度制约仅影响出生,K 是环境对种群的容纳量,无垂直传染,无因病死亡,病人的恢复率系数为 γ,采用双线性发生率,设 $\Delta\tau_k=1$. 由 2.5.1 的知识,容易建立下述具有脉冲出生的 SIS 模型.

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=-dN,\\ \dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=-dS-\beta SI+\gamma I,\quad t\neq k,k=1,2,\cdots,\\ \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=\beta SI-\gamma I-dI.\\ N(t^{+})=\left[1+b-\dfrac{rN(t)}{K}\right]N(t),\\ S(t^{+})=S(t)+\left[b-\dfrac{rN(t)}{K}\right]N(t),\quad t=k,\\ I(t^{+})=I(t).\end{cases}\tag{2.5.5}$$

由于 $N=S+I$,故只需考察下列系统

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=-dN,\\ \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=\beta(N-I)I-(\gamma+d)I,\end{cases}\quad t\neq k,\tag{2.5.6}$$

$$\begin{cases} N(t^+) = \left[1 + b - \dfrac{rN(t)}{K}\right]N(t), \\ I(t^+) = I(t), \end{cases} \quad t = k. \tag{2.5.7}$$

关于无病周期解与地方病周期解的存在性我们有以下定理.

定理 2.5.2　考察由(2.5.6)、(2.5.7) 所构成的模型.

1) 此模型总存在无病周期解$(N_1^*(t),0)$;

2) 当$\int_0^1 A(t)\mathrm{d}t > 0$时,还存在地方病周期解$(N_2^*(t), I_2^*(t))$,

其中 $A(t) = \beta N_1^*(t) - (\gamma + d)$.

证明　1) 无病周期解$(N_1^*(t),0)$ 的存在性等价于微分方程边值问题:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = - dN, \\ N(0) = \left[1 + b - \dfrac{rN(1)}{K}\right]N(1) \end{cases} \tag{2.5.8}$$

的解的存在性.

令

$$z(t) = \frac{1}{N(t)},$$

则系统(2.5.8) 变为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = d \cdot z, & (2.5.9) \\ z(0) = \dfrac{Kz^2(1)}{(1+b)Kz(1) - r}. & (2.5.10) \end{cases}$$

方程(2.5.9) 适合初值$(0, z(0))$ 的解显然为

$$z(t) = z(0)\mathrm{e}^{dt},$$

从而有

$$z(1) = z(0)\mathrm{e}^{d}.$$

代入边值条件(2.5.10) 可得

$$z(0) = \frac{Kz^2(0)\mathrm{e}^{2d}}{(1+b)Kz(0)\mathrm{e}^{d} - r}.$$

解之,得非零解

$$z(0) = \frac{r}{(1 + b - \mathrm{e}^{d})K\mathrm{e}^{d}}.$$

于是

$$N_1^*(t) = \frac{K\mathrm{e}^{d}(1 + b - \mathrm{e}^{d})}{r}\mathrm{e}^{-dt}, \qquad t \in (0,1). \tag{2.5.11}$$

2) 注意到模型(2.5.6) 与(2.5.7) 中关于 N 的方程中不含有 $I(t)$,故

$$N_2^*(t) = N_1^*(t),$$

且已由(2.5.11) 式给出,而 $I_2^*(t)$ 应是下列微分方程边值问题的解

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \beta[N_1^*(t) - I(t)]I(t) - (\gamma + d)I(t), \\ I(0) = I(1). \end{cases} \tag{2.5.12}$$

令

$$y(t) = \frac{1}{I(t)},$$

则系统(2.5.12) 变为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -A(t)y + \beta, & (2.5.13) \\ y(0) = y(1), & (2.5.14) \end{cases}$$

其中 $A(t) = \beta N_1^*(t) - (\gamma + d)$.

线性方程(2.5.13) 满足初值$(0, y(0))$ 的解为

$$y(t) = \mathrm{e}^{-\int_0^t A(u)\mathrm{d}u}\left[y(0) + \beta\int_0^t \mathrm{e}^{\int_0^u A(\tau)\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}u\right], \tag{2.5.15}$$

从而有

$$y(1) = \mathrm{e}^{-\int_0^1 A(u)\mathrm{d}u}\left[y(0) + \beta\int_0^1 \mathrm{e}^{\int_0^u A(\tau)\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}u\right].$$

将边值条件(2.4.14) 代入,可得

$$\left(\mathrm{e}^{\int_0^1 A(t)\mathrm{d}t} - 1\right)y(0) = \beta\int_0^1 \mathrm{e}^{\int_0^u A(\tau)\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}u. \tag{2.5.16}$$

由等式(2.5.16) 可见,当$\int_0^1 A(t)\mathrm{d}t > 0$ 时,有

$$y(0) = y(1) = \frac{\beta\int_0^1 \mathrm{e}^{\int_0^u A(\tau)\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}u}{\mathrm{e}^{\int_0^1 A(t)\mathrm{d}t} - 1} > 0,$$

代入(2.5.15) 式可得满足边值条件的 $y(t)$,从而可得 $I = I_2^*(t)$.

故当条件$\int_0^1 A(t)\mathrm{d}t > 0$,地方病周期解$(N_2^*(t), I_2^*(t))$ 存在. ▌

具有脉冲接种的 SIR 模型[29]

在(1.1.2) 中,我们曾提及具有连续接种的下述 SIR 模型①:

---

① 这里增加了因病死亡率项 αI.

$$\begin{cases}\dfrac{dS}{dt} = bk - \beta SI - bS - pS, \\ \dfrac{dI}{dt} = \beta SI - (\gamma + b)I - \alpha I, \\ \dfrac{dR}{dt} = \gamma I - bR + pS,\end{cases} \tag{2.5.17}$$

这里由于对易感者连续接种,任一时刻 t 单位时间内均有比例为 p 的易感者具有免疫力,他们从易感者类移出而进入移出类 R.

当接种不是连续方式而是在固定时刻($t = k, k = 0,1,2,\cdots$)进行时,将可用下述脉冲系统描述.

$$\begin{cases}\dfrac{dS}{dt} = bk - \beta SI - bS, \\ \dfrac{dI}{dt} = \beta SI - (\gamma + b + \alpha)I, \qquad t \neq k,\ k = 0,1,2,\cdots, \\ \dfrac{dR}{dt} = \gamma I - bR,\end{cases} \tag{2.5.18}$$

$$\begin{cases}S(k^+) = (1-p)S(k), \\ I(k^+) = I(k), \qquad k = 0,1,2,\cdots, \\ R(k^+) = R(k) + pS(k).\end{cases} \tag{2.5.19}$$

现在,我们来讨论此模型的无病周期解的存在性与稳定性.

定理 2.5.3 由(2.5.18)与(2.5.19)所构成的模型,其无病 1 周期解 $(S^*(t),0,R^*(t))$ 必存在,且有

$$S^*(t) = K - \frac{Kpe^{-bt}}{1-(1-p)e^{-b}}, \quad R^*(t) = \frac{Kpe^{-bt}}{1-(1-p)e^{-b}}. \tag{2.5.20}$$

证明 当 $I(t) \equiv 0$ 时,求 1 周期解分量 $S^*(t)$ 等价于求微分方程边值问题

$$\begin{cases}\dfrac{dS}{dt} = bK - bS, & (2.5.21) \\ S(0) = (1-p)S(1) & (2.5.22)\end{cases}$$

的解.方程(2.5.21)适合初值$(0,S(0))$的解为

$$S(t) = K + [S(0) - K]e^{-bt}, \tag{2.5.23}$$

从而

$$S(1) = K + [S(0) - K]e^{-b}.$$

代入边值条件(2.5.22)得

$$S(0) - (1-p)[K + (S(0) - K)]e^{-b} = 0,$$

解之得

$$S(0)=\frac{(1-p)K(1-\mathrm{e}^{-b})}{1-(1-p)},\qquad S(1)=\frac{K(1-\mathrm{e}^{-b})}{1-(1-p)\mathrm{e}^{-b}},$$

代入(2.5.23)得

$$S^*(t)=K-\frac{Kp\mathrm{e}^{-bt}}{1-(1-p)\mathrm{e}^{-b}},\qquad t\in(0,1).$$

当 $I(t)\equiv 0$ 时,求1周期解 $R^*(t)$ 等价于求边值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}=-bR,\\ R(0)=R(1)+pS(1)\end{cases}$$

的解.用类似的方法可得

$$R^*(t)=\frac{Kp\mathrm{e}^{-bt}}{1-(1-p)\mathrm{e}^{-b}},\qquad t\in(0,1).$$ ▌

定理 2.5.4　记 $\sigma=\dfrac{\beta K}{\gamma+b+\alpha}\left[1-\dfrac{p(\mathrm{e}^b-1)}{b(\mathrm{e}^b-1+p)}\right]$. 若 $\sigma<1$, 则由(2.5.18)与(2.5.19)所构成的模型的无病1周期解 $(S^*(t),0,R^*(t))$ 局部渐近稳定.

证明　做变换

$$x(t)=S(t)-S^*(t),\quad y(t)=I(t)-0,\quad z(t)=R(t)-R^*(t),$$

可得原系统关于1周期解 $(S^*(t),0,R^*(t))$ 的线性近似系统为

$$\begin{bmatrix}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-b & -\beta S^*(t) & 0\\ 0 & \beta S^*(t)-b-\gamma-\alpha & 0\\ 0 & \gamma & -b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}. \tag{2.5.24}$$

不难求得(2.5.24)的基解矩阵为

$$\Phi(t)=\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{-bt} & \varphi_{12} & 0\\ 0 & \varphi_{22} & 0\\ 0 & \varphi_{23} & \mathrm{e}^{-bt}\end{bmatrix},$$

其中

$$\begin{aligned}\varphi_{22}&=\exp\int_0^t[\beta S^*(\tau)-b-\alpha-\gamma]\mathrm{d}\tau\\ &=\exp\left[\beta K-b-\alpha-\gamma)t+\frac{\beta Kp\mathrm{e}^b(\mathrm{e}^{-bt}-1)}{b(\mathrm{e}^b-1+p)}\right],\\ \varphi_{12}&=-\beta\mathrm{e}^{-bt}\int_0^t S^*(\tau)\varphi_{22}(\tau)\mathrm{e}^{b\tau}\mathrm{d}\tau,\\ \varphi_{32}&=\mathrm{e}^{-bt}\int_0^t\gamma\varphi_{22}(\tau)\mathrm{e}^{b\tau}\mathrm{d}\tau.\end{aligned}$$

由方程组(2.5.19)可得

$$\begin{bmatrix} x(k^+) \\ y(k^+) \\ z(k^+) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-p) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ p & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ y(k) \\ z(k) \end{bmatrix}.$$

应用定理2.5.1,

$$M = \begin{bmatrix} 1-p & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ p & 0 & 1 \end{bmatrix} \Phi(1) = \begin{bmatrix} (1-p)\mathrm{e}^{-b} & (1-b)\varphi_{12}(1) & 0 \\ 0 & \varphi_{22}(1) & 0 \\ p\mathrm{e}^{-b} & p\varphi_{12}(1)+\varphi_{32}(1) & \mathrm{e}^{-b} \end{bmatrix}.$$

显见,矩阵 M 的三个特征根分别为

$$\lambda_1 = (1-p)\mathrm{e}^{-b}, \quad \lambda_2 = \varphi_{22}(1), \quad \lambda_3 = \mathrm{e}^{-b}.$$

由于 $0 < p < 1, b > 0$,故 $0 < \lambda_1 < 1, 0 < \lambda_3 < 1$,

$$\begin{aligned} \varphi_{22}(1) &= \exp\left[\beta K - (b+\alpha+\gamma) + \frac{\beta K p(1-\mathrm{e}^b)}{b(\mathrm{e}^b - 1 + p)}\right] \\ &= \exp\left\{\left[\frac{\beta K}{b+\alpha+\gamma}\left(1 - \frac{p(\mathrm{e}^b - 1)}{b(\mathrm{e}^b - 1 + p)}\right) - 1\right](b+\alpha+\gamma)\right\} \\ &= \exp[(\sigma - 1)(b+\alpha+\gamma)]. \end{aligned}$$

当 $\sigma < 1$ 时,$\lambda = \varphi_{22}(1) < 1$.

据定理2.5.1可知,当 $\sigma < 1$ 时 $(S^*(t), 0, R^*(t))$ 局部渐近稳定. ▎

文献[29]还利用 Liapunov 函数法和脉冲微分不等式证明了:当 $\sigma < 1$ 时 $(S^*(t), 0, R^*(t))$ 是全局渐近稳定的.我们将在第4章中讲述.

§2.6 具有迁移的传染病模型

前面所讨论的模型,都是在一给定的区域内考虑,而且假定种群和仓室中的成员均在此区域内均匀分布.换句话说,我们没有考虑种群各类成员在空间的扩散.事实上,许多传染病随着种群成员的流动,在空间的扩散是不应忽略的.在这种情况下,通常有两种建模思想,一种是认为各仓室成员连续扩散,从而在原有常微模型的基础上,添加对空间的扩散项.例如,对应于第1章中的模型(1.1.11),具有扩散的SIR模型为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial t} = \Delta S + bK - \beta SI - bS, \\ \dfrac{\partial I}{\partial t} = \Delta I + \beta SI - bI - \gamma I, \\ \dfrac{\partial R}{\partial t} = \Delta R + \gamma I - bR, \end{cases}$$

其中 $S = S(t,x,y,z), I = I(t,x,y,z), R = R(t,x,y,z)$,

$$\Delta U = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

再附加一定类型的边值条件. 这种模型是一拟线性的偏微分方程组, 尚很少见到有关的研究成果. 本书不打算涉及.

另一种建模思想是认为种群成员将在不同区域(斑块)间迁移. 尽管 H. Hethcote 早在 1976 年就建立了一种在两个斑块环境间迁移的传染病模型[30], 但后继的研究工作却十分少见. 文献[31]曾提出了有患病者迁入的模型. 本节将建立种群在 n 个斑块间移迁的传染病模型[32], 并以两种群为例介绍文献[32]的部分结果, 以使读者对这一研究方向有一粗浅的了解.

种群在 n 个斑块间迁移的 SIS 传染病模型

根据文献[33]提出的种群动力学结构, 假设种群规模 N 的增长规律由下列方程描述:

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = B(N)N - \mu N,$$

其中 $B(N)$ 是种群的出生率系数, μ 是自然死亡率系数, 当种群不发生迁移时, 即 n 个斑块相互孤立时, 采用双线性发生率, 不考虑因病死亡. 在第 i 个斑块上的 $S_iI_iS_i$ 模型为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}S_i}{\mathrm{d}t} = B_i(N_i)N_i - \mu_i S_i - \beta_i S_i I_i + \gamma_i I_i, \\ \dfrac{\mathrm{d}I_i}{\mathrm{d}t} = \beta_i S_i I_i - (\mu_i + \gamma_i) I_i, \end{cases}$$

其中 S_i 与 I_i 分别为第 i 个斑块内易感者和患病者的数量, $N_i = S_i + I_i$ 是种群在第 i 个斑块的成员总数, γ_i 是第 i 个斑块内患病者的恢复率系数.

$B_i(N_i)$ 在 $N_i \in (0, +\infty)$ 满足下列基本假设:

1) $B_i(N_i) > 0,\quad i = 1,2,\cdots,n$;

2) $B_i(N_i) \in C^1(0, +\infty)$, 且 $B_i'(N_i) < 0,\ i = 1,2,\cdots,n$;

3) $\mu_i > B_i(+\infty),\quad i = 1,2,\cdots,n$.

文献[33]给出了包含在有关生物学文献中的下述三种出生率函数:

$$B_i(N_i) = b_i \mathrm{e}^{-a_i N_i},\quad a_i > 0, b_i > 0;$$

$$B_i(N_i) = \frac{p_i}{q_i + N_i},\quad p_i, q_i, n > 0;$$

$$B_i(N_i) = \frac{A_i}{N_i} + c_i,\quad A_i > 0, c_i > 0.$$

它们显然都满足上述基本假设.

现在考察种群在斑块间的的迁移.对第 i 个斑块来说,在它上面的易感者 S_i 和患病者 I_i 均可向任一斑块 $j(j=1,2,\cdots,n,j\neq i)$ 迁移;而任一斑块 $j(j=1,2,\cdots,n,j\neq i)$ 上的易感者 S_j 和患病者 I_j 也均可以向斑块 i 迁移.设斑块 i 上的易感者和染病者迁出率系数分别为 a_{ii} 与 $b_{ii}(a_{ii}\leqslant 0,b_{ii}\leqslant 0)$.从斑块 $j(j=1,2,\cdots,n,j\neq i)$ 上的易感者和染病者迁入斑块 i 内的迁入率系数分别为 a_{ij} 与 $b_{ij}(a_{ij}\geqslant 0,b_{ij}\geqslant 0)$.于是在 n 个斑块间迁移的 SIS 模型为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}S_i}{\mathrm{d}t}=B_i(N_i)N_i-\mu_iS_i-\beta_iS_iI_i+\gamma_iI_i+\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}S_j,\\ \dfrac{\mathrm{d}I_i}{\mathrm{d}t}=\beta_iS_iI_i-(\mu_i+\gamma_i)I_i+\sum\limits_{j=1}^{n}b_{ij}I_j,\qquad i=1,2,\cdots,n.\end{cases}\tag{2.6.1}$$

为简单起见,忽略个体在迁移过程中的出生和死亡,并设矩阵(a_{ij})与(b_{ij})均不可约.由于从斑块 i 中迁出者将分散到其它 $n-1$ 个斑块,从而有

$$-a_{ii}=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}a_{ji},\qquad -b_{ii}=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}b_{ji}.\tag{2.6.2}$$

种群在两斑块间迁移的 SIS 模型研究

当斑块数为 2 时,由(2.6.2)式可知

$$-a_{11}=a_{21},\qquad -a_{22}=a_{12},$$
$$-b_{11}=b_{21},\qquad -b_{22}=b_{12},$$

于是相应的模型(2.6.1)可写成

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}S_1}{\mathrm{d}t}=B_1(N_1)N_1-(\mu_1-a_{11})S_1-\beta_1S_1I_1+\gamma_1I_1-a_{22}S_2,\\ \dfrac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t}=\beta_1S_1I_1-(\mu_1+\gamma_1-b_{11})I_1-b_{22}I_2,\\ \dfrac{\mathrm{d}S_2}{\mathrm{d}t}=B_2(N_2)N_2-(\mu_2-a_{22})S_2-\beta_2S_2I_2+\gamma_2I_2-a_{11}S_1,\\ \dfrac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t}=\beta_2S_2I_2-(\mu_2+\gamma_2-b_{22})I_2-b_{11}I_1,\end{cases}\tag{2.6.3}$$

其中 $a_{ii}\leqslant 0,b_{ii}\leqslant 0,i=1,2$,其余常数均非负.再假设 $B_i(0^+)>\mu_i,i=1,2$.

首先来讨论无病平衡点,设其为$(S_1^*,0,S_2^*,0)$.显然(S_1^*,S_2^*)是方程组

$$\begin{cases}B_1(S_1)S_1-(\mu_1-a_{11})S_1-a_{22}S_2=0,\\ B_2(S_2)S_2-(\mu_2-a_{22})S_2-a_{11}S_1=0\end{cases}\tag{2.6.4}$$

的正解.

系统

$$\begin{cases}\dfrac{dI_1}{dt}=\beta_1(N_1-I_1)I_1-(\mu_1+\gamma_1-b_{11})I_1-b_{22}I_2,\\ \dfrac{dI_2}{dt}=\beta_2(N_2-I_2)I_2-(\mu_2+\gamma_2-b_{22})I_2-b_{11}I_1\end{cases}$$

在 $E_0(0,0)$ 点的 Jacobi 矩阵为

$$M=\begin{bmatrix}\beta_1S_1^*+b_{11}-\mu_1-\gamma_1 & -b_{22}\\ -b_{11} & \beta_2S_2^*+b_{22}-\mu_2-\gamma_2\end{bmatrix}.$$

容易得出,其特征方程为

$$\lambda^2-h_1\lambda+h_2=0,$$

其中

$$\begin{aligned}h_1&=\beta_1S_1^*+\beta_2S_2^*+b_{11}+b_{22}-\gamma_1-\gamma_2-\mu_1-\mu_2,\\ h_2&=\beta_1S_1^*\beta_2S_2^*-b_{11}b_{22}-\beta_1S_1^*(\mu_2+\gamma_2-b_{22})-\beta_2S_2^*(\mu_1+\gamma_1-b_{11})\\ &\quad+(\mu_1+\gamma_1-b_{11})(\mu_2+\gamma_2-b_{22}).\end{aligned}\tag{2.6.5}$$

其主特征值为

$$\lambda_{\max}(M)=\frac{h_1+\sqrt{h_1^2-4h_2}}{2}.\tag{2.6.6}$$

容易看出,$\lambda_{\max}(M)>0$ 的充要条件为

i) $h_1>0$,或

ii) $h_1<0$,且

$$1+\frac{\beta_1S_1^*\beta_2S_2^*-b_{11}b_{22}}{(\mu_1+\gamma_1-b_{11})(\mu_2+\gamma_2-b_{22})}<\frac{\beta_1S_1^*}{\mu_1+\gamma_1-b_{11}}+\frac{\beta_2S_2^*}{\mu_2+\gamma_2-b_{22}}.\tag{2.6.7}$$

故当此条件满足时,无病平衡点 E_0 是不稳定的,即疾病将持续存在.

当 $h_1<0$ 且

$$1+\frac{\beta_1S_1^*\beta_2S_2^*-b_{11}b_{22}}{(\mu_1+\gamma_1-b_{11})(\mu_2+\gamma_2-b_{22})}>\frac{\beta_1S_1^*}{\mu_1+\gamma_1-b_{11}}+\frac{\beta_2S_2^*}{\mu_2+\gamma_2-b_{22}}$$

时,$\lambda_{\max}(M)<0$,从而 E_0 局部渐近稳定.疾病在两斑块中消亡①.

条件的实际涵义

由(2.6.5)式易见条件 i),$h_1>0$,意味着两个斑块的易感者均达到无病平衡态时,一个患病者在两个斑块内总的发生率(单位时间内传染的个体数)大于两斑块内自然死亡率系数、恢复率系数与患病者迁移率系数之和.换句话说,单位时间内一个患者在两个斑块内产生的新患者数大于从每一斑块内患者的流失

① 参见 62 页脚注.

数之和,这时,疾病自然会持续存在.

由于患者从斑块 i 中迁出,使斑块 i 中患者的平均患病期由无迁出时 $\frac{1}{\mu_i+\gamma_i}$ 减少到 $\frac{1}{\mu_i+\gamma_i-b_{ii}}(i=1,2)$.

而 $h_1>0$ 等价于

$$R_{12}=\frac{\beta_1 S_1^*+\beta_2 S_2^*}{\mu_1+\gamma_1-b_1+\mu_2+\gamma_2-b_2}>1, \tag{2.6.8}$$

(2.6.8) 式右端实际上也就是把两个斑块看作一个整体时的基本再生数 R_{12}.故条件 i) 也表明当 $R_{12}>1$ 时疾病将在两斑块中持续.

不等式(2.6.7) 右端两项分别表示斑块 1 与 2 的基本再生数 R_1 与 R_2,而

$$\frac{\beta_1 S_1^*\beta_2 S_2^*-b_{11}b_{22}}{(\mu_1+\gamma_1-b_{11})(\mu_2+\gamma_2-b_{22})}=R_1\cdot R_2-\frac{b_{11}}{\mu_1+\gamma_1-b_{11}}\cdot\frac{b_{22}}{\mu_2+\gamma_2-b_{22}}$$

表示一个患者在两斑块各自的平均病程内分别产生的新患者数的乘积与各自病程内迁出的患者数的乘积之差.记作 Φ_{12}.

于是条件 ii) 表示,当 $R_{12}<1$ 但 $R_{12}-\Phi_{12}>1$ 时,疾病仍然持续.由此可见,在有迁移情况下,仅管把两斑块看作一整体时基本再生数 $R_{12}<1$,并不能保证疾病消亡,还需要加上条件

$$R_1+R_2-\Phi_{12}<1,$$

才能保证疾病消亡.

迁移对疾病传播的影响

为了更具体地观察迁移对疾病传播的影响,我们将出生率系数选取为

$$B(N_i)=\frac{b_i}{N_i}+c_i,\quad c_i<\mu_i,\quad i=1,2.$$

这时,模型(2.6.3) 简化为

$$\begin{cases}\dfrac{dS_1}{dt}=b_1+c_1I_1-(\mu_1-c_1-a_{11})S_1-\beta_1S_1I_1+\gamma_1I_1-a_{22}S_2,\\ \dfrac{dI_1}{dt}=\beta_1S_1I_1-(\mu_1+\gamma_1-b_{11})I_1-b_{22}I_2,\\ \dfrac{dS_2}{dt}=b_2+c_2I_2-(\mu_2-c_2-a_{22})S_2-\beta_2S_2I_2+\gamma_2I_2-a_{11}S_1,\\ \dfrac{dI_2}{dt}=\beta_2S_2I_2-(\mu_2+\gamma_2-b_{22})I_2-b_{11}I_1.\end{cases} \tag{2.6.9}$$

此时 (S_1^*,S_2^*) 可具体地表示为

$$
\begin{cases}
S_1^* = \dfrac{b_2 a_{22} - \mu_2 b_1 + c_2 b_1 + b_1 a_{22}}{-\mu_2\mu_1 + \mu_2 c_1 + \mu_2 a_{11} + c_2\mu_1 - c_2 c_1 - c_2 a_{11} + \mu_1 a_{22} - c_1 a_{22}}, \\
S_2^* = \dfrac{-\mu_1 b_2 + c_1 b_2 + a_{11} b_2 + a_{11} b_1}{-\mu_2\mu_1 + \mu_2 c_1 + \mu_2 a_{11} + c_2\mu_1 - c_2 c_1 - c_2 a_{11} + \mu_1 a_{22} - c_1 a_{22}}.
\end{cases}
\tag{2.6.10}
$$

当种群不发生迁移时,即

$$a_{11} = a_{22} = b_{11} = b_{22} = 0,$$

时,系统(2.6.9) 变为相互独立的两组系统:

$$
\begin{cases}
\dfrac{dS_1}{dt} = b_1 + c_1 I_1 - (\mu_1 - c_1)S_1 - \beta_1 S_1 I_1 + \gamma_1 I_1, \\
\dfrac{dI_1}{dt} = \beta_1 S_1 I_1 - (\mu_1 + \gamma_1) I_1
\end{cases}
\tag{2.6.11}
$$

与

$$
\begin{cases}
\dfrac{dS_2}{dt} = b_2 + c_2 I_2 - (\mu_2 - c_2)S_2 - \beta_2 S_2 I_2 + \gamma_2 I_2, \\
\dfrac{dI_2}{dt} = \beta_2 S_2 I_2 - (\mu_2 + \gamma_2) I_2.
\end{cases}
\tag{2.6.12}
$$

令

$$R_{i0} = \frac{\beta_i b_i}{(\mu_i - c_i)(\mu_i + \gamma_i)}, \qquad i = 1,2. \tag{2.6.13}$$

容易证明:

当 $R_{i0} < 1 (i = 1,2)$ 时,疾病在斑块 i 中消亡;

当 $R_{i0} > 1$ 时,疾病在斑块 $i (i = 1,2)$ 中持续,且相应系统在斑块 i 中有全局渐近稳定的地方病平衡点 .

现在,我们从下面两个特例来看种群的迁移对疾病传播所带来的影响.

例 2.6.1　在模型(2.6.9) 中,令 $b_1 = b_2 = b, c_1 = c_2 = c, \mu_1 = \mu_2 = \mu, \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma, a_{11} = a_{22} = b_{11} = b_{22} = -\theta$.

这时,由(2.6.10) 可得

$$S_1^* = S_2^* = \frac{b}{\mu - c}.$$

由(2.6.6) 式可得

$$2\lambda_{\max}(M) = \frac{b(\beta_1 + \beta_2)}{\mu - c} - 2\theta - 2(\mu + \gamma) + \sqrt{\frac{b^2(\beta_2 - \beta_1)^2}{(\mu - c)^2} + 4\theta^2}. \tag{2.6.14}$$

由(2.6.13) 可知,在不发生迁移,即 $\theta = 0$ 时,若

$$\frac{b\beta_i}{\mu - c} < \mu + \gamma, \qquad i = 1,2, \tag{2.6.15}$$

则疾病在斑块 i 上消亡;若

$$\frac{b\beta_i}{\mu - c} > \mu + \gamma,$$

则疾病在斑块 i 上持续而成为地方病.

注意到当 $\beta_1 \neq \beta_2$ 时,有

$$\sqrt{\frac{b^2(\beta_2 - \beta_1)^2}{(\mu - c)^2} + 4\theta^2} > 2\theta.$$

由(2.6.14)式可见,当 $\theta = 0$ 时,若(2.6.15)成立,疾病在两斑块中均消失.由于迁移,$\theta > 0$,可能使 $\lambda_{\max}(M) > 0$,从而导致出现地方病.譬如,取 $b = c = \gamma = 1, \mu = 2, \beta_1 = 5, \beta_2 = 1$,在无迁移($\theta = 0$)时,由(2.6.13)可知

$$R_{10} = \frac{5}{3} > 1, \qquad R_{20} = \frac{1}{3} < 1,$$

故疾病在斑块 1 上持续发展成为地方病,而在斑块 2 上消亡.若令 $\theta = 1$,迁移出现,由(2.5.14)可算得

$$2\lambda_{\max}(M) = -2 + \sqrt{20} > 0,$$

故疾病将在两斑块上均持续存在. ▌

例 2.6.2 在模型(2.6.9)中,令 $b_1 = b_2 = c_1 = c_2 = \gamma_1 = \gamma_2 = \beta_2 = 1, \beta_1 = 4, \mu_1 = \mu_2 = 2, a_{11} = a_{22} = b_{11} = b_{22} = -10$.容易算得

$$R_{20} = \frac{1}{3} < 1, \qquad R_{10} = \frac{4}{3} > 1.$$

可见,当没有迁移时,疾病将在斑块 1 上持续存在,而将在斑块 2 上消亡.当有迁移发生时,由(2.6.14)可得

$$2\lambda_{\max}(M) = -21 + \sqrt{409} < 0,$$

疾病将在两个斑块上均消亡. ▌

通过以上两例可以清楚地看到迁移对疾病传播的重要作用.我们也可以利用所得到的阈值公式来实现疾病控制的某些策略.

文献[32]还就 n 个斑块上迁移的 SIS 模型(2.6.1)证明了以下结论.

定理 2.6.1 设模型(2.6.1)满足基本假设 1)、2)、3),且 $B_i(0^+) > \mu_i, i = 1,2,\cdots,n$,记无病平衡点为 $E_0(S_1^*,0,S_2^*,0,\cdots,S_n^*,0)$,则

1) 当 $a_{ij} = b_{ij}, i,j = 1,2,\cdots,n$ 时,E_0 是全局吸引的;

2) 当 $\lambda_{\max}(M) < 0$ 时,存在 $\delta > 0$,使得当 $I_i(0) < \delta, i = 1,2,\cdots,n$ 时,有

$$\lim_{t\to+\infty}(S(t),I(t)) = (S^*,0),$$

其中$(S(t),I(t))$是系统(2.6.1)的正解.

3) 当 $\lambda_{\max}(M) > 0$ 时,存在常数 $\varepsilon > 0$,使(2.6.1)的任一正解$(s(t), I(t))$满足

$$\liminf_{t\to+\infty} I_i(t) \geqslant \varepsilon, \quad i = 1,2,\cdots,n,$$

即疾病在 n 个斑块内一致持续生存.

定理的证明可参阅[32].

§2.7　非典型肺炎的传播模型与流行趋势预测

非典型肺炎国外简称为 SARS(Severe Acute Respiratory Syndrome),它是在21世纪第一个突发性的恶性传染病.非典型肺炎是由一种新型冠状病毒引起的,主要通过近距离飞沫、接触病人呼吸道分泌物与排泄物等渠道传播.潜伏期约为2～12天,通常在4～5天发病[36,37],临床表现为肺炎,主要症状有发热、头疼和全身酸疼、乏力、干咳、少痰,部分病人的呼吸短促、窘迫,早期白细胞正常或降低,肺部影像学显示肺炎改变.

SARS 自 2002 年 11 月发现以来,迅速蔓延至世界 28 个国家.据世界卫生组织(WHO)报告,截至 2003 年 6 月 13 日,全世界的 SARS 病例已达 8454 人,其中 792 人死亡[38].我国情况尤为严重,病例高达 5327 人,343 人死亡[39].在 2003 年 4 月下旬至 5 月上旬流行高峰期间,北京市每日新增患病人数高达百人以上.

由于人们对这一突发性的新传染病在初期缺乏认识,在发病初期未能采取有力的隔离等预防措施,又无预防疫苗,致使 SARS 迅速蔓延.2003 年 4 月 18 日以后,我国政府采取了如隔离等的一系列强有力的预防措施.使 SARS 在我国的传播得到了有效而迅速的控制,仅仅两个多月的时间就使 SARS 的病例感染在全国范围内消除.

由于 SARS 这类新的恶性传染病来势凶猛,人们又对其缺乏认识,因此在流行初期正确地建立数学模型对其传播规律和趋势进行预测预报,研究各种隔离预防措施的强度对控制流行的作用,对各级决策部门无疑是一种重要的参考.SARS 流行初期已有少数关于其传播规律和流行趋势的模型研究快速面世[40~43,54~56].但截止 2003 年 6 月下旬,反映我国强有力隔离预防控制措施的动力学模型研究尚不多见.本节将介绍我们课题组针对 SARS 在我国的流行情况所建立的两类模型,并在 5 月中旬流行高峰时期对流行趋势和强度的作用所作的预测预报.我们所建立的模型和研究方法对今后突发性的恶性传染病流行规律的研究也将有一定的借鉴作用.

2.7.1 建模思想与参数的确定

对 SARS 建立模型应考虑以下三方面的因素:(i) 传染病的一般传播机理;(ii) SARS 的特殊性,例如由于它是新发疾病,我们对此疾病的传染率尚难以估计;潜伏期是否有传染性尚难以确定等;(iii) 我国政府一系列的隔离预防等措施,例如,对确诊病人完全隔离治疗;对疑似病人的隔离诊断;对有直接间接接触史或发热人群的隔离观察;各单位的半封闭隔离的自我保护;以及对交通工具、公共场合的经常消毒;对城市出入口的体温测定和发热人群的追踪监测等.这里碰到的困难是如何把这些非量化的各种不同强度的隔离预防措施反映在模型和参数中?针对一些尚不确定的因素如何来确定模型中的参数?

文献[44]将全体人群分成以下七类:普通易感者(S)— 未被 SARS 病毒感染的自由环境中的人员;高危易感者(H)— 在隔离区内照看确诊病人和疑似病人的医护等工作人员;潜伏者(E)— 已被病毒感染,但尚未发病(由于潜伏期是否传播无定论,作保守的计算认为传染较小);未隔离病人(I)— 被感染发病,具有较强的传染力且尚未隔离者;疑似病人(P)— 潜伏者或有类似症状,他们已被隔离诊断治疗;确诊病人(Q)— 被隔离且已确诊的 SARS 病人;恢复者(R)— 治愈出院者,按现有认识他们均具有免疫力.根据传染病的传播机理和我国政府的隔离措施.我们建立如下的仓室转移框图 2.1.

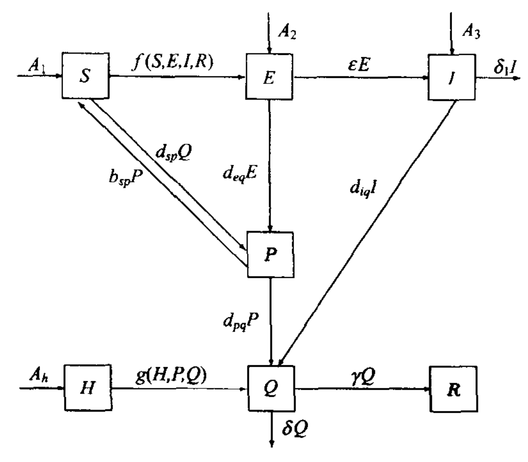


图 2.1 模型的仓室转移图

其中 S 为自由环境中全体易感人群.当 S 与 E、I 中的人群接触后将有一定的概率感染而进入潜伏类 E.潜伏者一部分将被隔离诊治进入 P;另一部分将在自由环境中发展成为确诊病人 I.设平均潜伏期为 5 天[36,45].根据 4 月 18 日开始平均每天报告的确诊病例有 80% 从疑似病例转来,20% 是新收治的[46].因此

$$\epsilon = \frac{1}{5} \times \frac{20}{100}, \quad d_{ep} = \frac{1}{5} \times \frac{80}{100}.$$

再假设潜伏期后平均 3 天将出现明显症状而被确诊隔离，从而 $d_{iq} = \frac{1}{3}$. P 类疑似者也平均 3 天可被确诊而进入 Q，但是 P 内成员除了 SARS 感染者外尚有部分是来自 S 的非感染者，设 P_s 与 P_q 分别为 t 时刻卫生部发布的疑似病例排除数和由疑似病例转为确诊的病例数，经平均计算可知 P 中未感染者占比例为

$$\frac{p_s}{p_s + p_q} = 0.6341,$$

于是

$$d_{pq} = (1 - 0.6341) \times \frac{1}{3}.$$

进入隔离疑似类的人群来自潜伏期 E 外，还来自有类似症状但非 SARS 感染的 S 类. 然而由于 S 类人口数量很大(全国 13 亿，即使北京也一千多万)，而与之比较感染者数量非常小(几千人)，因而若以 kS 比例进入 P，则由于 k 过小而造成病态方程，淹没某些特性. 因此我们对这部分进入 P 的人群改用 $d_{sp}Q$. 政府每日公布数据显示，增加 1 个确诊病人平均而言将有 1.3 ~ 1.4 个疑似病人[46]. (取为 1.3)，注意到这 1.3 个新增疑似病人来自 S 和 E，而来自 S 的比例为 0.6341，又由于 Q 中病人的病程为 30 天，故平均每天新增确诊病人数为 $\frac{Q}{30}$，因此应取

$$d_{sp} = 1.3 \times 0.6341 \times \frac{1}{30}.$$

设未被感染而有类似症状的疑似病人平均需经过 10 天的观察与治疗才能被排除. 因此，取

$$b_{sp} = 0.6341 \times \frac{1}{10}.$$

由于病程为 30 天，故 $\gamma = \frac{1}{30}$. 设 SARS 的平均因病死亡率为 14%[46]. 从而

$$\delta = \frac{1}{30} \times 0.14.$$

这里，为了简单起见，我们假定 $\delta_1 = \delta$. 设 A_1, A_2, A_3, A_h 分别为每天输入该仓室的人数. 在模型中我们忽略出生率和自然死亡率.

最为困难的是如何确定疾病的发生率 f 和 g. 它们对流行规律起着至关重要的作用，且极为敏感. 下面以 f 为例加以说明. 设一个病毒携带者与他人的接触率为 C. 由 1.2.2 节可知疾病的发生率为

$$(\beta_E CE + \beta_I CI)\frac{S}{S+E+I+R} = \frac{\beta_I CS}{S+E+I+R}(kE+I),$$

$$k = \frac{\beta_E}{\beta_I}, \tag{2.7.1}$$

其中 β_E 与 β_I 分别反映潜伏期和发病期病毒性的强弱.对 SARS 病毒而言,我们设 $\beta_E \ll \beta_I$[36,45].接触率 C 反映了病毒携带者活动范围和能力的大小(为简单计,我们假定 E 与 I 的接触率相同),反映了各种隔离等预防控制措施的强弱,隔离预防强度越大,病毒携带者与他人接触的机会就越少,从而 C 就越小. $\frac{S}{S+E+I+R}$ 是普通易感者在可接触人群中所占的比例.然而,对于新发生的 SARS 病毒,β_I 不是清楚的,而且诸多隔离预防措施其强度难以量化.因此,对于每一个 I 类病人(E 类潜伏者通过系统 k 折算成 I 类病人计算)每天传染的人数 $\beta(t) \triangleq \frac{\beta_I C_I S}{S+E+I+R}$(称其为传染率),我们是利用每日发布的数据来进行拟合的.

自由环境中疾病发生率 $f(S(t),E(t),I(t),R(t)) \triangleq F(t)$ 就是 t 时刻(即第 t 天)自由环境中的新增被感染者数.他们是被 t 时刻自由环境中病毒携带者(包括发病者和潜伏者)所感染.由于新感染者将在自由环境内停留 8 天(5 天潜伏 3 天发病),故 t 时刻自由环境中的发病者是 $t-8$ 到 $t-6$ 时间段的新感染者;t 时刻的潜伏者是 $t-5$ 到 $t-1$ 时间段的新感染者.而所有这些新感染者都要经过 8 天被卫生部作为确诊病人报道出来.设 t 时刻卫生部所报道的确诊病人数与医务人员确诊病人数之差(即自由环境内的确诊病人数)为 $\hat{F}(t)$.于是传染率

$$\beta(t) = \frac{f(t)}{I(t)+kE(t)} = \frac{\hat{F}(t+8)}{\sum_{j=0}^{2}\hat{F}(t+j) + k\sum_{j=3}^{7}\hat{F}(t+j)}. \tag{2.7.2}$$

我们以 4 月 21 日为时间轴的起点,由卫生部每日实际公布的数据按公式(2.7.2)计算出的从 4 月 21 日至 5 月 16 日的 $\beta(t)(t=1,2,\cdots,25)$ 如图 2.2 中的星点所示.由这些星点所得的拟合曲线 $\beta(t)$ 如图 2.2 所示.利用曲线回归的方法可得这一拟合的传染率曲线的方程为

$$\beta(t) = 0.002 + 0.2496e^{-0.1303t}. \tag{2.7.3}$$

同理可得隔离区内一个病毒携带者对高危易感者的传染率曲线.

应当指出,模型中的某些参数只能是一些估计值,难以事先完全确定,一种可行的办法是通过对模型的数值计算,让计算值与实际历史数据最佳吻合来调整这些参数.例如模型中的 k 就是根据有关专家的经验通过调试需定为 0.1.

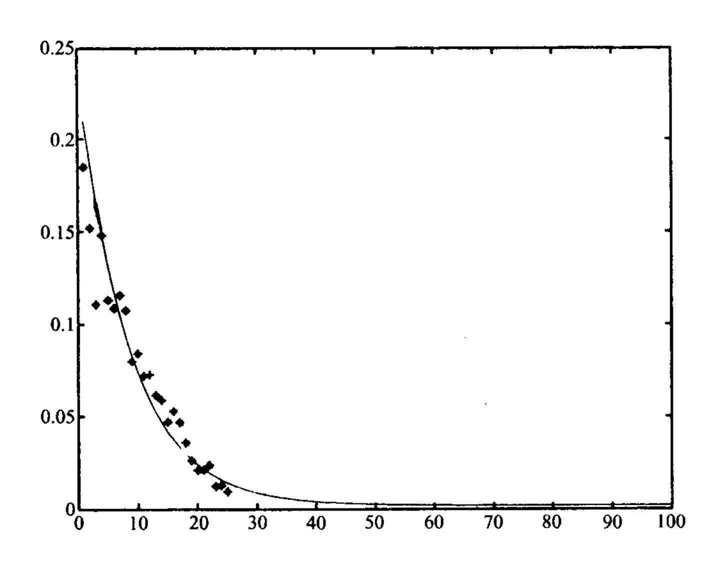


图 2.2　自由环境下的传染率曲线

2.7.2　连续模型及数值模拟结果

由框图 2.1,容易写出以下连续模型

$$
\begin{cases}
S' = a_1A - f(S,E,I,R) - d_{sp}Q + b_{sp}P, \\
E' = a_2A + f(S,E,I,R) - \varepsilon E - d_{ep}E, \\
I' = a_3A + \varepsilon E - d_{ip}I - \delta I, \\
P' = d_{ep}E + d_{sp}Q - b_{sp}P - d_{pq}P, \\
Q' = g(H,P,Q) + d_{pq}P + d_{iq}I - \delta Q - \gamma Q, \\
H' = A_h - g(H,P,Q), \\
R' = \gamma Q,
\end{cases}
\tag{2.7.4}
$$

其中

$$f(S,E,I,R) = (\beta_E C_E E + \beta_I C_I I)\frac{S}{S+E+I+R} = \frac{\beta_I C_I S}{S+E+I+R}(kE+I),$$

$$g(H,P,Q) = (\beta_P C_P P + \beta_Q C_Q Q)\frac{H}{H+P+Q} = \frac{\beta_Q C_Q H}{H+P+Q}(k_1P+Q).$$

利用模型(2.7.4)和前面从4月21日至5月16日卫生部公布的数据所测定的有关参数.通过计算机计算,对全国内地,北京、山西、内蒙等地区的流行趋势分别进行数值模拟.预测了 SARS 累计确诊病人数、就医确诊人数、高峰期、持续时间、高峰期病人数、医护人员感染规律,研究了不同控制策略对流行规律的影响,包括不同隔离强度的影响;输入病例的影响;病人延迟就诊天数的影响;在不同

时期以不同强度放弃控制的影响等.预测工作是在5月18日完成的,模拟曲线与实际统计数据吻合良好.预测结果与后来的实际情况基本一致.以下仅就全国内地的模拟情况进行介绍[44](所有预测曲线均以4月21日为时间轴的原点).

(1) 全国累计发病人数随时间变化情况及医务人员累计感染情况.

1) 全国累计发病人数随时间变化情况.

图2.3中星点为卫生部报告的实际累计病例数,实线为模型预测曲线,由图2.3可见,从5月底以后曲线趋向平稳,反映新增病人数量十分微小,累计发病人数最高可达5400左右.从5月26日以后每日新发病人数在10以下.

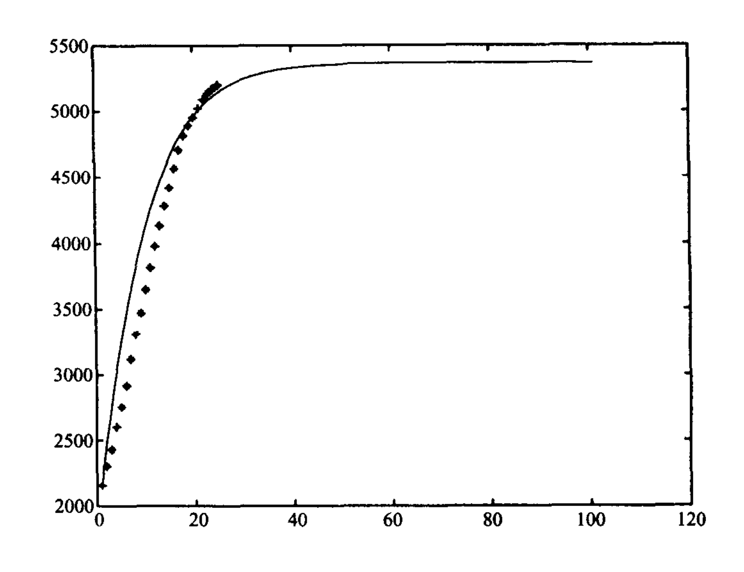


图2.3 全国累计发病人数随时间变化曲线

2) 医务人员累计感染情况.

图2.4中星点为卫生部发布的医务人员累计报告病例数,实线为模型预测的医务人员累计病人数随时间变化曲线.由图2.4可见,5月中下旬以后趋于平稳,每日新发病例为2～3例,累计发病人数最高可达990左右.

(2) 全国SARS在医病人数变化规律.

图2.5中星点为卫生部报告的当日仍在医院接受治疗的SARS确诊实际统计数据,实线为由模型通过计算预测出的全国当日仍在医院接受治疗的SARS确诊病人数随时间变化曲线.由图2.5可见,在医病人数在5月11到21日到达高峰期,此时在医人数约在3164至3277之间.

(3) 隔离强度对在医人数的影响.

1) 从4月18日开始不采取任何隔离措施的情况下SARS的流行趋势.

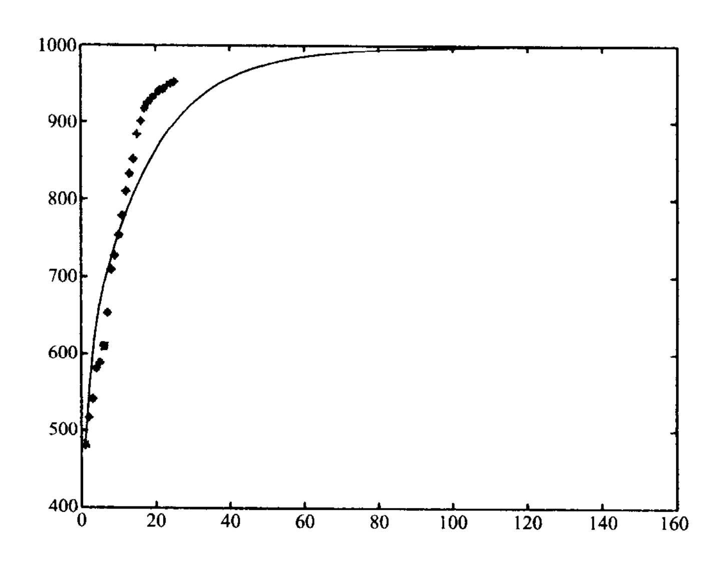


图 2.4　医务人员累计发病人数随时间变化曲线

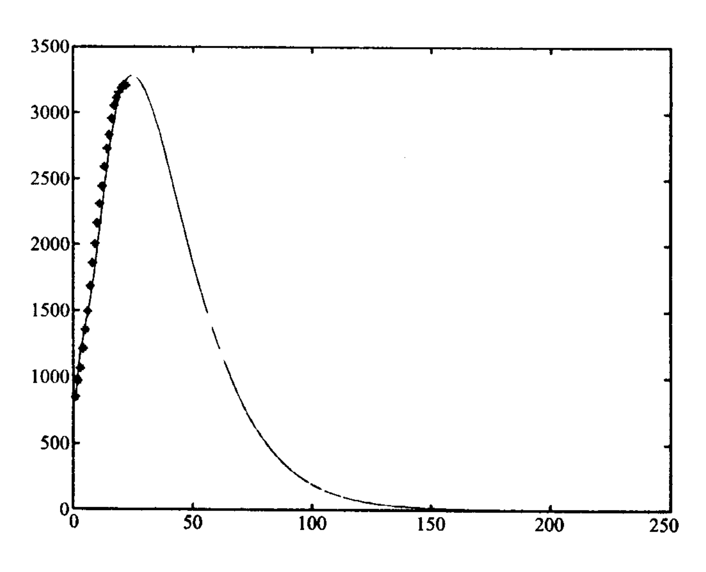


图 2.5　每日在医的 SARS 病人数曲线

假如从 4 月 18 日开始,政府不采取任何防控隔离措施,仅考虑病毒毒性自然衰减[16] 和人们对 SARS 的防范意识提高的情况,SARS 在中国大陆的流行规律将如图 2.6 中曲线所示.图中所示的发病高峰期大约在 2004 年 10 月底到 11 月底,高峰期病人数可达 450 万.高峰期过后大约经过 19 个月病人数将会下降

到 10 000 人,此后疾病会缓慢地消亡.

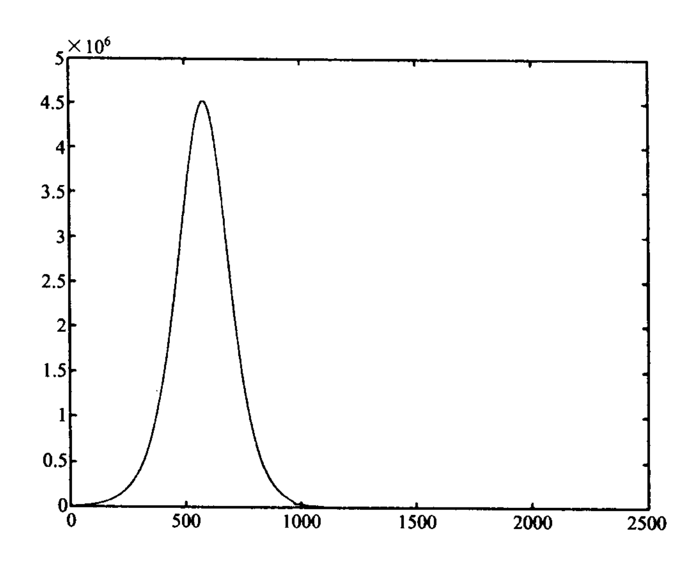


图 2.6　如果从 4 月 18 日开始不采取任何隔离措施
SARS 的流行趋势预测曲线

2) 自由环境在不同时期放宽隔离对 SARS 在全国流行趋势的影响.

图 2.7 中星点为卫生部报告的当日仍在医院接受治疗的 SARS 确诊人实际

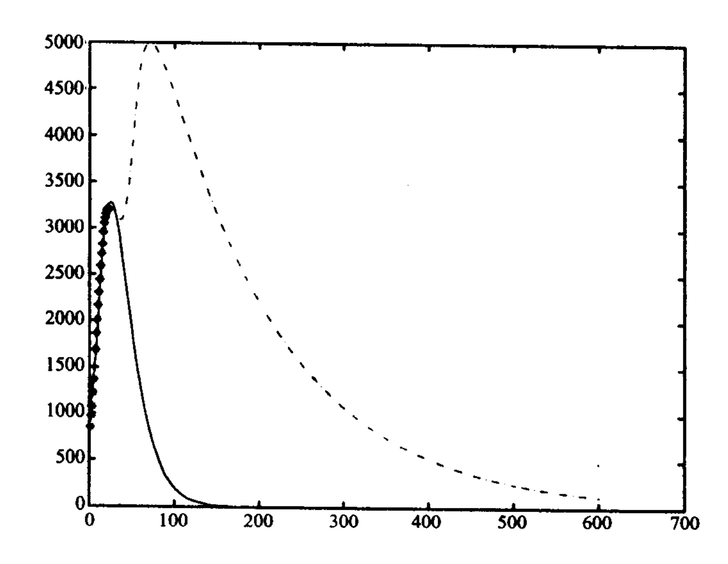


图 2.7　从 6 月 10 日开始解除隔离对 SARS 的流行趋势的影响

统计数据,实线为在现行的防控措施下由模型预测的在医病人数随时间变化曲线,点虚线为自由环境从 6 月 10 日基本解除隔离(医院仍实行现行的防控措施)由模型预测出的在医病人数随时间变化曲线. 由图 2.7 可见,若在自由环境中从 6 月 10 日基本解除隔离,将会在 6 月底出现第二次发病高峰,高峰期在医病人数可达 5000 多人,且高峰期之后下降趋势比较缓慢.

由上述预测结果可见,我国政府 4 月 18 日以来所实行的一系列隔离预防措施是非常必要且非常有效的.

(4) 迟就医对流行趋势的影响.

图 2.8 中,星点线为卫生部公布的每日在医病人数实际统计数据,实线为实行现行的防控措施下由模型计算得到的在医病人数随时间变化的曲线. 如果从 4 月 21 日起,未隔离的自由病人发病后均延迟一天就诊(隔离),那么由模型计算所得每日在医病人数的变化曲线为图 2.8 中较低的虚线所示. 如果 4 月 21 日起未隔离的自由病人发病后均延迟两天就诊(隔离),那么由模型计算所得每日在医病人数的变化曲线为图 2.8 中较高的虚线所示. 由图 2.8 可见,由于病人延迟就诊使得高峰期向后略为推迟,与原模型预测曲线相比,若延迟一天就医,在高峰期在医病人数约增加 1000 人左右,若推迟两天,在高峰期就医人数约增加 2200 人左右. 由此可见,对患病者早发现、早隔离是非常必要的.

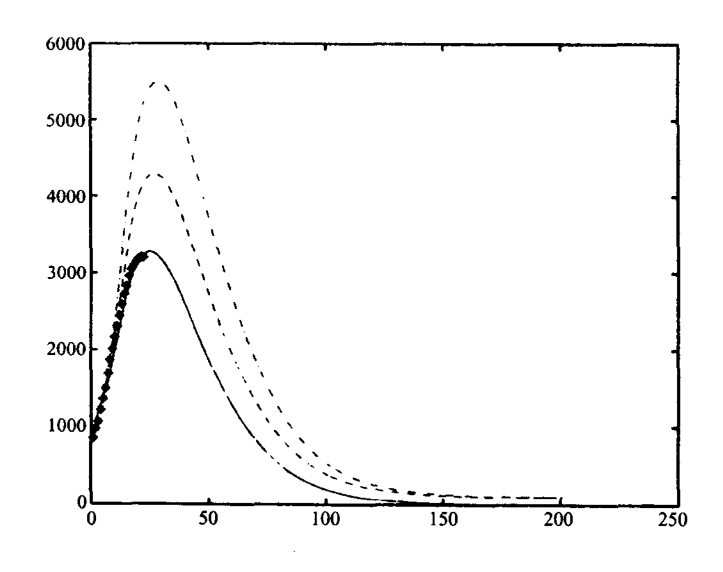


图 2.8　自由病源延迟就诊对流行趋势的影响

(5) 输入病例对流行趋势的影响.

图 2.9(局部放大图) 中,下面的线为在现行的防控状况下,由模型预测出的

每日在医院就诊的SARS确诊病人数曲线.若于4月21日从外界输入1个潜伏期病人和1个已发病的病人,在医病人数的变化曲线为图2.9中上面的曲线.在高峰期二者相差约20人左右.可见当时各地区对入境人员的严格监控措施是十分必要的.

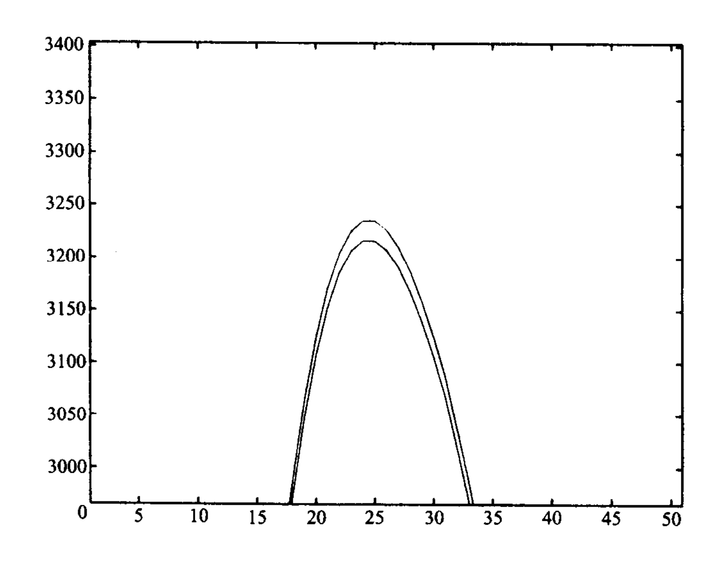


图2.9　输入自由病源对SARS流行趋势的影响

2.7.3　离散模型及其初步研究

模型的建立

类似于仓室转移框图2.1,文献[48]删去了仓室H,仅考察隔离区外的传染情况.由于进入仓室E的传染率可通过实际公布数据测算.故文献[48]也删去了仓室S,而在仓室P中仅着眼于从仓室E而来的感染潜伏者.同时,文献[48]还考虑了人口的自然死亡率系数d,不考虑输入人群.为书写方便将框图中的参数d_{ep}、d_{iq}、d_{pq}分别改记为λ、θ、σ,这样,可建立以下差分形式模型

$$\begin{cases}E(t+1)=E(t)+\beta(t)[kE(t)+I(t)]-(d+\varepsilon+\lambda)E(t),\\ I(t+1)=I(t)+\varepsilon E(t)-(d+\delta+\theta)I(t),\\ P(t+1)=P(t)+\lambda E(t)-(d+\sigma)P(t),\\ Q(t+1)=Q(t)+\theta I(t)+\sigma P(t)-(d+\delta+\gamma)Q(t),\\ R(t+1)=R(t)+\gamma Q(t)-dR(t),\\ E(0)>0,\ I(0)>0,\ P(0)>0,\ Q(0)>0,\ R(0)>0.\end{cases}\tag{2.7.5}$$

由模型和参数的实际意义不妨给出以下假设

(A_1) 所有参数均为正实数,且

$$0 < 1 - (d + \varepsilon + \lambda) < 1, \qquad 0 < 1 - (d + \delta + \theta) < 1,$$
$$0 < 1 - (d + \sigma) < 1, \qquad 0 < 1 - (d + \delta + \gamma) < 1.$$

(A_2) 传染率 $\beta(t)$ 连续有界且 $\beta_0 \leqslant \beta(t) \leqslant \beta^*$,其中 β_0 与 β^* 为正常数. 令

$$\boldsymbol{x}(t) = (E(t), I(t), P(t), Q(t), R(t))^\tau,$$

$$\boldsymbol{A}(\beta(t)) =$$
$$\begin{bmatrix} 1 + k\beta(t) - (d + \varepsilon + \lambda) & \beta(t) & 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon & 1 - (d + \delta + \theta) & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & 1 - (d + \sigma) & 0 & 0 \\ 0 & \theta & \sigma & 1 - (d + \delta + \gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma & 1 - d \end{bmatrix},$$

其中 τ 表向量的转置. 于是模型(2.7.5),可写成下列向量形式

$$\boldsymbol{x}(t+1) = \boldsymbol{A}(\beta(t))\boldsymbol{x}(t), \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 > \boldsymbol{0}. \tag{2.7.6}$$

由方程(2.7.6) 的递推关系解得

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{A}(\beta(t-1))\boldsymbol{A}(\beta(t-2))\cdots\boldsymbol{A}(\beta(0))\boldsymbol{x}(0). \tag{2.7.7}$$

无病平衡点的全局稳定性

容易看出,方程(2.7.6) 仅有惟一平衡点 $M_0(0,0,0,0,0)$,它就是无病平衡点. 由解的表达式(2.7.7) 可见,M_0 点稳定性取决于矩阵 $\boldsymbol{A}(\beta(t-1))\cdots\boldsymbol{A}(\beta(0))$ 的乘积. 为了研究这一乘积需要下面的比较定理.

定理 2.7.1　设条件(A_1)、(A_2) 成立,并设 $\boldsymbol{u}(t)$、$\boldsymbol{x}(t)$ 与 $\boldsymbol{v}(t)$ 分别是具有相同初值的下列差分方程的解:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}(t+1) &= \boldsymbol{A}(\beta_0)\boldsymbol{u}(t), & \boldsymbol{u}(0) &= \boldsymbol{x}_0 > \boldsymbol{0}, \\ \boldsymbol{x}(t+1) &= \boldsymbol{A}(\beta(t))\boldsymbol{x}(t), & \boldsymbol{x}(0) &= \boldsymbol{x}_0 > \boldsymbol{0}, \\ \boldsymbol{v}(t+1) &= \boldsymbol{A}(\beta^*)\boldsymbol{v}(t), & \boldsymbol{v}(0) &= \boldsymbol{x}_0 > \boldsymbol{0}, \end{aligned} \tag{2.7.8}$$

则对一切 $t > 0$,有

$$\boldsymbol{u}(t) \leqslant \boldsymbol{x}(t) \leqslant \boldsymbol{v}(t). \tag{2.7.9}$$

证明　由条件(A_1) 和(A_2) 易见解 $\boldsymbol{u}(t)$、$\boldsymbol{x}(t)$ 均是非负的. 下面用数学归纳法来证明(2.7.9) 式成立.

由(2.7.8) 式可见

$$\boldsymbol{x}(1) - \boldsymbol{u}(1) = [\boldsymbol{A}(\beta(0)) - \boldsymbol{A}(\beta_0)]\boldsymbol{x}_0 \geqslant \boldsymbol{0},$$
$$\boldsymbol{v}(1) - \boldsymbol{x}(1) = [\boldsymbol{A}(\beta^*) - \boldsymbol{A}(\beta(0))]\boldsymbol{x}_0 \geqslant \boldsymbol{0}.$$

从而

$$\boldsymbol{u}(1) \leqslant \boldsymbol{x}(1) \leqslant \boldsymbol{v}(1).$$

假设对任一正整数 t 有

$$u(t) \leqslant x(t) \leqslant v(t),$$

从而

$$\zeta(t) \triangleq x(t) - u(t) \geqslant 0, \quad \eta(t) \triangleq v(t) - x(t) \geqslant 0.$$

于是

$$x(t+1) - u(t+1) = [A(\beta(t)) - A(\beta_0)]u(t) + A(\beta(t))\zeta(t) \geqslant 0,$$

$$v(t+1) - x(t+1) = [A(\beta^*) - A(\beta(t))]x(t) + A(\beta^*)\eta(t) \geqslant 0.$$

由数学归纳法可知,对一切正整数 $t > 0$ 有(2.7.9)式成立.

为了研究模型(2.7.6),我们考察下列两个辅助方程

$$v(t+1) = A(\beta^*)v(t), \quad v(0) = x_0 > 0, \tag{2.7.10}$$

$$u(t+1) = A(\beta_0)u(t), \quad u(0) = x_0 > 0. \tag{2.7.11}$$

由比较定理 2.7.1 可知,(2.7.10) 与(2.7.11) 的解分别给出了模型(2.7.6) 相应解的上界和下界. 而(2.7.10) 与(2.7.11) 都是一常系数差分方程,统一表示为

$$w(t+1) = A(\beta)w(t), \quad w(0) = x_0 > 0, \tag{2.7.12}$$

其中 β 为常数. 下面先来研究方程(2.7.12) 解的性态.

方程(2.7.12) 的解为

$$w(t) = [A(\beta)]^t x_0 \geqslant 0, \tag{2.7.13}$$

其解的性态完全决定于矩阵 $A(\beta)$ 特征根的大小. 易知 $A(\beta)$ 的特征方程为

$$\begin{aligned} f(\rho) &\triangleq |A(\beta) - \rho I| \\ &= (\rho^2 - b\rho + c)[\rho - (1-d)][\rho - (1-d-\delta-\gamma)][\rho - (1-d-\sigma)] \\ &= 0, \end{aligned} \tag{2.7.14}$$

其中

$$b = 2 + k\beta - (2d + \varepsilon + \lambda + \delta + \theta),$$

$$c = (1 - d - \delta - \theta)(1 + k\beta - d - \varepsilon - \lambda) - \varepsilon\beta.$$

特征方程(2.7.14) 的 5 个根均为实根:

$$\rho_1 = 1 - d, \quad \rho_2 = 1 - (d + \sigma), \quad \rho_3 = 1 - (d + \delta + \gamma),$$

$$\rho_4 = \frac{1}{2}(b + \sqrt{b^2 - 4c}), \quad \rho_5 = \frac{1}{2}(b - \sqrt{b^2 - 4c}),$$

其中 $b^2 - 4c = (k\beta + \delta + \theta - \varepsilon - \lambda)^2 + 4\varepsilon\beta > 0$.

显见,$0 < \rho_j < 1 (j = 1,2,3)$,因此无病平衡点 M_0 的稳定性取决于特征根 ρ_4 与 ρ_5. 如果 ρ_4 与 ρ_5 均位于区间$(-1,1)$ 内,则由解的表达式(2.7.13) 易证,当 $t \to +\infty$ 时 $W(t) \to 0$,从而(2.7.12) 的零解将是全局渐近稳定;若 ρ_4 或 $|\rho_5|$ 大于 1,则零解将 不稳定. 为了考察 ρ_4 与 ρ_5,我们先观察临界情况. 令

$$\rho_4 = 1, \qquad \rho_5 = -1.$$

由 ρ_4 与 ρ_5 的表达式可见它们是 β 的连续函数. 当 $\beta = 0$ 时有

$$0 < \rho_4 = 1 - (d + \varepsilon + \lambda) < 1, \text{若 } \delta + \theta \geqslant \varepsilon + \lambda;$$

$$0 < \rho_4 = 1 - (d + \delta + \theta) < 1, \text{若 } \delta + \theta < \varepsilon + \lambda;$$

$$0 < \rho_5 = 1 - (d + \varepsilon + \lambda) < 1, \text{若 } \delta + \theta < \varepsilon + \lambda;$$

$$0 < \rho_5 = 1 - (d + \delta + \theta) < 1, \text{若 } \delta + \theta \geqslant \varepsilon + \lambda.$$

$b^2 - 4c > 0$ 表明 ρ_4 与 ρ_5 均是二次方程

$$\rho^2 - b\rho + c = 0 \tag{2.7.15}$$

的单根,且 $2\rho_j = b \pm \sqrt{b^2 - 4c} \neq b\ (j = 4,5)$. 将方程(2.7.15)两端对 β 求导得

$$\frac{\partial \rho}{\partial \beta} = \frac{k\rho - k(1 - d - \delta - \theta) + \varepsilon}{2\rho - b}.$$

从而

$$\left.\frac{\partial \rho_4}{\partial \beta}\right|_{\rho_4 = 1} = \frac{k(d + \delta + \theta) + \varepsilon}{\sqrt{b^2 - 4c}}, \quad \left.\frac{\partial \rho_5}{\partial \beta}\right|_{\rho_5 = -1} = \frac{-k(2 - d - \delta - \theta) + \varepsilon}{-\sqrt{b^2 - 4c}}.$$

可见,在平面 $\beta o \rho_4$ 的直线 $\rho_4 = 1$ 上,ρ_4 总是关于 β 单调增,这意味着 ρ_4 一旦越出 $\rho_4 = 1$ 就不可能再返回区域:$\rho_4 < 1$. 即仅存在惟一的临界点

$$\beta = \frac{(d + \varepsilon + \lambda)(d + \delta + \theta)}{\varepsilon + k(d + \delta + \theta)} \triangleq \beta_1,$$

使得当 $\beta < \beta_1$ 时,$0 < \rho_4 < 1$;而当 $\beta > \beta_1$ 时,$\rho_4 > 1$.

类似地对 ρ_5 进行讨论可知,若 $\varepsilon \leqslant k(2 - d - \delta - \theta)$,则不存在使 $\rho_5 = -1$ 的临界点 β;若 $\varepsilon > k(2 - d - \delta - \theta)$,则存在惟一的临界点:

$$\beta = \frac{4 + (1 - d - \delta - \theta)(1 - d - \varepsilon - \lambda) - (2d + \varepsilon + \lambda + \delta + \theta)}{\varepsilon - k(2 - d - \delta - \theta)} \triangleq \beta_2,$$

使得当 $\beta < \beta_2$ 时,$\rho_5 > -1$;而当 $\beta > \beta_2$ 时,$\rho_5 < -1$.

不难验证,当 $\varepsilon > k(2 - d - \delta - \theta)$ 成立时有

$$\beta_2 - \beta_1 = \frac{[5 - 2(2d + \varepsilon + \lambda + \delta + \theta)][(\varepsilon + k(d + \delta + \theta))] + 2k(d + \varepsilon + \lambda)(d + \delta + \theta)}{[\varepsilon + k(d + \delta + \theta)][\varepsilon + k(d + \delta + \theta) - 2k]} > 0.$$

上述不等式 $\beta_2 > \beta_1$ 表明:使 ρ_4 增至1的 β_1 要小于使 ρ_5 减至 -1 的 β_2. 因此,当 $\beta < \beta_1$,即 $\rho_4 < 1$ 时方程(2.7.12)的5个特征根均满足 $0 < |\rho_j| < 1 (j = 1,\cdots,5)$.

记 ρ_j 所对应的特征向量为 $w_j (j = 1,\cdots,5)$. 它们对应于不同的特征值,故线性独立,于是相应的5维欧氏空间 R^5 内任一向量 w 均可表示为这些特征向量的

线性组合：

$$\boldsymbol{w} = c_1\boldsymbol{w}_1 + c_2\boldsymbol{w}_2 + c_3\boldsymbol{w}_3 + c_4\boldsymbol{w}_4 + c_5\boldsymbol{w}_5,$$

其中

$$\boldsymbol{w}_4 = \left(1, \frac{\varepsilon}{d+\delta}, \frac{\lambda}{d+\sigma}, \frac{1}{d+\delta+\gamma}\left(\frac{\theta\varepsilon}{d+\delta+\theta}+\frac{\sigma\lambda}{d+\sigma}\right), \frac{\gamma}{d(d+\delta+\gamma)}\left(\frac{\theta\varepsilon}{d+\delta+\theta}+\frac{\sigma\lambda}{d+\sigma}\right)\right)^{\tau}.$$

应用方程(2.7.12)的解的表达式(2.7.13)可得

$$\boldsymbol{w}(t) = c_1\rho_1^t\boldsymbol{w}_1 + c_2\rho_2^t\boldsymbol{w}_2 + c_3\rho_3^t\boldsymbol{w}_3 + c_4\rho_4^t\boldsymbol{w}_4 + c_5\rho_5^t\boldsymbol{w}_5.$$

由此可知

$$\text{当 } \rho_4 < 1 \text{ 时}, \quad \lim_{t\to+\infty}\boldsymbol{w}(t) = \boldsymbol{0};$$
$$\text{当 } \rho_4 > 1 \text{ 时}, \quad \lim_{t\to+\infty}\boldsymbol{w}(t) = +\infty;$$
$$\text{当 } \rho_4 = 1 \text{ 时}, \quad \lim_{t\to+\infty}\boldsymbol{w}(t) = c_4\boldsymbol{w}_4.$$

注意到 $\beta_0 \leqslant \beta(t) \leqslant \beta^*\ (t \geqslant 0)$，分别取 $\beta = \beta^*$ 与 β_0，应用比较定理2.7.1可得以下结论.

定理2.7.2　考察SARS模型(2.7.6)，若 $\beta_0 \leqslant \beta(t) \leqslant \beta^*\ (t \geqslant 0)$，则当 $\beta^* < \beta_1$ 时，无病平衡点 M_0 是全局渐近稳定的；当 $\beta_0 > \beta_1$ 时，M_0 是不稳定的.

基本再生数

令

$$\overline{R}_0 = \frac{\beta^*(\varepsilon + k(d+\delta+\theta))}{(d+\varepsilon+\lambda)(d+\delta+\theta)}, \quad \underline{R}_0 = \frac{\beta_0(\varepsilon + k(d+\delta+\theta))}{(d+\varepsilon+\lambda)(d+\delta+\theta)}.$$

称其为时变传染病系统的两个基本再生数.

容易验证 $\overline{R}_0$ 与 $\underline{R}_0$ 可分别改写成

$$\overline{R}_0 = k\beta^* \cdot \frac{1}{d+\varepsilon+\lambda} + \beta^*\left(\frac{\varepsilon}{d+\varepsilon+\lambda}\cdot\frac{1}{d+\delta+\theta}\right), \tag{2.7.16}$$

$$\underline{R}_0 = k\beta_0\frac{1}{d+\varepsilon+\lambda} + \beta_0\left(\frac{\varepsilon}{d+\varepsilon+\lambda}\cdot\frac{1}{d+\delta+\theta}\right). \tag{2.7.17}$$

利用特征值的表达式容易验证，当 $\overline{R}_0 < 1$ 时 $\rho_4 < 1$，即 $\beta^* < \beta_1$，从而 M_0 全局渐近稳定；当 $\underline{R}_0 > 1$ 时 $\rho_4 > 1$，即 $\beta_0 > \beta_1$，从而 M_0 不稳定.

$\overline{R}_0$ 与 $\underline{R}_0$ 有明显的流行病学意义. 以 $\overline{R}_0$ 为例，(2.7.16) 中 $\frac{1}{d+\varepsilon+\lambda}$ 是SARS的平均潜伏期；β^* 是传染率的最大值；k 是潜伏期中传染率与发病期中传染率之比；$\frac{1}{d+\delta+\theta}$ 是病人在仓室 I 中平均停留时间，即发病后到进入隔离前的平均时间，$\frac{\varepsilon}{d+\varepsilon+\lambda}$ 是潜伏者进入自由发病者 I 的比例. 于是(2.7.16) 右端

第一项表示若以最大传染率传染，一个潜伏者在潜伏期内最多能传染的人数；而第二项表示此潜伏者发展成为未被隔离的发病者后在其未被隔离期间最多所感染的人数. 因而当 $\overline{R}_0$ 表示平均一个未被隔离的病毒携带者在其潜伏期和尚未隔离的发病期 间(即能传染他人的整个病程中) 所能传染普通易感者的最多人数. 显然当 $\overline{R}_0 < 1$ 时病人必然逐渐衰减而最终疾病绝灭；同理当 $\underline{R}_0$ 表示平均一个病毒携带者在其整个病程中所能传染的普通易感者的最少人数. 所以当 $\underline{R}_0 > 1$ 时，当然病人会越来越多.

数值模拟

文献[48] 通过对卫生部公布数据的拟合选用了

$$\beta(t) = \frac{31 + t}{22 + 5t},$$

利用相关的其它参数并添加了医护人员在隔离区内的感染情况对 SARS 在我国的流行趋势进行了预测，所得结果与 2.7.1 节中连续模型所预测的结果基本一致.

为了研究传染率曲线 $\beta(t) = \dfrac{31 + t}{22 + 5t}$ 对流行趋势的敏感性，根据本节所述理论计算出的临界值 $\beta_1^* = 0.6781$，我们对 $\beta(t)$ 选取了三个不同的常数值：

$$\beta_1 = 0.7, \quad \beta_2 = 0.6781, \quad \beta_3 = 0.3,$$

获得的三条不同的在医确诊病人数曲线(即 $Q(t)$) 分别如图 2.10 ~ 2.12 所示.

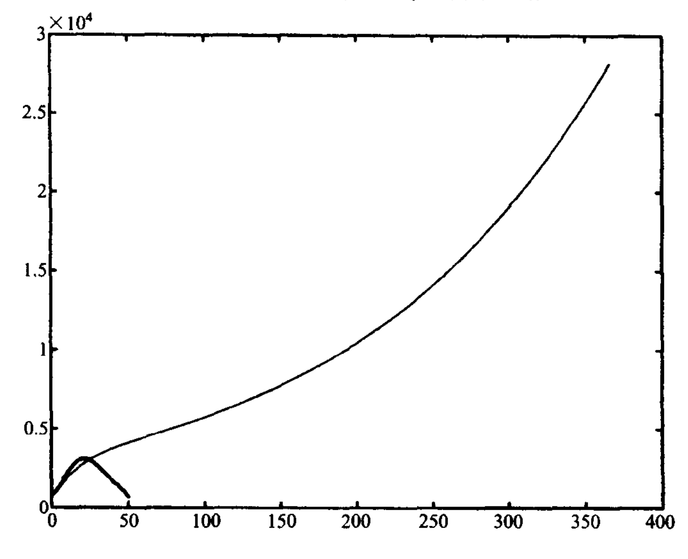


图 2.10　$\beta = \beta_1$ 时全国每日在医病人数曲线

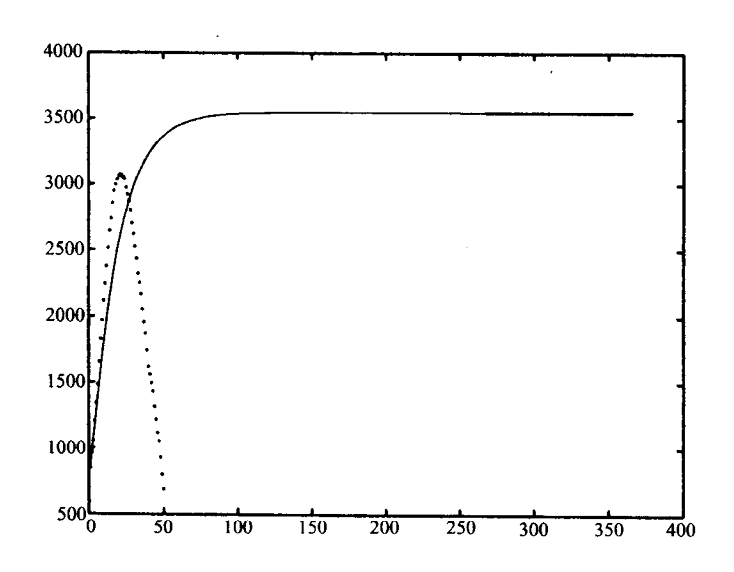


图 2.11　$\beta = \beta_2$ 时全国每日在医病人数曲线

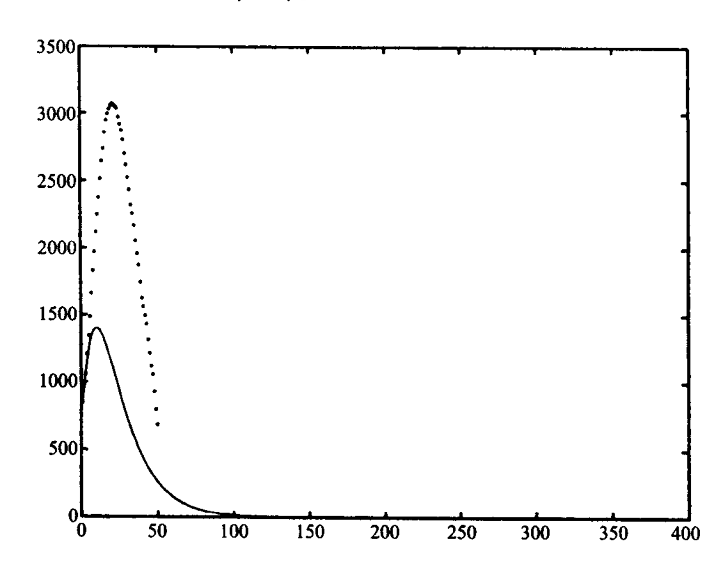


图 2.12　$\beta = \beta_3$ 时全国每日在医确诊病人数曲线

图 2.11 显示，若 β 取临界值 $\beta_2 = 0.6781$ 时，在医确诊病人数将单调上升逐渐达到稳定值 $Q = 3548$；图 2.10 显示，若取 β 为略高临界值的 $\beta_1 = 0.7$ 时，在医确诊病人数将单调增加并在 1 年之后达到 28 060 人；由图 2.12 可见，若取 $\beta =$

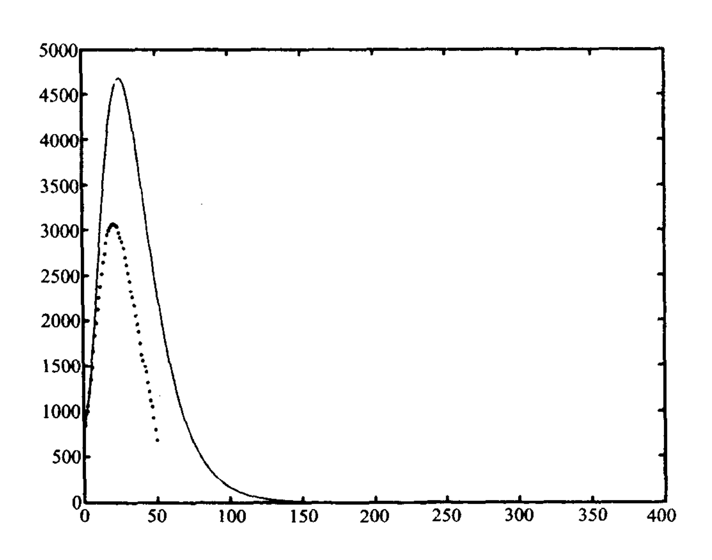


图 2.13　$k = 0.2$ 时在医确诊病人数曲线

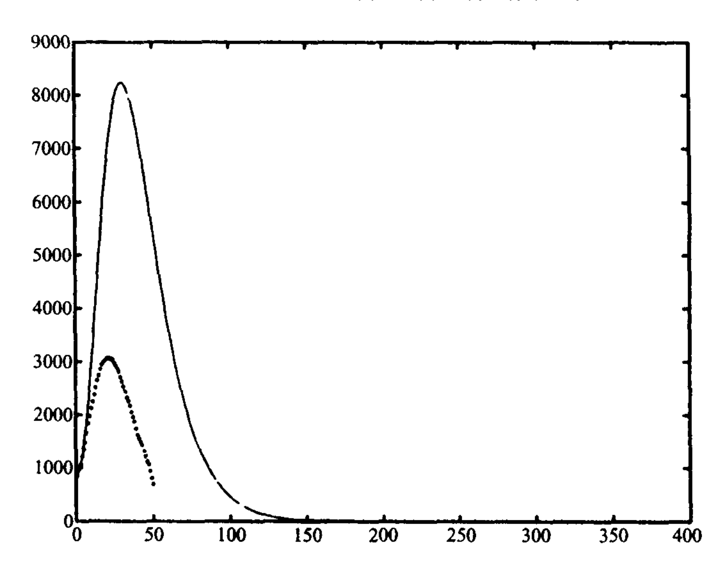


图 2.14　$k = 0.3$ 时在医确诊病人数曲线

$\beta_3 = 0.3$ 时，在医确诊病人数总低于用拟合的传染率 $\beta(t)$ 所算出的在医确诊病人数曲线，而其峰值在 4 月底出现，其值为 $Q = 1403$.

文献[48] 中的预测也是在设 $k = 0.1$ 的条件下作出的. 如果保持其它参数不变而仅分别取 $k = 0.2$ 与 0.3，则相应的在医确诊病人数曲线分别如图 2.13

与图2.14所示.由图可见,若潜伏期病毒携带者的传染率提高1倍,即 $k=0.2$,则在医确诊病人数的高峰将在5月15日出现其值为4682人;若 $k=0.3$,则高峰期将在5月20日出现,其值为8227人.可见对于潜伏期有传染力的疾病,其潜伏期传染力的准确估计是不容忽视的,而且不仅对发病者的早发现早隔离十分重要,对潜伏者的早发现早隔离也是十分重要的.

参考文献

[1] R E Bellman, K L Cooke. Differential-Difference Equations. New York: Academic Press, 1963

[2] J K Hale. Theory of Functional Differential Equations. Springer Verlag, 1977

[3] 郑祖庥.泛函微分方程理论.合肥:安徽教育出版社,1994

[4] Y Kuang. Delay Differential Equation with Applications in Population Dynamics. Boston: Academic press. Inc. 1993

[5] F Brauer, C Castillo-Chavez. Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology. Texts in Applied Mathematics 40, Springer, 2001

[6] J Q Li, Z E Ma. Global stability of two epidemic models with vaccination (to appear)

[7] F R Sherpe, A J Lotka. A problem in age distribution. Phil. May. 1911, (21): 435~348

[8] G F Webb. A semigroup proof of the sharpe-Lotka theorem. The international conference on operator semigroup and applications. Austria, 1983, 254~268

[9] 马知恩.种群生态学的数学建模与研究.合肥:安徽教育出版社,1996

[10] H Hethcote. The mathematics of infectious diseases. SIAM Review, 2000, 42: 599~653

[11] J Hyman, J Li. An intuitive formulation for the reproductive number for the spread of diseases in heterogeneous populations. Math. Biosci., 2000, 167: 65~86

[12] Z E Ma, J P Liu, J Li. Stability analysis for differential infectivity epidemic models. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2003, 4: 841~856

[13] C Castillo-Chavez, W Z Huang, J Li. Competitive exclusion in gonorrhea models and other sexually transmitted diseases. SIAM J. Applied Math, 1996, 56: 494~508

[14] J Li, Z E Ma, S P Blythe, C Castillo-Chavez. Coexistence of pathogens in sexually-transmitted disease models. J. Math. Biol., 2003, 47: 547~568

[15] R M Anderson, R M May. The invasion, persistence, and spread of infectious diseases within animal and plant communites, Phil. Trans. R. Soc. London, 1986, (B314): 533~570

[16] E Venturino. Epidemics in predator-prey models: disease in the prey, In: Mathematical Population Dynamics: Analysis of heterogeneity, one: Theory of Epidemics (Edited by O Arion, D Axelrod, M Kimmel and M Langlais), Canada: Wuerz publishing, Winnipeg, 1995, 381~393

[17] Y N Xiao, L S Chen. Modeling and analysis of a predator-prey model with disease in the prey. Math. Biosci. 2001, 171: 59~82

[18] R G Bowers, M Begon. A host-host-pathogen model with free living infective stages, appli-

cable to microbial pest control. J. Theor. Biol., 1991, 148: 305～329

[19] M Begon, R G Bowers, N Kadianakis, D E Hodgkinson. Disease and community structure: the importance of host-regulation in a host-host-pathogen model. Am. Nat., 1992, 139: 1131～1150

[20] M Begon, R G Bowers. Host-host-pathogen models and microbial pest control: the effect of host self-regulation. J. Theor. Biol., 1995, 169: 275～287

[21] K P Hadeler, H I Freedman. Predator-Prey populations with parasitic infection. J. Math. Biol., 1989, 27: 609～631

[22] L T Han, Z E Ma, H W Hethcote. Four predator-prey models with infectious diseases. Mathl. Comput. Modelling, 2001, 34: 849～858

[23] L T Han, Z E Ma, S Tan. An SIRS epidemic model of two competitive species. Mathl. Comput. Modelling 2003, 37: 87～108

[24] J L Ma, Z E Ma. Time variant SIR epidemiological models (to appear).

[25] 史金麟.线性微分方程系特征根理论.数学年刊, 1986, 7A(3): 255～273

[26] D D Bainov, P S Simeonov. Impulsive differential equations. World Scientific, 1995

[27] 郭大钧,孙经先,刘兆理.非线性泛函方法.济南:山东科技出版社, 1995

[28] J A P Heesterbeek, M G Roberts. Threshold quantities for helminth infections. J. Math. Biol., 1995, 33: 415

[29] 靳祯,马知恩.具有连续和脉冲接种的SIR流行病模型.华北工学院学报, 2003(4): 235～243

[30] H Hethcote. Qualitative analyses of communicable disease models. Math. Biosci. 1976, 28: 335～356

[31] F Brauer, P Van den Driessche. Models for transmission of disease with immigration of infectives. Math. Biosci., 2001, 171: 143～154

[32] 王稳地.斑块环境中的传染病模型.博士论文, 2002

[33] K Cooke, P Van den Driessche, X Zou. Interaction of maturation delay and nonlinear birth in population and epidemic models. J. Math. Biol. 1999, 39: 332～252

[34] J P LaSalle (译者:陆征一).动力系统的稳定性.成都:四川科学技术出版社, 2002

[35] C Costill-Chavez, H R Thieme. Asymptotically autonomous epidemic models. In: O Arino et al. (Eds.). Math. Population Dynamics: Analysis of Heterogeneity I. Theory of Epidemics, Wuerz, 1995, 33

[36] 世界卫生组织和美国CDC介绍SARS的传播. htlp://www.moh.gov.cn/was40.delail?record=14&channelid=8085&searchword=%B7%C7%B5%E4%D2%DF%c3%E7

[37] 中国卫生部.科学家揭示非典传播五大特点未发现潜伏期会传染. http://www.moh.gov.cn/zhgl/xgxx/fzzsjs/1200305220064.htm

[38] WHO. http://www.who.int/csr/sars/conntry/2003_06_13/en/

[39] 中国卫生部. http://168.160.244.167/sarsmap/

[40] M Lipsitch, et al. Transmission dynamics and control of severe acute respiratory syndrome,

Published online May 23,2003;10.1126/science.1086616(Science Express Reports)

[41] S Riley, et al. Transmission dynamics of the etiological agent of SARS in Hong Kong: impact of public health interventions, Published online May 23,2003; 10.1126/Science.1086478(Science Express Reports)

[42] C A Donnelly et al., Epidemiological determinates of spread of causal agent of severe acute respiratory syndrome in Hong Kong, The Lancent, Publish online May 7,2003, http://image.thelacent.com/extras/03 art 4453 web.psf

[43] G Chowell, et al. SARS outbreak in Ontario, Hong Kong and Singapore: the role of diagnosis and isolation as a control mechanism, Los Alamos Unclassified Report LA-UR-03-2653, 2003

[44] A compartmental model for the analysis of SARS transmission patterns and outbreak control measures in china. (to appear) on Appl. Math. and computations

[45] 中国卫生部."非典"临床表现与预防治疗 55 问. http://www.moh.gov.cn/zhgl/xgxx/fzzsjs/1200304290124.htm

[46] 绕克勤,徐德忠.5 月 9 日在中央电视台的焦点访谈节目上的谈话

[47] 中国卫生部.5 月关于传染性非典型肺炎新闻发布会

[48] Zhou Yicang, Ma Zhien, Fred Brauer. A discrete epidemic model for SARS transmission and contral in China(to appear).

[49] Y N Xiao, L S Chen, F V D Bosch. Dynamical behavior for a stage-structured SIR infectious disease model. Nonlinear Analysis: RWA, 2002, 3: 175～190

[50] Y N Xiao, L S Chen, On an SIS epidemic model with stage structure. J. of System Science and Complexity, 2003, 16: 275～288

[51] Y N Xiao, L S Chen, An SIS epidemic model with stage structure and a delay. Acta Math. Appl. Sinica, English Series, 2002, 18: 607～618

[52] Z H Lu, S J Gang, L S Chen. Analysis of an SI epidemic model with nonlinear transmission and stage structure. Acta Math. Scientia, 2003, 4: 440～446

[53] Y N Xiao. L S Chen, A ratio-dependent predator-prey model with disease in the prey. Appl. Math. Comput. 2002, 131: 397～414

[54] Y L Shi. Stochastic dynamic model of SARS Spreading. Chinese Sci. Bull. 2003, 13: 1287～1292

[55] 王正行,张建玮,唐毅南.北京 SARS 疫情定势的模型分析与预测.物理,2003,5:341～344

[56] 吴开琛,吴开录,陈文江,林明和,李才旭.SARS 传播模型与流行趋势预测研究.中国热带医学,2003,4:421～426

第 3 章　常微分方程传染病模型

本章主要讨论由常微分方程所描述的传染病模型的有关研究方法及主要结论,研究内容将按模型的类型安排,重点研究不同模型的数学研究方法及证明思路,并将详细讨论常数人口和添加种群动力学因素的传染病模型,特别是近几年新的研究结果和方法,对非自治的传染病模型也将做一些介绍.

§3.1　总人口是常数的传染病模型

总人口是常数的传染病模型是最简单的一类传染病模型,研究得比较彻底,结果也非常完善.一类是不考虑出生与自然死亡等的种群动力学因素的模型,这类模型在第一章已做介绍.另一类是考虑人口的出生与自然死亡等因素、但总人口是常数的传染病模型,这是本节主要研究对象.

3.1.1　疾病的发生率是双线性的 SIR,SIRS 模型

SIR 传染病模型

考虑有出生和死亡的 SIR 模型,设 N 是总人口,S 是易感者类及其数量,I 是染病者类及数量,R 是移出者类及数量.则总人口满足

$$N = S + I + R. \tag{3.1.1}$$

进一步假设在疾病流行期间,人口的出生率系数和自然死亡率系数相等,其值为 b,不考虑因病死亡,且设生的新生儿都是易感者,疾病的发生率为双线性 βSI,γ 是恢复率系数.染病者移出后不再被传染,则传染病流行的框图为

$$bN \longrightarrow \boxed{S} \xrightarrow{\beta SI} \boxed{I} \xrightarrow{\gamma I} \boxed{R}$$

$$\downarrow bS \qquad\qquad \downarrow bI \qquad\qquad \downarrow bR$$

其 Kermack-Mckendrick 的 SIR 仓室模型为

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = bN - \beta SI - bS, \\ \dfrac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I - bI, \\ \dfrac{dR}{dt} = \gamma I - bR. \end{cases} \tag{3.1.2}$$

将方程组(3.1.2)的三个方程两端分别相加,得

$$\frac{\mathrm{d}(S+I+R)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=0,$$

即

$$N(t)=S(t)+I(t)+R(t)=K(\text{常数}).$$

由于方程组(3.1.2)中的前两个方程不含 R,故实际上只须讨论(3.1.2)的前两个方程

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=bK-\beta SI-bS,\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=\beta SI-\gamma I-bI.\end{cases}\tag{3.1.3}$$

对于方程组(3.1.3),在§1.1中已给出其基本再生数 $R_0=\dfrac{\beta K}{b+\gamma}$ 及无病平衡点 $E_0(K,0)$,当 $R_0>1$ 时,有地方病平衡点 $E_+\left(\dfrac{b+\gamma}{\beta},\dfrac{b[\beta K-(b+\gamma)]}{\beta(b+\gamma)}\right)$,并给出了下述定理.

定理 3.1.1 当 $R_0<1$ 时,方程(3.1.3)的无病平衡点 E_0 全局渐近稳定;当 $R_0>1$ 时,无病平衡点不稳定,地方病平衡点 E_+ 全局渐近稳定.

SIRS 模型

考虑总人口是常数 K 的 SIRS 模型,其传染过程为

$$bN\rightarrow\boxed{S}\xrightarrow{\beta SI}\boxed{I}\xrightarrow{\gamma I}\boxed{R}\xrightarrow{\alpha R}\boxed{S}$$

(其中 $\boxed{S}\downarrow bS$,$\boxed{I}\downarrow bI$,$\boxed{R}\downarrow bR$)

相应的动力学方程为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=bN-\beta SI-bS+\alpha R,\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=\beta SI-bI-\gamma I,\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}=\gamma I-bR-\alpha R,\end{cases}\tag{3.1.4}$$

其中 α 是丧失免疫的比例,简称**免疫丧失率系数**.模型(3.1.4)与(3.1.2)的主要区别在于,(3.1.4)考虑了移出者类 R 丧失免疫力而再次被感染.从方程(3.1.4)可看出,总人口 N 仍然为常数,即

$$N(t)=S+I+R=K.$$

把 $R=K-S-I$ 代入方程(3.1.4)可得

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=(b+\alpha)K-\beta SI-(b+\alpha)S-\alpha I,\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=\beta SI-bI-\gamma I.\end{cases}\tag{3.1.5}$$

方程(3.1.5)有无病平衡点 $E_0(K,0)$,且当 $R_0 = \frac{\beta K}{b+\gamma} > 1$ 时,也存在地方病平衡点 $E_+\left(\frac{b+\gamma}{\beta}, \frac{(b+\alpha)[\beta K-(b+\gamma)]}{\beta(b+\alpha+\gamma)}\right) = E_+(S^+, I^+)$.

平衡点的稳定性

下面利用 LaSalle 不变性原理来研究方程(3.1.5)平衡点的稳定性.

定理3.1.2　对方程(3.1.5),若 $R_0 \leqslant 1$,则地方病平衡点不存在,无病平衡点 E_0 全局渐近稳定.若 $R_0 > 1$,无病平衡点 E_0 不稳定,地方病平衡点 E_+ 全局渐近稳定.

证明　令

$$D = \{(S,I) \in R^2 \mid 0 \leqslant S + I \leqslant K, S \geqslant 0, I \geqslant 0\}.$$

显然 D 是方程(3.1.5)的正向不变集.

1) 当 $R_0 = \frac{\beta K}{b+\gamma} \leqslant 1$ 时,(3.1.5)在 D 内有惟一的无病平衡点 $E_0(K,0)$.在 E_0 点,方程(3.1.5)的线性化系统的系数矩阵为

$$\begin{bmatrix} -(b+\alpha) & -\beta K-\alpha \\ 0 & \beta K-b-\gamma \end{bmatrix}.$$

它有两个特征根分别为 $\lambda_1 = -(b+\alpha)$, $\lambda_2 = \beta K - b - \gamma$.故当 $R_0 \leqslant 1$ 时,平衡点 E_0 局部稳定;当 $R_0 > 1$ 时,E_0 点不稳定.下面证明当 $R_0 \leqslant 1$ 时,E_0 是全局吸引的.

构造 Liapunov 函数

$$V(t) = I(t).$$

则 $V(t)$ 沿系统(3.1.5)轨线的导数为

$$V'(t) = I'(t) = [\beta S - (b+\gamma)]I \leqslant [\beta K - (b+\gamma)]I.$$

显然 $E = \{(S,I) \in D \mid V'(t) = 0\} = \{I = 0\}$,故在 E 中系统(3.1.5)的最大不变集 M 为 $\{I = 0\}$.由 LaSalle 不变性原理知,$\lim\limits_{t\to\infty} I(t) = 0$.故系统(3.1.5)的极限方程为

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = (b+\alpha)(K-S).$$

注意到该方程平衡点 $S = K$ 是全局渐近稳定的.故由极限方程知 $E_0(K,0)$ 是全局吸引的.因此,结合 $E_0(K,0)$ 的局部稳定性知,$E_0(K,0)$ 全局渐近稳定.

2) 当 $R_0 > 1$ 时,由前面的讨论知,$E_0(K,0)$ 不稳定.下面利用 LaSalle 不变性原理证明:当 $R_0 > 1$ 时,正平衡点 E_+ 全局渐近稳定.

为证明方便,作变换 $x = S + \frac{\alpha}{\beta}$, $y = I$,则方程(3.1.5)变为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=(b+\alpha)(K+\dfrac{\alpha}{\beta})-\beta xy-(b+\alpha)x,\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\beta xy-(b+\gamma+\alpha)y.\end{cases}\tag{3.1.6}$$

对应于方程(3.1.5)的正平衡点 E_+,方程(3.1.6)有平衡点$(S^++\dfrac{\alpha}{\beta},I^+)\triangleq(x_0,y_0)$,且 x_0 为正.考虑 Liapunov 函数

$$V(t)=\frac{1}{2}w_1(x-x_0)^2+w_2(y-y_0-y_0\ln\frac{y}{y_0}),\ w_i>0,i=1,2.$$

则 $V(t)$ 沿方程(3.1.6)解的导数为

$$\begin{aligned}V'(t)=&-w_1\beta(x-x_0)^2y-w_1(b+\alpha)(x-x_0)^2\\&+\beta(w_2-w_1x_0)(x-x_0)(y-y_0).\end{aligned}$$

取 $w_2=w_1x_0$,且 $w_1>0$ 任取,则

$$V'(t)=-w_1(x-x_0)^2[\beta y+b+\alpha]\leqslant 0.$$

显然

$$E=\{(x,y)\in D_1\mid V'(t)=0\}=\{x=x_0\}.$$

容易看出,系统(3.1.6)在 E 中的最大不变集 M 只有惟一的点(x_0,y_0).由 LaSalle不变性原理知,(x_0,y_0)是全局渐近稳定的.因此,方程(3.1.5)的正平衡点$E_+(S^+,I^+)$当 $R_0>1$ 时是全局渐近稳定的. ▌

应当指出,当发生率是非线性形式时,模型的动力学性态可能变得复杂.例如,对于简单的 SIR 模型:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=-KIS^q+S(a-S),\\ \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=KIS^q-(d_1+\gamma)I,\\ \dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}=\gamma I-d_2R,\end{cases}$$

文献[71]证明了存在惟一的渐近轨道稳定的周期解。

3.1.2 具有垂直传染的 SIR 模型

考虑具有垂直传染和预防接种的 SIR 传染病模型.设 b 和 b' 分别是非染病者$(S+R)$和染病者 I 的出生率系数;d 和 d' 是相应的死亡率系数;γ 是恢复率系数;q 是垂直传染概率$(p+q=1)$;m 是对易感者 S 和移出者 R 的新生儿进行预防接种的比例.假设移出者 R 终身免疫.则 SIR 传染病模型框图为

$$b(1-m)(S+R) \to \boxed{S} \xrightarrow{\beta SI} \boxed{I} \xrightarrow{\gamma I} \boxed{R}$$

(Inflows: $pb'I$ into S, $qb'I$ into I, $mb(S+R)$ into R; outflows: dS from S, $d'S$ from I, dS from R.)

假设 $b=d, b'=d'$，则其相应的传染病动力学模型为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=-\beta SI+(1-m)b(S+R)+pb'I-bS,\\ \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=\beta SI+qb'I-b'I-\gamma I,\\ \dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}=\gamma I-bR+mb(S+R).\end{cases} \tag{3.1.7}$$

把(3.1.7)的三个方程相加得

$$\frac{\mathrm{d}(S+I+R)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=0.$$

故总人口 N 为常数，不妨设 $S+I+R=N=1$，则方程(3.1.7)变为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=-\beta SI+(1-m)b(1-I)+pb'I-bS,\\ \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=\beta SI-(pb'+\gamma)I.\end{cases} \tag{3.1.8}$$

方程(3.1.8)总有平衡点 $E_0(1-m,0)$，当且仅当

$$R_0=\frac{(1-m)\beta}{pb'+\gamma}>1$$

时有正平衡点

$$E_+\left(\frac{pb'+\gamma}{\beta},\frac{b[(1-m)\beta-pb'-\gamma]}{[b(1-m)+\gamma]\beta}\right)\triangleq E_+(S^+,I^+).$$

与 E_0 对应的方程(3.1.7)的平衡点 $(1-m,0,m)$ 是无病平衡点，与 E_+ 对应的方程(3.1.7)的平衡点 $(S^+,I^+,1-S^+-I^+)$ 是地方病平衡点，$R_0=1$ 是阈值. 取

$$D=\{(S,I)\in R^2 \mid 0\leqslant S, 0\leqslant I, 0\leqslant S+I\leqslant 1\}.$$

显然，D 是方程(3.1.8)的正向不变集.

平衡点 E_0 和 E_+ 的稳定性

当 $R_0\leqslant 1$ 时，方程(3.1.8)存在惟一的平衡点 $E_0(1-m,0)$，类似于方程(3.1.5)的讨论，易证该平衡点全局渐近稳定.

当 $R_0>1$ 时，方程(3.1.8)存在两个平衡点 E_0 和 E_+. 利用线性化方法和 Routh-Hurwitz 判据易证 E_0 点不稳定，E_+ 局部渐近稳定.

下面主要证明 E_+ 是全局渐近稳定的. 当 $R_0>1$ 时，构造 Liapunov 函数

$$V(t) = w_1\left(S - S^+ - S^+ \ln\frac{S}{S^+}\right) + w_2\left(I - I^+ - I^+ \ln\frac{I}{I^+}\right).$$

$V(t)$ 沿方程(3.1.8)轨线的导数为

$$V'(t) = \left[w_1 \frac{(m-1)b - \gamma}{pb' + \gamma} + w_2\right]\beta(S - S^+)(I - I^+)$$
$$- w_1 \frac{[(1-m)b(1-I) + pb'I]}{SS^+}(S - S^+)^2.$$

选取 $w_2 = w_1 \dfrac{(1-m)b + \gamma}{pb' + \gamma}$, $w_1 > 0$ 任取,则

$$V'(t) = - w_1 \frac{[(1-m)b(1-I) + pb'I]}{SS^+}(S - S^+)^2 \leqslant 0.$$

因 $(S,I) \in D$,故由 LaSalle 不变性原理知,$E_+(S^+, I^+)$ 全局渐近稳定. ▌

3.1.3 具有双线性发生率传染病模型的一般结构和研究方法

对方程(3.1.3),若引入下面的矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{e} = \begin{bmatrix} -b \\ -\gamma - b \end{bmatrix}, \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} bK \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} S \\ I \end{bmatrix},$$

则(3.1.3)可写为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{z}}{\mathrm{d}t} = \mathrm{diag}(\boldsymbol{z})(\boldsymbol{e} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{z}) + \boldsymbol{C},$$

其中 $\mathrm{diag}(\boldsymbol{z}) = \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$.

对方程(3.1.5)引入下面矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{e} = \begin{bmatrix} -b-\alpha \\ -b-\gamma \end{bmatrix}, \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} (b+\alpha)K \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

将其写为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{z}}{\mathrm{d}t} = \mathrm{diag}(\boldsymbol{z})(\boldsymbol{e} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{z}) + \boldsymbol{C} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{z}. \tag{3.1.9}$$

类似地,方程(3.1.8)也可写成(3.1.9)的形式.

总之,疾病的发生率是双线性,且总人口是常数的传染病模型一般都可写成方程(3.1.9)的形式.甚至一些疾病发生率是标准的传染病模型,当经过归一化处理后,也可化为方程(3.1.9)的形式.

若记

$$b(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{C} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{z},$$

则方程(3.1.9)变为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{z}}{\mathrm{d}t} = \mathrm{diag}(\boldsymbol{z})(\boldsymbol{e} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{z}) + b(\boldsymbol{z}). \tag{3.1.10}$$

对方程(3.1.10),一般假设:

$C\in R^n$ 是常数向量,$z\in R^n_+$ 是微分方程组的 n 个未知函数分量构成的向量;$e\in R^n$ 是常数向量,$A=(a_{ij})$, $i,j=1,2,\cdots,n$是实常数矩阵;$B=(b_{ij})$, $i,j=1,2,\cdots,n$是实常数矩阵,$b_{ij}\geqslant 0$, $b_{ii}=0$, $i,j=1,2,\cdots,n$.

对总人口是常数的模型,系统(3.1.10)的任何轨线$\{z(t),t\in R_+\}$都包含在有界域 $\Omega\subset R^n$ 内,即 Ω 是正向不变集.

若 z^* 是系统(3.1.10)一个严格正的平衡点,即 $z_i^*>0$, $i=1,2,\cdots,n$,且满足

$$\operatorname{diag}(z^*)(e+Az^*)+b(z^*)=0, \tag{3.1.11}$$

则

$$e=-Az^*-\operatorname{diag}(z^{*-1})b(z^*), \tag{3.1.12}$$

这里

$$z^{*-1}=\left(\frac{1}{z_1^*},\frac{1}{z_2^*},\cdots,\frac{1}{z_n^*}\right)^{\mathrm{T}}.$$

把(3.1.12)代入(3.1.10)得

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\operatorname{diag}(z)[A+\operatorname{diag}(z^{*-1})B](z-z^*)-\operatorname{diag}(z-z^*)\operatorname{diag}(z^{*-1})b(z).$$

因为(3.1.10)与 Volterra 系统非常类似,所以我们取 V 函数

$$V(z)=\sum_{i=1}^{n}w_i\left(z_i-z_i^*-z_i^*\ln\frac{z_i}{z_i^*}\right),$$

这里 $w_i>0$, $i=1,2,\cdots,n$ 是待定实常数. $V(z)$沿着系统(3.1.10)轨线的导数为

$$V'(z)=(z-z^*)^{\mathrm{T}}W\widetilde{A}(z-z^*)-\sum_{i=1}^{n}w_i\frac{b_i(z)}{z_iz_i^*}(z_i-z_i^*)^2. \tag{3.1.13}$$

(3.1.13) 也可变为

$$V'(z)=(z-z^*)^{\mathrm{T}}W\left[\widetilde{A}+\operatorname{diag}\left(\frac{-b_1(z)}{z_1z_1^*},\cdots,\frac{-b_n(z)}{z_nz_n^*}\right)\right](z-z^*), \tag{3.1.14}$$

这里

$$\widetilde{A}=A+\operatorname{diag}(z^{*-1})B,$$

$$W=\begin{bmatrix} w_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & w_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & w_n\end{bmatrix},\quad b(z)=(b_1(z),\cdots,b_n(z))^{\mathrm{T}}.$$

定义 3.1.1　一个实矩阵 $\widetilde{A}$ 称为是斜对称矩阵,若 $\widetilde{A}^{\mathrm{T}}=-\widetilde{A}$.一个实矩阵

$\widetilde{\boldsymbol{A}}$ 称为是 $\boldsymbol{W}$ - 斜对称矩阵,若存在一个正对角实矩阵 $\boldsymbol{W}$ 使 $\boldsymbol{W}\boldsymbol{A}$ 是斜对称矩阵.

定义 3.1.2 对一个实矩阵 $\boldsymbol{H}$,若存在一个正对角实矩阵 $\boldsymbol{W}$ 使得 $\boldsymbol{W}\boldsymbol{H}+\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}$ 是正定的,则称 $\boldsymbol{H}\in \boldsymbol{S}_{\boldsymbol{W}}$.

下面对满足以下两个条件的方程(3.1.13)或(3.1.14)加以讨论.

条件 A:$\widetilde{\boldsymbol{A}}$ 是 $\boldsymbol{W}$ - 斜对称的;

条件 B: $-\left[\widetilde{\boldsymbol{A}}+\mathrm{diag}\left(\dfrac{-b_1(\boldsymbol{z})}{z_1z_1^*},\cdots,\dfrac{-b_n(\boldsymbol{z})}{z_nz_n^*}\right)\right]\in \boldsymbol{S}_{\boldsymbol{W}}$.

若条件B成立,则由(3.1.14)得 $V'(\boldsymbol{z})\leqslant 0$,且 $V'(\boldsymbol{z})=0$ 当且仅当 $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{z}^*$ 才成立,则由 LaSalle 不变性原理可得,$\boldsymbol{z}^*$ 是全局渐近稳定的,即有下面的定理.

定理 3.1.3[1,4] 如果方程(3.1.10)存在严格正平衡点 $\boldsymbol{z}^*\in\Omega$,且条件B成立,则 $\boldsymbol{z}^*$ 全局渐近稳定.

若条件 A 成立,因为 $\boldsymbol{W}\widetilde{\boldsymbol{A}}$ 是斜对称矩阵,则由(3.1.13)可得

$$V'(\boldsymbol{z})=-\sum_{i=1}^{n}\frac{w_ib_i(\boldsymbol{z})}{z_iz_i^*}(z_i-z_i^*)^2.$$

因为 $b_i(\boldsymbol{z})\geqslant 0,\boldsymbol{z}\in R_+^n,i=1,2,\cdots,n$,那么可得

$$V'(\boldsymbol{z})\leqslant 0.$$

定义

$$E=\{\boldsymbol{z}\in\Omega \mid z_i=z_i^*,\text{若 } b_i(\boldsymbol{z})>0,i=1,2,\cdots,n\}. \quad (3.1.15)$$

设 M 是E 的最大不变子集,则由 LaSalle 不变性原理知,当 $t\to+\infty$ 时,方程(3.1.10)的任一解 $\boldsymbol{z}(t)$ 都趋向于 M.因此可得下面的定理.

定理 3.1.4[1,4] 设方程(3.1.10)存在严格正平衡点 $\boldsymbol{z}^*\in\Omega$,且条件A成立,若(3.1.15)中 E 的最大不变子集 $M=\{\boldsymbol{z}^*\}$,则 $\boldsymbol{z}^*$ 全局渐近稳定.

注 1 对于定理3.1.4中的 $M=\{\boldsymbol{z}^*\}$,文献[1]详细给出了它成立的各种充分条件,有兴趣的读者请参阅文献[1]或[4].

注 2 利用定理3.1.3和3.1.4证明具有双线性疾病发生率的SIR传染病模型地方病平衡点的全局稳定性是非常有效的.例如方程(3.1.8)正平衡点的稳定性实质上就是用定理3.1.4加以证明的.

下面举一个利用定理3.1.3证明正平衡点稳定性的例子.

例 3.1.1[1] 考虑两个不同群体的SIS传染病模型.

由于年龄、社会结构和空间结构的不同,可把人口分为两种不同的群体 G_1 和 G_2,每个群体的易感者分别用 S_1 和 S_2 表示,染病者用 I_1 和 I_2 表示,且两个群体可以交叉感染疾病.设群体 G_1 和 G_2 中的疾病发生率分别为:

$$g_1(I_1,I_2)S_1=(\beta_{11}I_1+\beta_{12}I_2)S_1,$$
$$g_2(I_1,I_2)S_2=(\beta_{21}I_1+\beta_{22}I_2)S_2.$$

设 $S_1+I_1=1, S_2+I_2=1$,即总人口是常数,则其 SIS 传染病模型为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t}=(\beta_{11}I_1+\beta_{12}I_2)(1-I_1)-\gamma_1 I_1-\sigma_1 I_1,\\ \dfrac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t}=(\beta_{21}I_1+\beta_{22}I_2)(1-I_2)-\gamma_2 I_2-\sigma_2 I_2.\end{cases}\tag{3.1.16}$$

把方程(3.1.16)变形为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t}=(\beta_{11}-\gamma_1-\sigma_1)I_1-\beta_{11}I_1^2-\beta_{12}I_1I_2+\beta_{12}I_2,\\ \dfrac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t}=(\beta_{22}-\gamma_2-\sigma_2)I_2-\beta_{22}I_2^2-\beta_{21}I_1I_2+\beta_{21}I_1.\end{cases}\tag{3.1.17}$$

方程(3.1.17)可写成(3.1.10)的形式,其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-\beta_{11} & -\beta_{12}\\ -\beta_{21} & -\beta_{22}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{e}=\begin{bmatrix}\beta_{11}-\gamma_1-\sigma_1\\ \beta_{22}-\gamma_2-\sigma_2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0 & \beta_{12}\\ \beta_{21} & 0\end{bmatrix}.$$

设(I_1^*, I_2^*)是方程(3.1.16)的正平衡点,因此

$$b(\boldsymbol{z})=\boldsymbol{B}\boldsymbol{z}=\begin{bmatrix}\beta_{12}I_2\\ \beta_{21}I_1\end{bmatrix},\qquad \widetilde{\boldsymbol{A}}=\begin{bmatrix}-\beta_{11} & \dfrac{\beta_{12}}{I_1^*}(1-I_1^*)\\ \dfrac{\beta_{21}}{I_2^*}(1-I_2^*) & -\beta_{22}\end{bmatrix}.$$

现在考虑

$$\begin{aligned}&W\left[\widetilde{\boldsymbol{A}}+\mathrm{diag}\left(-\frac{\beta_{12}I_2}{I_1^*I_1}, -\frac{\beta_{21}I_1}{I_2^*I_2}\right)\right]\\ &=\begin{bmatrix}-w_1\dfrac{\beta_{12}I_2}{I_1^*I_1} & w_1\dfrac{\beta_{12}}{I_1^*}(1-I_1^*)\\ w_2\dfrac{\beta_{21}}{I_2^*}(1-I_2^*) & -w_2\dfrac{\beta_{21}I_1}{I_2^*I_2})\end{bmatrix}+\mathrm{diag}(-\beta_{11}w_1, -\beta_{22}w_2).\end{aligned}\tag{3.1.18}$$

若选取 $w_1>0$,且 w_1 和 w_2 满足

$$\frac{\beta_{21}}{I_2^*}(1-I_2^*)w_2=\frac{\beta_{12}}{I_1^*}(1-I_1^*)w_1,$$

则式(3.1.18)等号右端第一个矩阵是对称的,又因为 $0<I_i^*<1, i=1,2$. 因此,有下式成立

$$\left[\frac{\beta_{12}I_2}{I_1^*I_1}\frac{\beta_{21}I_1}{I_2^*I_2}-\frac{\beta_{12}}{I_1^*}(1-I_1^*)\frac{\beta_{21}}{I_2^*}(1-I_2^*)\right]w_1w_2>0.$$

这表示(3.1.18)等号右端第一个矩阵是负定的. 因此,只要 $\beta_{ii}\geqslant 0(i=1,2)$,则有

$$-\left[\widetilde{\boldsymbol{A}}+\mathrm{diag}\left(-\frac{\beta_{12}I_2}{I_1^*I_1},-\frac{\beta_{21}I_1}{I_2^*I_2}\right)\right]\in \boldsymbol{S}_W.$$

故由定理3.1.3知,正平衡点(I_1^*,I_2^*)在$\Omega=\{z\in R_+^2\mid I_i\leqslant 1,i=1,2\}$内全局渐近稳定. ▌

§3.2 总人口非常数的传染病动力学模型

早期的传染病模型大多假设种群总数为常数,这种假设仅当疾病在种群中传播速度很快且流行时间较短,短期内没有出生和死亡或出生率和死亡率能够相互平衡,且因疾病死亡率不大而可以忽略不计,环境封闭等条件下才成立.但在实际问题中,不论是动物还是植物的数量总是随着外界(如种群的迁入和迁出)和内部(如种内的相互作用、资源的限制、疾病的因病死亡)扰动而发生变化.当疾病流行时间较长时,则应该考虑种群总数变动这一因素.从数学上看,这类模型的研究更加困难,因为种群总数的变化增加了方程的维数.

当总人口$N(t)$在变化时,$N(t)$一般满足连续动力学模型

$$N'(t)=B(N)-D(N), \tag{3.2.1}$$

其中$B(N)$和$D(N)$是N的连续函数,它们取不同的表达形式反映不同的人口动力学情况,如取$B(N)=bN,D(N)=dN$,则表示人口的出生和死亡都与人口的数量成正比,比例系数分别为b和d,此时,模型(3.2.1)称为**指数出生和死亡的人口动力学模型**.若取$B(N)=A,D(N)=dN$,则表示人口中有一个常数输入率为A和一个与人口成正比的死亡率dN,相应的人口动力学模型(3.2.1)称之为**常数输入和指数死亡的模型**.取$B(N)=bN-(b-d)\frac{N^2}{K},D(N)=dN+(b-d)\frac{N^2}{K}$,其中$K$为环境容纳量,则称相应的模型(3.2.1)为满足 Logistic **方程的人口动力学模型**.在传染病模型中,若考虑到因疾病死亡,则人口动力学方程(3.2.1)变为

$$N'(t)=B(N)-D(N)-\alpha I, \tag{3.2.2}$$

其中I为染病者的数量;α是因病死亡率系数.有了以上的分析,我们就可以根据不同的疾病发生率,不同的人口动力学方程来建立和研究不同的传染病模型.

3.2.1 具有常数输入和指数死亡的SIRS模型

只有易感者具有常数输入的SIRS模型

本段主要考虑两类具有常数输入和指数死亡的SIRS传染病模型,一类是疾病的发生率是双线性的SIRS模型,另一类是疾病的发生率是标准的SIRS模

型.

首先,考虑疾病的发生率是双线性的 SIRS 模型

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = A - dS - \beta SI + \delta R,\\ \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \beta SI - (\gamma + d + \alpha)I,\\ \dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = \gamma I - (\delta + d)R.\end{cases} \tag{3.2.3}$$

其总人口 $N=S+I+R$,因此,由(3.2.3)知 $N(t)$满足方程

$$N'(t) = A - dN - \alpha I, \tag{3.2.4}$$

其中 α 是因病死亡率系数,γ 是恢复率系数,d 是自然死亡率系数,δ 是失去免疫率系数,A 是常数输入率.

由方程(3.2.4)知,当疾病不存在时,种群的数量 $N(t)$最终趋向于常数 A/d,且当 $N>A/d$ 时,$N'(t)<0$,因此,方程(3.2.3)的全部解(S,I,R)最终趋向、进入或停留在区域 D 内,其中

$$D = \left\{(S,I,R)\in R^3 \mid 0 < S + I + R \leqslant \frac{A}{d}, S \geqslant 0, I \geqslant 0, R \geqslant 0\right\}.$$

定义

$$R_0 = \frac{\beta(A/d)}{\gamma + \alpha + d}.$$

易证,当 $R_0\leqslant 1$ 时,方程(3.2.3)有惟一的平衡点 $E_0(A/d,0,0)$;当 $R_0>1$ 时,方程(3.2.3)有两个平衡点 $E_0(A/d,0,0)$,$E_+(S^+,I^+,R^+)$,其中

$$S^+ = \frac{\gamma + \alpha + \beta}{\beta}, I^+ = \frac{d(\gamma + \alpha + d)(R_0 - 1)}{\beta\left[\alpha + d\left(1 + \dfrac{\gamma}{\delta + d}\right)\right]}, R^+ = \frac{\gamma I^+}{\delta + d}.$$

显然,R_0 是(3.2.3)的基本再生数.

关于平衡点 E_0 和 E_+ 的稳定性有下面的定理.

定理 3.2.1[6] 当 $R_0\leqslant 1$ 时,平衡点 E_0 在 D 内是全局渐近稳定的;当 $R_0>1$ 时,平衡点 E_0 在 D 内不稳定,正平衡点 E_+ 在 D 内局部渐近稳定.特别当 $\delta=0$(移出者 R 永久免疫)时,E_+ 在 D 内除平面 $I=0$ 外全局渐近稳定.

证明 当 $R_0\leqslant 1$ 时,利用 Liapunov 函数 $V=I$,及 LaSalle 不变性原理和极限方程理论不难证明 E_0 是全局渐近稳定的.

当 $R_0>1$ 时,由方程(3.2.3)的线性化系统不难证明,E_0 点不稳定,E_+ 局部渐近稳定.下面我们仅给出当 $\delta=0,R_0>1$ 时,E_+ 全局渐近稳定的证明.

对方程(3.2.3)进行坐标变换

$$S = S^+(1 + x), I = I^+(1 + y), R = R^+(1 + z),$$

则方程(3.2.3)变为

$$\begin{cases} x' = -\beta I^+ \left[\left(\dfrac{d}{\beta I^+}+1\right)x + y + xy\right], \\ y' = \beta S^+ x(1+y), \\ z' = d(y-z). \end{cases} \tag{3.2.5}$$

相应的区域 D 变为

$$T = \left\{(x,y,z) \mid x,y,z \geqslant -1, S^+(1+x) + I^+(1+y) + R^+(1+z) \leqslant \frac{A}{d}\right\},$$

而平衡点 E_+ 变为(0,0,0). 考虑 Liapunov 函数

$$W = \frac{x^2}{2\beta I^+} + \frac{1}{\beta S^+}[y - \ln(1+y)],$$

W 沿系统(3.2.5)轨线的导数

$$W' = -x^2\left(\frac{d}{\beta I^+} + 1 + y\right) \leqslant 0. \tag{3.2.6}$$

由 $W'=0$ 可得 $x=0$. 注意到 W 的定义区域为 $(x,y,z)\in T$, 但 $y\neq -1$, 故由 LaSalle 不变性原理及极限方程理论知(0,0,0)在 T 上除平面 $y=-1$ 外全局渐近稳定, 即当 $R_0>1$ 时, 正平衡点 E_+ 在区域 D 上除平面 $I=0$ 外全局渐近稳定. ▌

注 在定理 3.2.1 中, 当 $R_0>1$ 时, 只证明了 SIR 的传染病模型地方病平衡点的全局稳定性, 对常数输入和指数死亡的 SIRS 模型(3.2.3)(即 $\delta\neq 0$), 地方病平衡点 E_+ 的全局稳定性到目前为止还没有证明. 经数值模拟, 当 $R_0>1$ 时, E_+ 也可能是全局渐近稳定的. 对模型(3.2.3), 若 $\alpha=0, \delta\neq 0$, 则(3.2.3)变为不考虑因病死亡 SIRS 模型. 对此模型, 我们利用极限方程, 把方程(3.2.3)降维, 也可证明: 当 $R_0>1$ 时, 正平衡点全局渐近稳定.

下面考虑具有常数输入和指数死亡且疾病的发生率是标准形式的 SIRS 模型, 其框图为

$$A \to \boxed{S} \xrightarrow{\beta SI/N} \boxed{I} \xrightarrow{\gamma I} \boxed{R} \xrightarrow{\delta R} \boxed{S}$$

($S \downarrow dS$, $I \downarrow (d+\alpha)I$, $R \downarrow dR$)

其微分方程模型为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = A - dS - \lambda\dfrac{SI}{N} + \delta R, \\ \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \lambda\dfrac{SI}{N} - (\gamma+\alpha+d)I, \\ \dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = \gamma I - (\delta+d)R. \end{cases} \tag{3.2.7}$$

总人口 $N(t)=S+I+R$ 满足方程

$$N'(t) = A - dN - \alpha I. \tag{3.2.8}$$

模型(3.2.7)有基本再生数

$$R_0 = \frac{\lambda}{\gamma + \alpha + d}.$$

方程(3.2.7)总有无病平衡点 $E_0\left(\frac{A}{d},0,0\right)$，当 $R_0>1$ 时，有地方病平衡点 $E_+(S^+,I^+,R^+)$，其中

$$S^+ = \frac{N^+}{R_0}, \qquad I^+ = \frac{N^+\left(1-\frac{1}{R_0}\right)}{1+\frac{\gamma}{\delta+d}},$$

$$R^+ = \frac{\gamma I^+}{\delta+d}, \qquad N^+ = \frac{A}{d+\frac{\alpha(\delta+d)\left(1-\frac{1}{R_0}\right)}{\delta+d+\gamma}}.$$

平衡点的稳定性

下面证明(3.2.3)平衡点的稳定性.

定理 3.2.2[6]　当 $R_0\leqslant 1$ 时，方程(3.2.7)存在惟一的平衡点 E_0 且全局渐近稳定；当 $R_0>1$ 时，方程(3.2.7)存在两个平衡点 E_0 和 E_+，其中 E_0 不稳定，E_+ 局部渐近稳定. 当 $\alpha=0$ 时，E_+ 是全局渐近稳定的.

证明　当 $R_0\leqslant 1$ 时，类似于模型(3.2.3)的证明，通过构造 Liapunov 函数 $V=I$，可证无病平衡点全局渐近稳定；当 $R_0>1$ 时，通过方程(3.2.7)的线性化系统能证明：E_0 是不稳定的，E_+ 是局部渐近稳定的. 若 $\alpha=0$，则 $N(t)\to\frac{A}{d}$. 因此，通过(3.2.7)的极限方程，我们也能证明：当 $R_0>1$ 时，地方病平衡点全局渐近稳定. 当 $\alpha=0$ 时，由方程(3.2.8)可得

$$N(t) = \frac{A}{d} + \left(N(0) - \frac{A}{d}\right)e^{-dt}. \tag{3.2.9}$$

因此，系统(3.2.7)能写为渐近非自治平面系统

$$\begin{cases} \dfrac{dI}{dt} = \dfrac{\lambda I}{N}(N - I - R) - (\gamma + d)I, \\ \dfrac{dR}{dt} = \gamma I - (\delta + d)R, \end{cases} \tag{3.2.10}$$

其中 N 如(3.2.9)式所示.

由(3.2.9)知，方程(3.2.10)的极限系统为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = I\left[\lambda\left(1 - \dfrac{d}{A}I - \dfrac{d}{A}R\right) - (\gamma + d)\right], \\ \dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = \gamma I - (\delta + d)R. \end{cases} \tag{3.2.11}$$

方程(3.2.11)有平衡点 $E_0'(0,0)$，当 $R_0>1$ 时，该方程还有正平衡点 $E_+'(I^+,R^+)$. 当 $R_0>1$ 时，易证 $E_0'(0,0)$ 是不稳定的，$E_+'(I^+,R^+)$ 局部渐近稳定. 注意到(3.2.13)的解正向有界，要证点 E_+' 全局渐近稳定，只要证明(3.2.11)在第一象限不存在闭轨线即可. 为此，取 Dulac 函数 $B(I,R)=\dfrac{1}{IR}$，可得

$$\frac{\partial(BP)}{\partial I} + \frac{\partial(BQ)}{\partial R} = -\frac{\lambda d}{A}\frac{1}{R} - \frac{\gamma}{R^2} < 0.$$

由 Bendixson-Dulac 定理知，(3.2.11)在第一象限不存在闭轨线，所以，E_+' 全局渐近稳定，由引理 3.1.1 及前面讨论知，当 $R_0>1$ 时，方程(3.2.7)的平衡点 E_+ 全局渐近稳定. ▌

染病者具有常数移民的 SIR 和 SIRS 模型

前面介绍的传染病模型，染病者类都没有常数移民，但对某些疾病，除易感者具有常数移民率外，染病者及移出者也有常数移民，如艾滋病、SARS 等，尽管各国海关进行控制，但仍然有少量的带病者进入某一地区，使疾病在这一地区流行. 关于染病者也具有常数移民率的传染病模型. 目前所见的文章还很少，主要有 Brauer，李建全等人一些文章，如文献[26,27]，下面我们介绍这类模型.

假设某一地区的总人口为$N(t)$，把 N 分为易感者 S 类、染病者 I 类和移出者 R 类. 易感者和染病者都有常数移民率，设 A 为进入该地区的总移民率，即单位时间进入总人口 $N(t)$ 的新成员数量为 A，其中单位时间迁入该地区染病者的新成员为 $pA(0\leqslant p\leqslant 1)$，则迁入易感者的新成员数为$(1-p)A$；疾病的发生率是双线性发生率，则该传染病模型框图为

相应的微分方程为

$$\begin{cases} I' = pA + \beta I(N - I - R) - (d + \gamma + \alpha)I, \\ R' = \gamma I - dR, \\ N' = A - dN - \alpha I. \end{cases} \tag{3.2.12}$$

这里，易感者 S 用$N-I-R$ 代替. 方程(3.2.12)的平衡点满足方程

$$\begin{cases} pA + \beta I(N - I - R) - (d + \alpha + \gamma)I = 0, \\ \gamma I - dR = 0, \\ dN + \alpha I - A = 0. \end{cases}$$

由上面方程的第二和第三个方程可解出 $R=\frac{\gamma}{d}I, N=(A-\alpha I)/d$,然后代入第一个方程得

$$H(I)\triangleq\beta(d+\gamma+\alpha)I^2-[\beta A-d(d+\gamma+\alpha)]I-pdA=0. \tag{3.2.13}$$

不难求得,当 $p>0$ 时,系统(3.2.12)有惟一正平衡点(I^*,R^*,N^*),且有 $I^*\geqslant I_0, R^*\geqslant R_0=\frac{\gamma}{d}I_0, N^*\leqslant N_0$,其中$(I_0,R_0,N_0)$为 $\beta=0$ 时方程(3.2.12)的平衡点.方程(3.2.12)也有基本再生数 $R_0=\frac{\beta A}{d(d+\gamma+\alpha)}$.

现在我们用一种新的方法来讨论正平衡点(I^*,R^*,N^*)的全局稳定性.

关于平衡点(I^*,R^*,N^*)的局部渐近稳定性,可以通过线性化的系统很容易解决,下面给出其全局吸引性.

把方程(3.2.12)的第二和第三个方程化为积分方程

$$R(t)=R(0)e^{-dt}+\gamma\int_0^t e^{-d(t-s)}I(s)ds,$$

$$N(t)=N(0)e^{-dt}+\frac{A}{d}(1-e^{-dt})-\alpha\int_0^t e^{-d(t-s)}I(s)ds.$$

并把上面的方程代入(3.2.12)的第一个方程,可得下面的积分微分方程

$$I'(t)=pA+\beta I(t)[\frac{A}{d}(1-e^{-dt})+(N(0)-R(0))e^{-dt}-I(t)-(\alpha+\gamma)\int_0^t e^{-d(t-s)}I(s)ds]-(d+\gamma+\alpha)I(t). \tag{3.2.14}$$

作变换 $I(t)=I^*e^{y(t)}$,则有

$$y(t)=\ln\frac{I(t)}{I^*}, y'(t)=\frac{I'(t)}{I(t)}.$$

$$y'(t)=\frac{pA}{I^*}e^{-y(t)}+\beta[\frac{A}{d}(1-e^{-dt})+(N(0)-R(0))e^{-dt}-I^*e^{y(t)}-(\alpha+\gamma)I^*\int_0^t e^{-d(t-s)}e^{y(s)}ds]-(d+\gamma+\alpha). \tag{3.2.15}$$

定义

$$g(y)=e^y-1,$$

$$a(s)=\begin{cases}0, & s\leqslant 0,\\ \beta I^*[1+(\alpha+\gamma)\int_0^s e^{-du}du], & s>0.\end{cases}$$

显然,当 $s=0$ 时,$a(s)$有跳跃 βI^*,且当 $s>0$ 时

$$a'(s)=\beta I^*(\alpha+\gamma)e^{-ds},$$

$$\int_0^t g[y(t-s)]\mathrm{d}a(s)$$
$$= \beta I^* \mathrm{e}^{y(t)} - \beta I^* + \beta I^*(\alpha+\gamma)\int_0^t \mathrm{e}^{y(t-s)}\mathrm{e}^{-ds}\mathrm{d}s - \frac{\beta I^*(\alpha+\gamma)}{d}(1-\mathrm{e}^{-dt}).$$

同时,也定义

$$h(y) = \frac{pA}{I^*}(1-\mathrm{e}^{-y}),$$
$$f(t) = -\beta I^* + \frac{\beta}{d}(1-\mathrm{e}^{-dt})[A-(\alpha+\gamma)I^*]$$
$$+\beta[N(0)-R(0)]\mathrm{e}^{-dt} - (d+\gamma+\alpha) + \frac{pA}{I^*}$$
$$= \beta\mathrm{e}^{-dt}\left[\Big(N(0)-R(0)\Big) - \frac{1}{d}\Big(A-(\alpha+\gamma)I^*\Big)\right]$$
$$+\left[\frac{pA}{I^*} - \beta I^* + \frac{\beta}{d}(A-(\alpha+\gamma)I^*) - (d+\alpha+\gamma)\right].$$

因为 I^* 满足方程(3.2.13),故有

$$f(t) = \beta\mathrm{e}^{-dt}\left[(N(0)-R(0)) - \frac{1}{d}(A-(\alpha+\gamma)I^*)\right].$$

从而微分积分方程(3.2.15)可化为

$$y'(t) = -\int_0^t g[y(t-s)]\mathrm{d}a(s) - h(y) + f(t). \tag{3.2.16}$$

因为 $a(s)$ 是强正型,$g(y)$ 连续,且 $\lim\limits_{|y|\to\infty}\int_0^y g(y)\mathrm{d}y = \infty$,$h'(y)$ 连续,

$$g(y)h(y) = \frac{pA}{I^*}(1-\mathrm{e}^{-y})(e^y - 1) = \frac{pA}{I^*}(\mathrm{e}^y + \mathrm{e}^{-y} - 2) \geqslant 0, \text{对 } y\in R,$$

$f(t)$ 和 $f'(t) \in \boldsymbol{L}^2(0,+\infty)$,由文献[28]的定理 18.2.3 知,方程(3.2.16)的每一个有界解 $y(t)$ 都有

$$\lim_{t\to\infty} g(y(t)) = 0,$$

即有

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = 0.$$

故方程(3.2.14)的平衡点 I^* 是全局吸引.又因为方程(3.2.14)和方程(3.2.12)等价,从而方程(3.2.12)的惟一平衡点(I^*,R^*,N^*)全局吸引,结合(I^*,R^*,N^*)的局部稳定性知,(I^*,R^*,N^*)是全局渐近稳定.

下面我们讨论各类都具有常数移民且疾病的发生率具有一般形式的 SIR、SIRS 传染病模型.现假设传染系数 β 是 N 的函数,即$\beta(N)$,且满足

$$\begin{cases}\beta(N) > 0, \beta'(N) \leqslant 0,\\ [\beta(N)N]' \geqslant 0, [\beta'(N)]^2 + [(\beta(N)N)']^2 > 0.\end{cases} \tag{3.2.17}$$

此时,疾病的发生率变为 $\beta(N)SI$,为一般形式的疾病发生率.现在研究疾病的发生率为$\beta(N)SI$ 的 SIRS 传染病模型,其框图为

$$\begin{array}{ccccccc} aA & & bA & & cA & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \boxed{S} & \xrightarrow{\beta(N)SI} & \boxed{I} & \xrightarrow{\gamma I} & \boxed{R} & \xrightarrow{\varepsilon R} & \boxed{S} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ dS & & (d+\alpha)I & & dR & & \end{array}$$

其中 A 是单位时间从外界迁入的总人口,$a>0,b\geqslant 0,c\geqslant 0(a+b+c=1)$ 分别为输入人群中易感者 S、染病者 I 和移出者 R 所占的比例,对其它参数分别假设 $d>0,\alpha>0,\varepsilon\geqslant 0$.

在上述假设下,所建立传染病动力模型为

$$\begin{cases} S' = aA-\beta(N)SI-dS+\varepsilon R, \\ I' = bA+\beta(N)SI-(d+\gamma+\alpha)I, \\ R' = cA+\gamma I-(d+\varepsilon)R. \end{cases} \tag{3.2.18}$$

总人口方程为

$$N' = A-dN-\alpha I. \tag{3.2.19}$$

当 $\varepsilon=0$ 时,模型(3.2.18)是一个 SIR 传染病模型,该模型一般适用于病毒性传染病,如病毒性肝炎、水痘、麻疹、艾滋病等;当 $\varepsilon>0$ 时,模型(3.2.18)是一个 SIRS 传染病模型,该模型一般适用于细菌感染引的传染病,如鼠疫、白喉、炭疽、霍乱等.把 $S=N-I-R$ 代入方程(3.2.18),并结合(3.2.19),则得(3.2.18)的等价系统

$$\begin{cases} I' = bA+I[\beta(N)(N-I-R)-(d+\gamma+\alpha)], \\ R' = cA+\gamma I-(d+\varepsilon)R, \\ N' = A-dN-\alpha I. \end{cases} \tag{3.2.20}$$

下面分 $b=0$ 和 $b\neq 0$ 两种情形分别研究模型(3.2.20)的性态.

情形 1　$b=0$.

此时方程(3.2.20)变为

$$\begin{cases} I' = I[\beta(N)(N-I-R)-(d+\gamma+\alpha)], \\ R' = cA+\gamma I-(d+\varepsilon)R, \\ N' = A-dN-\alpha I. \end{cases} \tag{3.2.21}$$

对模型(3.2.21),有下面的引理.

引理 3.2.1　对(3.2.21),下面结论成立

1) 若 $I(0)=0$,则对 $t>0$,有 $I(t)\equiv 0$ 及 $\lim\limits_{t\to\infty}R(t)=\dfrac{cA}{d+\varepsilon}$, $\lim\limits_{t\to\infty}N(t)=\dfrac{A}{d}$;

2) 若 $I(0)>0$, 则对 $t>0$, 有 $I(t)>0$ 且

$$\Omega = \left\{(I,R,N)\in R_+^3 \mid I+R<N\leqslant\frac{A}{d}\right\}$$

是系统(3.2.21)的正向不变集.

3) $R_0 = \beta\left(\frac{A}{d}\right)\frac{A[\varepsilon + (1-c)d]}{(d+\gamma+\alpha)(d+\varepsilon)d}$ 是(3.2.21)的基本再生数；系统(3.2.21)总存在无病平衡点 $P_0\left(0,\frac{cA}{d+\varepsilon},\frac{A}{d}\right)$，且当 $R_0>1$ 时，方程(3.2.21)存在惟一地方病平衡点 $P^*(I^*,R^*,N^*)$，其中

$$I^* = \frac{A-dN^*}{\alpha},\quad R^* = \frac{(\alpha c+\gamma)A - \gamma dN^*}{\alpha(d+\varepsilon)},$$

N^* 是方程

$$\beta(N)\{[(\alpha+d)(d+\varepsilon)+\gamma d]N - (d+\varepsilon+\alpha c+\gamma)A\} = \alpha(d+\varepsilon)(d+\gamma+\alpha)$$

在区间 $(0,\frac{A}{d})$ 内的惟一正根.

证明 我们只证结论(3)中正平衡点 P^* 的存在惟一性，其余结论不再证明. 地方病平衡点 $P^*(I^*,R^*,N^*)$ 满足方程

$$\begin{cases}\beta(N)(N-I-R)-(d+\alpha+\gamma)=0,\\ cA+\gamma I-(d+\varepsilon)R=0,\\ A-dN-\alpha I=0.\end{cases}\tag{3.2.22}$$

由(3.2.22)的后两个方程解出 I 和 R，并代入(3.2.22)的第一个方程得

$$\varphi(N) \triangleq \beta(N)\{[(\alpha+d)(d+\varepsilon)+\gamma d]N-(d+\varepsilon+\alpha c+\gamma)A\} = \alpha(d+\varepsilon)(d+\gamma+\alpha).\tag{3.2.23}$$

由假设(3.2.17)得 $\varphi'(N)\geqslant 0$，即 $\varphi(N)$ 是单调不减函数，而 $R_0>1$ 等价于

$$\varphi\left(\frac{A}{d}\right) > \alpha(d+\varepsilon)(d+\alpha+\gamma).$$

当 N 充分小时，$\varphi(N)<0$，故当 $R_0>1$ 时，方程(3.2.23)有惟一的正根 N^*，$N^*\in\left(0,\frac{A}{d}\right)$，进而系统(3.2.21)有惟一地方病平衡点 (I^*,R^*,N^*). ▌

下面两个定理分别给出了平衡点的全局渐近稳定性.

定理 3.2.3[27] 对系统(3.2.21)，设 $\varepsilon=0$，则有

1) 当 $R_0\leqslant 1$ 时，无病平衡点 P_0 全局渐近稳定；

2) 当 $R_0>1$ 时，地方病平衡点 P^* 全局渐近稳定.

证明 当 $\varepsilon=0$ 时，系统(3.2.21)变为一个 SIR 模型

$$\begin{cases}I' = I[\beta(N)(N-I-R)-(d+\gamma+\alpha)],\\ R' = cA+\gamma I-dR,\\ N' = A-dN-\alpha I.\end{cases}\tag{3.2.24}$$

注意到(3.2.24)后两方程的结构,可以通过下述变换将方程组(3.2.24)由三维降为二维.设 $Z(t)=R+\frac{\gamma}{\alpha}N$,则由(3.2.24)后两个方程得

$$Z'(t)=A\left(c+\frac{\gamma}{\alpha}\right)-dZ. \tag{3.2.25}$$

解(3.2.25)得

$$Z(t)=\mathrm{e}^{-dt}Z(0)+\frac{A}{d}\left(c+\frac{\gamma}{\alpha}\right)(1-\mathrm{e}^{-dt}).$$

因此可解得

$$R(t)=-\frac{\gamma}{\alpha}N(t)+\mathrm{e}^{-dt}Z(0)+\frac{A}{d}\left(c+\frac{\gamma}{\alpha})(1-\mathrm{e}^{-dt}\right). \tag{3.2.26}$$

把(3.2.26)代入(3.2.24)得等价方程组

$$\begin{cases} I'=I\Big\{\beta(N)\Big[\left(1+\frac{\gamma}{\alpha}\right)N-I-\mathrm{e}^{-dt}Z(0) \\ \qquad -\frac{A}{d}\left(c+\frac{\gamma}{\alpha}\right)(1-\mathrm{e}^{-dt})\Big]-(d+\gamma+\alpha)\Big\}, \\ N'=A-dN-\alpha I. \end{cases} \tag{3.2.27}$$

方程(3.2.27)的极限方程为

$$\begin{cases} I'=I\Big\{\beta(N)\Big[\left(1+\frac{\gamma}{\alpha}\right)N-I-\frac{A}{d}\left(c+\frac{\gamma}{\alpha}\right)\Big]-(d+\gamma+\alpha)\Big\} \\ \qquad \triangleq F(I,N), \\ N'=A-dN-\alpha I\triangleq G(I,N). \end{cases} \tag{3.2.28}$$

由极限方程理论知,系统(3.2.24)平衡点的稳定性可转化为(3.2.28)相应的平衡点 $\bar{P}_0=(0,\frac{A}{d})$和 $\bar{P}^*=(I^*,N^*)$的稳定性,其中 I^* 和 N^* 与(3.2.21)正平衡点的坐标一致.

通过(3.2.28)的线性化系统讨论可知:当 $R_0<1$ 时,$\bar{P}_0$ 局部渐近稳定;当 $R_0>1$ 时,$\bar{P}_0$ 不稳定,$\bar{P}^*$ 局部渐近稳定;当 $R_0=1$ 时,$\bar{P}_0$ 是高阶平衡点.因为

$$\frac{\partial}{\partial I}\left(\frac{F}{I}\right)+\frac{\partial}{\partial N}\left(\frac{G}{I}\right)=-\beta(N)-\frac{d}{I}<0.$$

所以,由 Bendixson-Dulac 定理知,系统(3.2.28)在区域 Ω 内无周期解,故当 $R_0<1$ 时,$\bar{P}_0$ 全局渐近稳定;当 $R_0>1$ 时,$\bar{P}^*$ 全局渐近稳定.

为证当 $R_0=1$ 时,$\bar{P}_0$ 的全局稳定性,把方程(3.2.28)改写为

$$\begin{cases} I'=I\Big\{\beta(N)\Big[\left(1+\frac{\gamma}{\alpha}\right)\left(N-\frac{A}{d}\right)-I\Big]+\frac{(1-c)A}{d}\Big[\beta(N)-\beta\left(\frac{A}{d}\right)\Big]\Big\}, \\ N'=-d\left(N-\frac{A}{d}\right)-\alpha I. \end{cases} \tag{3.2.29}$$

考虑 Liapunov 函数

$$V(I,N)=\frac{\alpha^2 I}{\alpha+\gamma}+\int_{A/d}^{N}\left\{\beta(u)\left(u-\frac{A}{d}\right)-\frac{\alpha(1-c)A}{d(\alpha+\gamma)}\left[\beta\left(\frac{A}{d}\right)-\beta(u)\right]\right\}\mathrm{d}u.$$

设 $h(u)=\beta(u)\left(u-\frac{A}{d}\right)-\frac{\alpha(1-c)A}{d(\alpha+\gamma)}\left[\beta\left(\frac{A}{d}\right)-\beta(u)\right]$. 由假设(3.2.17)可知, $h'(u)>0, h\left(\frac{A}{d}\right)=0$, 故 $V(I,N)$是一个正定函数.

对 $V(I,N)$沿系统(3.2.29)轨线求导得

$$\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(3.2.29)}=-\frac{\alpha^2 I^2}{\alpha+\gamma}\beta(N)-d\left(N-\frac{A}{d}\right)\left\{\beta(N)\left(N-\frac{A}{d}\right)-\frac{\alpha(1-c)A}{d(\alpha+\gamma)}\left[\beta\left(\frac{A}{d}\right)-\beta(N)\right]\right\}.$$

由假设中 $h(u)$的性质及上式可知 $\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(3.2.29)}$ 是定负的,从而 $\bar{P}_0$ 是全局渐近稳定的. ▌

定理 3.2.4[27] 对系统(3.2.21),若 $R_0\leqslant1$,则无病平衡点 P_0 全局渐近稳定;当 $R_0>1$ 时,无病平衡点 P_0 不稳定,地方病平衡点 P^* 局部渐近稳定;进一步假设 $\alpha\leqslant d+2\varepsilon$,则地方病平衡点全局渐近稳定.

证明 当 $R_0\leqslant1$ 时,无病平衡点 P_0 的全局渐近稳定性,可利用构造 $V=I$ 函数以及 LaSalle 不变性原理得到;当 $R_0>1$ 时,通过线性化系统易得 P_0 点不稳定,P^* 局部渐近稳定. 下面主要证明,当 $R_0>1, \alpha\geqslant d+2\varepsilon$ 时,P^* 全局渐近稳定.

把系统(3.2.21)变为下面的等价系统

$$\begin{cases}I'=I\{\beta(N)(N-N^*)-S^*[\beta(N^*)-\beta(N)]\\ \qquad -\beta(N)(I-I^*)-\beta(N)(R-R^*)\},\\ R'=\gamma(I-I^*)-(d+\varepsilon)(R-R^*),\\ N'=-d(N-N^*)-\alpha(I-I^*),\end{cases}\tag{3.2.30}$$

这里 $S^*=N^*-I^*-R^*$.

构造 Liapunov 函数

$$V(I,R,N)=\alpha\left(I-I^*-I^*\ln\frac{I}{I^*}\right)+\frac{\alpha\beta(N)}{2\gamma}(R-R^*)^2+\int_{N^*}^{N}\{\beta(N)(u-N^*)-S^*[\beta(N^*)-\beta(u)]\}\mathrm{d}u.$$

$V(I,R,N)$ 沿系统(3.2.30) 轨线的导数为

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=-\alpha\beta(N)(I-I^*)^2+\left[\frac{\alpha}{2\gamma}\beta'(N)N'-\frac{\alpha(d+\varepsilon)}{\gamma}\beta(N)\right](R-R^*)^2$$

$$-d(N-N^*)\{\beta(N)(N-N^*)-S^*[\beta(N^*)-\beta(N)]\}.$$

注意到

$$\begin{aligned}&\frac{\alpha}{2\gamma}\beta'(N)N'-\frac{\alpha(d+\varepsilon)}{\gamma}\beta(N)\\&=\frac{\alpha}{2\gamma}\beta'(N)(A-dN-\alpha I)-\frac{\alpha(d+\varepsilon)}{\gamma}\beta(N)\\&=\frac{\alpha}{2\gamma}\beta'(N)A-\frac{\alpha}{\gamma}\left[\frac{1}{2}\beta'(N)(dN+\alpha I)+(d+\varepsilon)\beta(N)\right].\end{aligned}$$

因为 $\beta'(N)\leqslant 0, N\geqslant I, \alpha\leqslant d+2\varepsilon$,所以

$$\begin{aligned}&\frac{\alpha}{2\gamma}\beta'(N)N'-\frac{\alpha(d+\varepsilon)}{\gamma}\beta(N)\\&\leqslant\frac{\alpha}{2\gamma}\beta'(N)(A-dN-\alpha I)-\frac{\alpha}{\gamma}\left[\frac{(d+\alpha)}{2}\beta'(N)N+(d+\varepsilon)\beta(N)\right]\\&\leqslant\frac{\alpha}{2\gamma}\beta'(N)A-\frac{\alpha(d+\varepsilon)}{\gamma}[\beta(N)N]'<0.\end{aligned}$$

故有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\leqslant&-\alpha\beta(N)(I-I^*)^2+\left\{\frac{\alpha}{2\gamma}\beta'(N)A\right.\\&\left.-\frac{\alpha(d+\varepsilon)}{\gamma}[\beta(N)N]'\right\}(R-R^*)^2\\&-d(N-N^*)\{\beta(N)(N-N^*)-S^*[\beta(N^*)-\beta(N)]\}.\end{aligned}$$

根据(3.2.17) 易证$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$是定负的,因此,平衡点 P^* 全局渐近稳定.　∎

情形 2　$b>0$.

当 $b>0$ 时,意味着对染病者也有从外界的常数迁入.此时,系统(3.2.20)不存在无病平衡点,但总存在地方病平衡点 $P^*(I^*,R^*,N^*)$,这里

$$I^*=\frac{A-dN^*}{\alpha},\quad R^*=\frac{(\alpha c+\gamma)A-\gamma dN^*}{\alpha(d+\varepsilon)},$$

N^* 是下面方程

$$\begin{aligned}&\beta(N)\{[(\alpha+d)(d+\varepsilon)+\gamma d]N-(d+\varepsilon+\alpha c+\gamma)A\}\\&=\alpha(d+\varepsilon)\left[(d+\gamma+\alpha)-\frac{\alpha bA}{A-dN}\right]\end{aligned}\tag{3.2.31}$$

在区间$(0,\frac{A}{d})$上的惟一正根.

事实上,当 $b>0$ 时,方程(3.2.20)的平衡点一定满足方程

$$\begin{cases}\beta(N)(N-I-R)-(d+\gamma+\alpha)+\dfrac{bA}{I}=0,\\cA+\gamma I-(d+\varepsilon)R=0,\\A-dN-\alpha I=0.\end{cases}\tag{3.2.32}$$

从(3.2.32)的后两个方程中解出 I 和 R,然后代入(3.2.32)的第一个方程即可求得方程(3.2.31).

定义

$$\varphi(N) \triangleq \beta(N)\{[(\alpha+d)(d+\varepsilon)+\gamma d]N-(d+\varepsilon+\alpha c+\gamma)A\},$$

$$g(N) \triangleq \alpha(d+\varepsilon)\left[(d+\gamma+\alpha)-\frac{\alpha bA}{A-dN}\right].$$

因为$\beta'(N)\leqslant 0,[N\beta(N)]'>0$,所以$\varphi(N)$是非减函数,且当$N>0$充分小时,$\varphi(N)<0$. 又因为 $g'(N)<0, g(0)>0, \lim_{N\to\left(\frac{A}{d}\right)^-} g(N)=-\infty$. 故函数 $\varphi(N)$ 与 $g(N)$ 在区间$\left(0,\frac{A}{d}\right)$上有惟一交点$N^*$,即方程(3.2.31)在$\left(0,\frac{A}{d}\right)$上有惟一的正根 N^*,从而方程(3.2.32)有惟一的解(I^*,R^*,N^*).

当 $\varepsilon=0$ 时,利用定理3.2.3的证明方法可证方程(3.2.20)惟一的平衡点(I^*,R^*,N^*)全局渐近稳定,即有下面的定理.

定理 3.2.5[27] 对系统(3.2.20). 当 $\varepsilon=0$ 时, 惟一的地方病平衡点 $P^*(I^*,R^*,N^*)$是全局渐近稳定.

当 $\varepsilon>0$ 时,利用线性化系统和构造 Liapunov 函数

$$V=\alpha\left(I-I^*-I^*\ln\frac{I}{I^*}\right)+\frac{\alpha}{2\gamma}\beta(N)(R-R^*)^2$$
$$+\int_{N^*}^{N}\{\beta(u)(u-N^*)-S^*[\beta(N^*)-\beta(u)]\}\mathrm{d}u.$$

也可证明下面的定理.

定理 3.2.6[27] 对系统(3.2.20). 当 $\varepsilon>0$ 时, 惟一的地方病平衡点 $P^*(I^*,R^*,N^*)$是局部渐近稳定.若 $\alpha\leqslant d+2\varepsilon$,则该平衡点是全局渐近稳定.

应当指出,对SIRS模型,当染病者或移出者有迁入时,地方病平衡点的全局稳定性还没有完全解决,但我们猜测,该平衡点可能是全局渐近稳定的.

3.2.2 具有指数输入的 SISV 模型

种群具有指数输入,即种群的出生率(或死亡率)与种群的个体数量成正比. 这也是常见传染病模型所考虑的情形之一. 本段将讨论一类具有指数输入的 SISV 预防接种模型

$$\begin{cases} S'=r(1-q)N-\beta\dfrac{SI}{N}-[p+f(N)]S+\gamma I+\varepsilon V, \\ I'=\beta\dfrac{SI}{N}-[\gamma+\alpha+f(N)]I, \\ V'=rqN+pS-[\varepsilon+f(N)]V, \end{cases} \tag{3.2.33}$$

其中 S 是易感者类,I 是染病者类,V 是接种者类,r 表示自然出生率系数,β 表

示传染率系数，$q(0\leqslant q\leqslant 1)$表示新生者被接种的比例，$p$ 表示易感者被接种率，$\gamma>0$ 表示染病者的恢复率，ε 表示被接种者的免疫失去率，$f(N)$为种群的自然死亡率，它依赖于总种群的个体数 N. 对于 $N>0$ 有 $f(N)>0, f'(N)>0$ 且 $f(0)=0<r<f(\infty)$.

由于 $N=S+I+V$，所以有

$$N' = N[r - f(N)] - \alpha I. \tag{3.2.34}$$

记 $x=\frac{S}{N}, y=\frac{I}{N}$ 和 $z=\frac{V}{N}$，则 x,y,z 分别表示易感类(S)，染病类(I)和被接种类(V)在总种群中所占的比例. 通过直接计算可得

$$\begin{cases} x' = r(1-q) - (\beta-\alpha)xy - (p+r)x + \gamma y + \varepsilon z, \\ y' = y[\beta x + \alpha y - (\gamma+\alpha+r)], \\ z' = rq + px - (\varepsilon+r)z + \alpha yz. \end{cases} \tag{3.2.35}$$

因为 $x+y+z=1$，所以，系统(3.2.35)的前两个方程可写为

$$\begin{cases} x' = [r(1-q)+\varepsilon] - (\beta-\alpha)xy - (p+r+\varepsilon)x + (\gamma-\varepsilon)y, \\ y' = y[\beta x + \alpha y - (\gamma+\alpha+r)]. \end{cases} \tag{3.2.36}$$

易知区域 $D=\{(x,y)\mid x>0, y\geqslant 0, x+y<1\}$ 为系统(3.2.36)的正向不变集.

定理 3.2.7[3]　记 $R_0'=\frac{\beta[\varepsilon+r(1-q)]}{(p+\varepsilon+r)(\alpha+r+\gamma)}$. 系统(3.2.36)总存在无病平衡点 $P_0\left(\frac{\varepsilon+r(1-q)}{p+r+\varepsilon},0\right)$. 当 $R_0'>1$ 时，系统(3.2.36)还存在惟一的地方病平衡点 $P_e(x_e,y_e)$，其中 $x_e=\frac{(\gamma+\alpha+r)-\alpha y_e}{\beta}$，$y_e$ 是由解方程 $\beta x_e+\alpha y_e=\gamma+\alpha+r$ 所得.

证明　显然，系统(3.2.36)总存在无病平衡点 $P_0\left(\frac{\varepsilon+r(1-q)}{p+\varepsilon+r},0\right)$.

系统(3.2.36)的地方病平衡点 $P_e(x_e,y_e)$即方程组

$$\begin{cases} \beta x + \alpha y = \gamma + \alpha + r, \\ (\beta-\alpha)xy + (p+r+\varepsilon)x + (\varepsilon-\gamma)y = r(1-q)+\varepsilon \end{cases} \tag{3.2.37}$$

在区域 D 内的解.

由(3.2.37)中的第一个方程得

$$x = \frac{(\gamma+\alpha+r)-\alpha y}{\beta}, \tag{3.2.38}$$

将(3.2.38)代入(3.2.37)中的第二个方程，并进行整理可得

$$\varphi(y) \triangleq \alpha(\beta-\alpha)y^2 - [\beta(\alpha+r+\varepsilon) - \alpha(p+\varepsilon+\gamma+\alpha+2r)]y$$

$$+(p+r+\varepsilon)(\gamma+\alpha+r)(R_0'-1)=0. \tag{3.2.39}$$

记

$$R_1=\frac{\beta}{\gamma+\alpha+r}.$$

当 $R_1\leqslant 1$ 时,直线 $l_1:\beta x+\alpha y=\gamma+\alpha+r$ 位于区域 D 之外.因此,这时方程组(3.2.37)在 D 内无解.注意到如果 $R_1\leqslant 1$,则 $R_0'<1$.

当 $R_1>1$ 时,有 $\beta>\alpha$.这时直线 $l_1:\beta x+\alpha y=\gamma+\alpha+r$ 和直线 $x+y=1$ 在第一象限内相交,交点记为 M.解方程组

$$\begin{cases}\beta x+\alpha y=\gamma+\alpha+r,\\ x+y=1,\end{cases}$$

可得交点 M 的纵坐标为

$$\bar{y}=\frac{\beta-(\gamma+\alpha+r)}{\beta-\alpha}>0,\text{且}\,0<\bar{y}<1,$$

因此,系统(3.2.36)的地方病平衡点 $P_e(x_e,y_e)$ 的存在性等价于方程 $\varphi(y)=0$ 在区间 $(0,\bar{y})$ 内解的存在性.

直接计算可得

$$(\beta-\alpha)\varphi(\bar{y})=-\beta\{(\beta-a)rq+p(\gamma+r)\}, \tag{3.2.40}$$

当 $R_1>1$ 时,由式(3.2.40)有 $\varphi(\bar{y})<0$,又 $R_0'\leqslant 1$ 意味着 $\varphi(0)\leqslant 0$.鉴于 $u=\varphi(y)$ 的图像是一条向上凹的抛物线,因此,当 $R_1>1$ 且 $R_0'\leqslant 1$ 时方程 $\varphi(y)=0$ 在区间 $(0,\bar{y})$ 内无解.

综上所述,当 $R_0'\leqslant 1$ 时无病平衡点 $P_0(x_0,0)$ 是系统(3.2.36)在区域 D 上的惟一平衡点.

当 $R_0'>1$ 时,有 $R_1>1$ 且 $\beta>\alpha$.由(3.2.40)式可知 $\varphi(\bar{y})<0$.同时 $\varphi(0)>0$.由于 $u=\varphi(y)$ 的图像是一条向上凹的抛物线,所以这时 $\varphi(y)=0$ 在区间 $(0,\bar{y})$ 内有惟一解,记为 $y=y_e$.将 $y=y_e$ 代入(3.2.38)式,可得 $x=x_e$.即当 $R_0'>1$ 时系统(3.2.36)除无病平衡点 P_0 外,还有惟一的地方病平衡点 $P_e(x_e,y_e)$. ▌

定理 3.2.8[3] 对于系统(3.2.36),当 $R_0'\leqslant 1$ 时,无病平衡点 P_0 是局部渐近稳定的;当 $R_0'>1$ 时,无病平衡点 P_0 是不稳定的,地方病平衡点 P_e 是局部渐近稳定的.

证明 系统(3.2.36)在平衡点 P_0 和 P_e 处的 Jacobian 矩阵分别为

$$J(P_0)=\begin{pmatrix}-(p+r+\varepsilon) & -(\beta-\alpha)\dfrac{\varepsilon+r(1-q)}{p+\varepsilon+r}-\varepsilon\\ 0 & (r+\alpha+\gamma)(R_0'-1)\end{pmatrix}$$

和

$$J(P_e)=\begin{pmatrix}-(\beta+\alpha)y_e-(p+r+\varepsilon) & -(\beta-\alpha)x_e-\varepsilon+\gamma\\ \beta y_e & \alpha y_e\end{pmatrix},$$

因此,对于系统(3.2.36),易知当 $R_0'<1$ 时,无病平衡点 P_0 是局部渐近稳定的,当 $R_0'>1$ 时,无病平衡点 P_0 是不稳定的.

当 $R_0'=1$ 时,$J(P_0)$有零特征根,故此时 P_0 是高阶奇点. 为了讨论其局部稳定性,对系统(3.2.36)作变换

$$u=y,v=\alpha y+\beta(x-x_0),$$

则(3.2.36)变为

$$\begin{cases}u'=uv,\\ v'=-(p+r+\varepsilon)v+u\{[\alpha(\alpha+\gamma+p+\varepsilon+2r)\\ \qquad -\beta(\alpha+r+\varepsilon)]+\beta v-\alpha(\beta-\alpha)u\}.\end{cases}\tag{3.2.41}$$

令(3.2.41)右端的第二个表达式为零,得

$$v=\frac{\alpha(\alpha+\gamma+p+\varepsilon+2r)-\beta(\alpha+r+\varepsilon)}{p+r+\varepsilon}u+o(u),\tag{3.2.42}$$

其中 $o(u)$表示 u 的次数高于一次项的和.

将(3.2.42)代入(3.2.41)中的第一个方程,得

$$u'=\frac{\alpha(\alpha+\gamma+p+\varepsilon+2r)-\beta(\alpha+r+\varepsilon)}{p+r+\varepsilon}u^2+o(u^2).\tag{3.2.43}$$

于是由文献[70]的定理7.1知,(3.2.36)的相轨线在区域 D 内逼近于P_0. 即当 $R_0'=1$ 时在 D 内无病平衡点P_0 是稳定的.

对 $J(P_e)$直接计算可得

$$\det J(P_e)=-y_e\varphi'(y_e),$$

$$\mathrm{tr}J(P_e)=-(\beta-\alpha)y_e+\alpha\left(y_e-\frac{p+r+\varepsilon}{\alpha}\right).$$

由证明地方病平衡点 P_e 存在性的过程可知,$\varphi'(y_e)<0$,所以 $\det J(P_e)>0$. 又

$$\alpha\varphi\left(\frac{p+r+\varepsilon}{\alpha}\right)=\beta\{p[(p+r+\varepsilon)-\alpha]-\alpha rq\},$$

所以当$\frac{p+r+\varepsilon}{\alpha}<0$ 时,有 $\alpha\varphi\left(\frac{p+r+\varepsilon}{\alpha}\right)<0$,即 $\varphi\left(\frac{p+r+\varepsilon}{\alpha}\right)<0$,于是由定理3.2.7的证明过程可知 $y_e<\frac{p+r+\varepsilon}{\alpha}$. 当$\frac{p+r+\varepsilon}{\alpha}\geqslant 1$ 时,显然有 $y_e<\frac{p+r+\varepsilon}{\alpha}$. 因此,当 $R_0'>1$ 时有 $\mathrm{tr}J(P_e)<0$. 如此便证得地方病平衡点 P_e 是局部渐近稳定的. ∎

为了证明系统(3.2.35)的全局渐近稳定性,引入下面的广义 Bendixson-

Dulac 定理,以便排除周期解.

广义 Bendixson-Dulac 定理

定理 3.2.9[9] 设 $\boldsymbol{f}: R^3 \to R^3$ 是一个 Lipschitz 连续的向量场,$\Gamma(t)$是有向光滑曲面 $\boldsymbol{S} \subset R^3$ 的边界曲线,它是闭的,分段光滑的.若 $\boldsymbol{g}: R^3 \to R^3$ 在 $\boldsymbol{S}$ 的某邻域光滑,且对一切 t 满足

$$\boldsymbol{g}(\Gamma(t)) \cdot \boldsymbol{f}(\Gamma(t)) \leqslant 0(\geqslant 0),$$
$$(\mathrm{Curl}\boldsymbol{g}) \cdot \boldsymbol{n} \geqslant 0(\leqslant 0), \text{在 } \boldsymbol{S} \text{ 上},$$

而且在 $\boldsymbol{S}$ 上有一些点满足

$$(\mathrm{Curl}\boldsymbol{g}) \cdot \boldsymbol{n} > 0(< 0),$$

这里 $\boldsymbol{n}$ 是曲面$\boldsymbol{S}$ 上的单位法向量,则 $\Gamma(t)$不可能由系统

$$x' = f(x)$$

的轨线组成,$\Gamma(t)$的方向与 $\boldsymbol{n}$ 成右手系.

推论 3.2.1[9] 设 $S \subset R^3$ 是有向光滑的曲面. $\Gamma(t) \subset \boldsymbol{S}$ 是任意一条光滑闭曲线,且 $\Gamma(t)$是曲面 $\boldsymbol{S}' \subset \boldsymbol{S}$ 的边界. 若 $\boldsymbol{f}: \Gamma(t) \to R^3$ 是 Lipschitz 的,且 $\boldsymbol{f}$ 和 $\boldsymbol{g}$ 满足

$$\boldsymbol{g}(\Gamma(t)) \cdot \boldsymbol{f}(\Gamma(t)) = 0,$$
$$(\mathrm{Curl}\boldsymbol{g}) \cdot \boldsymbol{n} > 0, (\text{或} < 0) \text{ 在 } \boldsymbol{S} \text{ 上},$$

这里 $\boldsymbol{n}$ 是曲面$\boldsymbol{S}$ 上的单位法向量,则 $\Gamma(t)$不可能是系统 $\dot{x} = f(x)$的异宿环.

定理 3.2.9 及其推论 3.2.1 是对平面上的 Bendixson-Dulac 定理的推广.

定理 3.2.10[3] 系统(3.2.35)不存在周期解.

证明 由于区域 $\Omega = \{(x, y, z) \mid x > 0, y \geqslant 0, z > 0, x + y + z = 1\}$是(3.2.35)的不变集,又易知区域 Ω 的边界线不可能是系统(3.2.35)的周期解.因此,以下仅在区域 Ω 内讨论.

假设系统(3.2.35)在 Ω 内有周期解 $\varphi(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}$,并且$\varphi(t)$的轨线 Γ 所围的平面区域为Π,平面域 Π 位于Ω 的内部.

记f_1, f_2, f_3 分别为系统(3.2.35)的右端三方程的表达式,$\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, f_3)^{\mathrm{T}}$(T 代表转置),$\boldsymbol{g}(x, y, z) = \frac{1}{xyz}\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{f}$,(其中 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)^{\mathrm{T}}$),则易知

$$\boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{f} = 0.$$

记 $\boldsymbol{g} = (g_1, g_2, g_3)$和 $\mathrm{Curl}\boldsymbol{g} = \left(\frac{\partial g_3}{\partial y} - \frac{\partial g_2}{\partial z}, \frac{\partial g_1}{\partial z} - \frac{\partial g_3}{\partial x}, \frac{\partial g_2}{\partial x} - \frac{\partial g_1}{\partial y}\right)$,则直接计算可知在区域 Ω 内有

$$\begin{aligned}(\mathrm{Curl}\boldsymbol{g}) \cdot (1,1,1)^{\mathrm{T}} = & -\frac{px + \gamma y + \varepsilon z}{xyz} - \frac{rq + px}{z^2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) \\ & - \frac{r(1 - q) + \varepsilon z}{x^2}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) < 0. \end{aligned} \tag{3.2.44}$$

设平面区域 Π 的方向是向上的，轨线 Γ 的方向与 Π 的方向成右手法则. 由于向量(1,1,1)是平面区域 Π 的法向量，故由定理 3.2.9 知定理3.2.10成立. ▌

由定理 3.2.8 和定理 3.2.10 有下面的定理.

定理 3.2.11[3]　对于系统(3.2.35)，当 $R_0' \leqslant 1$ 时，P_0 是全局渐近稳定的；当 $R_0' > 1$ 时，P_e 是全局渐近稳定的.

当总种群中无传染病存在时，根据对 $f(N)$ 的假设，方程 $N' = N[r - f(N)]$ 有惟一全局渐近稳定的正平衡点 $N_0 = f^{-1}(r)$. 当传染病引起死亡时，N 符合方程 $N' = N[r - f(N) - \alpha y]$.

由定理 3.2.11 知，染病者比例 $y(t)$ 要么满足 $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = 0$，要么满足 $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = \bar{y} > 0$(其中 $\bar{y}$ 是地方病平衡点的 y 坐标值). 因此，有定理：

定理 3.2.12[3]　设 $\bar{y}$ 是地方病平衡点 y 的坐标值，则下列结果成立.

(i) 如果 $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = 0$，则 $\lim\limits_{t\to\infty} N(t) = N_0$；

(ii) 如果 $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = \bar{y} > 0$ 且 $\alpha\bar{y} < r - f(0)$，则 $\lim\limits_{t\to\infty} N(t) = f^{-1}(r - \alpha\bar{y}) < N_0$；

(iii) 如果 $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = \bar{y} > 0$ 且 $\alpha\bar{y} \geqslant r - f(0)$，则 $\lim\limits_{t\to\infty} N(t) = 0$.

文献[5]，用类似的方法研究一类具有预防接种的 SIRS 模型

$$\begin{cases} S' = bN - \dfrac{\lambda SI}{N} - dS - pS + \delta R, \\ I' = \lambda \dfrac{SI}{N} - (d + \alpha + \gamma)I, \\ R' = \gamma I - (d + \varepsilon + \delta)R + pS. \end{cases}$$

根据

$$R_0 = \frac{\lambda}{b + \alpha + \gamma} \times \frac{b + \gamma}{b + \gamma + p}$$

的大小给出了染病者比例、无病平衡点和正平衡点的存在惟一性及全局渐近稳定性. 文献[10]对特殊模型进行了研究，利用 Liapunov 函数和不变集原理证明了在阈值条件下的全局稳定性. 文献[9]对染病者和移出者都有额外死亡的 SIRS 模型进行研究，这里不再赘述，有兴趣的读者可参阅文献[5,9,10].

3.2.3　种群具有 Logistic 增长的 SIRS 模型

本小节研究人口 $N(t)$ 的变化满足 Logistic 方程 $N'(t) = \eta N\left(1 - \dfrac{N}{K}\right)$，$\eta = b - d$，且疾病的发生率是标准的 SIRS 传染病模型，这里 b 是自然出生率系数，d 是自然死亡率系数. 考虑到种群的密度制约项 $-\dfrac{\eta N^2}{K}$ 既影响到种群的出生率

系数 b，又影响到种群的死亡率系数 d，设分别以比例 a 与 $(1-a)$ 影响，因此，种群的出生率系数和死亡率系数分别被修正为 $B(N)=b-a\eta\frac{N}{K}$，$D(N)=d+(1-a)\eta\frac{N}{K}$. 种群动力具有 Logisitic 增长的 SIRS 模型框图为

$$\xrightarrow{(b-a\eta N/K)N}\boxed{S}\xrightarrow{\lambda SI/N}\boxed{I}\xrightarrow{\gamma I}\boxed{R}\xrightarrow{\delta R}\boxed{S}$$

$S\downarrow[d+(1-a)\eta N/K]S$，$I\downarrow[\alpha+d+(1-a)\eta N/K]I$，$R\downarrow[d+(1-a)\eta N/K]R$

这里 K 是种群的环境容纳量，$\eta=b-d$ 是内禀增长率，相应于上述框图的微分方程为

$$\begin{cases}S'(t)=\left[b-a\eta\frac{N}{K}\right]N-\lambda\frac{SI}{N}-\left[d+(1-a)\eta\frac{N}{K}\right]S+\delta R,\\ I'(t)=\lambda\frac{SI}{N}-\left[\gamma+\alpha+d+(1-a)\eta\frac{N}{K}\right]I,\\ R'(t)=\gamma I-\left[\delta+d+(1-a)\eta\frac{N}{K}\right]R.\end{cases}\tag{3.2.45}$$

总人口 $N=S+I+R$ 满足方程

$$N'(t)=\eta N(1-N/K)-\alpha I.\tag{3.2.46}$$

由实际意义，我们总假设 $\eta>0$，因为当 $N>K$ 时，由方程(3.2.46)知，$N'(t)<0$，因此，方程(3.2.45)的全部轨线最终趋向、进入或停留在 $N=S+I+R\leqslant K$ 内. 为方便分析模型(3.2.45)及(3.2.46)，我们做归一变换 $x=S/N$，$y=I/N$，$z=R/N$，因此，$x+y+z=1$. 方程(3.2.45)的后两个方程及(3.2.46)变为

$$\begin{cases}y'=\left[\lambda-(\gamma+\alpha+b)-(\lambda-\alpha)y-\lambda z+a\eta\frac{N}{K}\right]y,\\ z'=\gamma y-(\delta+b)z+a\eta\frac{Nz}{K}+\alpha yz,\\ N'=[\eta(1-N/K)-\alpha y]N.\end{cases}\tag{3.2.47}$$

方程(3.2.47)在 yzN 空间的正向不变集为

$$D=\{(y,z,N)\mid y\geqslant0,\ z\geqslant0,\ y+z\leqslant1,\ 0\leqslant N\leqslant K\}.\tag{3.2.48}$$

阈值和平衡点的存在性

当疾病不存在时，种群的规模 $N(t)$ 趋向于它的环境容纳量 K. 如果疾病存在，则种群的规模由于受疾病的影响，它可能趋于零，也可能趋于一个比容纳量 K 小的一个常数，或者趋于容纳量 K，而且疾病也可能绝灭或持续(保持在地方病平衡点)，这些情况都依赖于下列几个值，分别是基本再生数

$$R_0=\frac{\lambda}{\gamma+\alpha+b-a\eta},$$

修正再生数

$$\theta = \frac{\lambda}{\gamma + \alpha + b},$$

及种群的净增长阈值

$$\varphi = \frac{\eta\lambda}{\alpha[\lambda - (\gamma + \alpha + d)]}\left(1 + \frac{\gamma}{\delta + d}\right),$$

其中 $R_0 = 1$ 是疾病 I 趋于绝灭与持续的一个阈值，$\theta = 1$ 是染病者的比例 $y = \frac{I}{N}$ 趋于绝灭与持续的一个阈值，$\varphi = 1$ 是决定种群的规模是趋于零或还是一个常数的一个阈值.

令方程(3.2.47)的右端为 0，则方程(3.2.47)最多能找到 4 个平衡点. 首先，方程(3.2.47)总存在平衡点 $E_1(0,0,0)$ 和 $E_2(0,0,K)$；其次，令 $N=0$，由方程(3.2.47)的右端为 0 得

$$\begin{cases} y = \dfrac{\lambda - (\gamma + \alpha + b) - \lambda z}{\lambda - \alpha}, \\ y = \dfrac{(\delta + b)z}{\gamma + \alpha z}. \end{cases} \tag{3.2.49}$$

当 $\theta > 1$ 时，由(3.2.49)的图形分析易得，方程(3.2.47)在区域 D 内有惟一的平衡点 $E_3(y_3, z_3, 0)$，且当 $\theta \to 1^+$ 时，$E_3 \to E_1$.

最后，我们找 y 与 N 都非零的平衡点 $E_4(y_4, z_4, N_4)$. 由(3.2.47)得

$$\begin{cases} \eta\dfrac{N}{K} = \eta - \alpha y, \\ \lambda - (\gamma + \alpha + b) - (\lambda - \alpha)y - \lambda z + a\eta\dfrac{N}{K} = 0, \\ \gamma y - (\delta + b)z + a\eta\dfrac{Nz}{K} + \alpha yz = 0. \end{cases}$$

通过代数分析可知，正平衡点 $E_4(y_4, z_4, N_4)$ 存在的充要条件是 $R_0 > 1$ 和 $\varphi > 1$. 当 $a = 1$ 时，即出生率是密度制约，而死亡率独立于种群的密度，此时，平衡点 E_4 是可求出的，其坐标分别为

$$y_4 = \frac{(\delta + d)(1 - 1/R_0)}{\gamma + \delta + d}, \quad z_4 = \frac{\gamma(1 - 1/R_0)}{\gamma + \delta + d}, \quad N_4 = K(1 - 1/\varphi).$$

平衡点的稳定性

下面考虑平衡点 E_1, E_2, E_3 及 E_4 的稳定性.

定理 3.2.13[12]　若 $R_0 \leqslant 1$，则平衡点 $E_2(0,0,K)$ 在区域 D 内除平面 $N=0$ 外是渐近稳定的.

证明　由 $R_0 \leqslant 1$，可得 $\gamma + \alpha + b - a\eta \geqslant \lambda$. 下面分两种情况讨论.

情形 1　$\lambda > \alpha$.

此时,构造 Liapunov 函数 $V=y$,则

$$V'(t)=[\lambda-(\gamma+\alpha+b-a\eta)]y-a\eta\left(1-\frac{N}{K}\right)y-(\lambda-\alpha)y^2-\lambda yz\leqslant 0$$

及

$$E=\{V'=0\}=\{y=0\}.$$

由 LaSalle 不变性原理知,从 D 内出发的方程(3.2.47)的所有解都趋向于平面 $y=0$. 当 $y\to 0$ 时,由于(3.2.47)的第三个方程

$$N'(t)=\eta\left(1-\frac{N}{K}\right)N-\alpha yN$$

的极限方程为

$$N'(t)=\eta\left(1-\frac{N}{K}\right)N. \tag{3.2.50}$$

而对方程(3.2.50)的任一解 $N(t)$,只要初值 $N_0>0$,就有 $N(t)\to K$. 另外,当 $y\to 0$, $N(t)\to K$时,由于(3.2.47)第二个方程的极限方程为

$$z'=-(\delta+b)z+a\eta z=[-\delta-ad-b(1-a)]z. \tag{3.2.51}$$

而对方程(3.2.51)的任一解 $z(t)$,都有 $z(t)\to 0$. 因此,由极限方程的讨论知,方程(3.2.47)从 D 内出发的任一解$(y(t),z(t),N(t))$,除 $N=0$ 平面外,都趋向于平衡点 $E_2(0,0,K)$.

情形 2 $\lambda\leqslant\alpha$.

构造 Liapunov 函数 $V=y+z$, V 沿方程(3.2.47)的导数为

$$V'=-(y+z)\left[b\left(1-\frac{aN}{K}\right)+\frac{adN}{K}\right]-(\alpha-\lambda)y(1-y-z)-\delta z\leqslant 0$$

及

$$E=\{V'=0\}=\{y=0,z=0\}.$$

由 LaSalle 不变性原理知,从 D 内出发的方程(3.2.47)的所有轨线都趋向于 E,所以 $y\to 0$, $z\to 0$. 类似于情形 1 的讨论,方程(3.2.47)从 D 内出发的解$(y(t),z(t),N(t))$,除 $N=0$ 外,都趋向于平衡点 $E_2(0,0,K)$. ▌

定理 3.2.14[12] 当 $\theta>1$ 时,平衡点 $E_3(y_3,z_3,0)$在区域 D 内是存在的,且当 $\varphi<1$ 时,该平衡点局部渐近稳定;当 $\varphi>1$ 时,该平衡点不稳定.

证明 系统(3.2.47)在平衡点 $E_3(y_3,z_3,0)$处的 Jacobian 矩阵为

$$J(E_3)=\begin{bmatrix}-(\lambda-\alpha)y_3 & -\lambda y_3 & a\eta y_3/K\\ \gamma+\alpha z_3 & -\delta-b+\alpha y_3 & a\eta z_3/K\\ 0 & 0 & \eta-\alpha y_3\end{bmatrix}.$$

矩阵 $J(E_3)$有两个特征根是下面的一元二次方程的根

$$r^2+pr+q=0, \tag{3.2.52}$$

其中

$$p = (\lambda - \alpha)y_3 + \delta + b - \alpha y_3,$$

$$q = (\lambda - \alpha)y_3(\delta + b - \alpha y_3) + \lambda y_3(\gamma + \alpha z_3).$$

因为 $\theta>1$ 隐含 $\lambda>\alpha$,方程(3.2.49)的第二个方程隐含$(\delta+b-\alpha y_3)z_3=\gamma y_3$.因此,$\delta+b-\alpha y_3>0$.即有 $p>0,q>0$,故方程(3.2.52)有两个具有负实部的根.

矩阵 $J(E_3)$还有第三个特征根 $\eta-\alpha y_3$.现在证明 $\eta-\alpha y_3$ 与 $\varphi-1$ 的符号相同.方程(3.2.49)的第一个方程隐含

$$\eta - \alpha y_3 = \frac{\lambda\eta + \alpha(\gamma + \alpha + d - \lambda) + \lambda\alpha z_3}{\lambda - \alpha}, \tag{3.2.53}$$

这里 $\lambda>\alpha$. 若 $\eta-\alpha y_3>0$, 则有 $\eta>\alpha y_3$, 即有 $\delta+b-\alpha y_3>\delta+d$, 从而可得

$$1 > \frac{\alpha y_3}{\eta} > \frac{\alpha y_3(\delta + d)}{\eta(\delta + b - \alpha y_3)} = \frac{\alpha z_3(\delta + d)}{\gamma\eta}. \tag{3.2.54}$$

而由 $\varphi<1$ 可得

$$\eta\lambda + \alpha(\gamma + \alpha + d - \lambda) < -\frac{\eta\lambda\gamma}{\delta + d}.$$

把上式及(3.2.54)代入(3.2.53)的右端可得 $\eta-\alpha y_3<0$, 这是一个矛盾.故当 $\varphi<1$ 时,可得 $\eta-\alpha y_3<0$.

类似地,可证明当 $\varphi>1$ 时,$\eta-\alpha y_3>0$.

总之,由上面分析可得,当 $\varphi<1$ 时,平衡点 $E_3(y_3,z_3,0)$局部渐近稳定;当 $\varphi>1$ 时,$E_3(y_3,z_3,0)$是不稳定. ▌

定理 3.2.15[12]　若 $R_0>1$, $\varphi>1$, 则平衡点 $E_4(y_4,z_4,N_4)$局部渐近稳定.

证明　系统(3.2.47)在 $E_4(y_4,z_4,N_4)$点的 Jacobian 矩阵是

$$J(E_4) = \begin{bmatrix} -(\lambda-\alpha)/y_4 & -\lambda y_4 & a\eta y_4/K \\ \gamma + \alpha z_4 & -\gamma y_4/z_4 & a\eta z_4/K \\ -aN_4 & 0 & -\eta N_4/K \end{bmatrix}.$$

其特征方程为

$$r^3 + c_2 r^2 + c_1 r + c_0 = 0,$$

其中

$$\begin{aligned} c_2 &= (\lambda - \alpha)y_4 + \gamma y_4/z_4 + \eta N_4/K > 0, \\ c_1 &= \gamma(\lambda - \alpha)y_4^2/z_4 + (\lambda - \alpha)y_4\eta N_4/K + \gamma\eta y_4 N_4/Kz_4 \\ &\quad + a\alpha\eta y_4 N_4/K + \lambda y_4(\gamma + \alpha z_4) > 0, \\ c_0 &= (\lambda - \alpha)\eta\gamma y_4^2 N_4/Kz_4 + \lambda y_4(\gamma + \alpha z_4)\eta N_4/K \end{aligned}$$

$$+ a\alpha\eta\gamma y_4^2 N_4/Kz_4 - \lambda\alpha\eta a y_4 z_4 N_4/K > 0.$$

容易验证 $c_2c_1 - c_0 > 0$. 因此由 Hurwitz 判别定理知,特征方程的根全都具有负实部,即当 $R_0 > 1, \varphi > 1$ 时,平衡点 $E_4(y_4, z_4, N_4)$ 局部渐近稳定. ▌

§3.3 含潜伏期的传染病模型的全局稳定性

前面两节,我们主要介绍了一些 SIR, SIRS 传染病模型的渐近性态及稳定性. 这一节,我们把人口分为易感者类 S, 潜伏者类 E, 染病者类 I 和移出者类 R, 即考虑了疾病没有发生,但已有病毒潜伏的这类人口 E. 含潜伏者 E 的传染病模型主要有 SEIR, SEIS 及 SEIRS 等模型. 这些模型按疾病的发生率划分,又可分为疾病的发生率是双线性 λSI, 标准 $\beta\frac{SI}{N}$, 强非线性 λI^pS^q 及一般情形 $\beta D(N)SI$ 等不同的模型,这些传染病模型一般情况下是竞争系统,因此,从数学上可以借助于轨道稳定和复合矩阵,把地方病平衡点的全局稳定性彻底解决.

3.3.1 有关数学理论

这小节我们给出了两种证明全局稳定的一般方法. 这些方法对解决含潜伏期 E 类的传染病模型的全局稳定性非常有效.

设 $\boldsymbol{A}$ 是 R^n 上的线性算子,用 $\boldsymbol{A}$ 也代表 R^n 上相应于标准基对应的矩阵, $\wedge^2 R^n$ 代表 R^n 的外积,矩阵 $\boldsymbol{A}$ 在 $\wedge^2 R^n$ 导出规范的线性算子 $\boldsymbol{A}^{[2]}$ 定义为:对 $u_1, u_2 \in R^n$

$$\boldsymbol{A}^{[2]}(u_1 \wedge u_2) = A(u_1) \wedge u_2 + u_1 \wedge A(u_2).$$

相应于 $\wedge^2 R^n$ 的规范基的矩阵 $\boldsymbol{A}^{[2]}$ 称为**第二加性复合矩阵**(Second additive compound matrix),它是一个 $\begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix}$ 矩阵,且满足性质

$$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})^{[2]} = \boldsymbol{A}^{[2]} + \boldsymbol{B}^{[2]}.$$

当 $n = 2$ 时, $\boldsymbol{A}_{2\times 2}^{[2]} = \mathrm{tr}A$; $n = 3$ 时,矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 的第二加性复合矩阵为

$$\boldsymbol{A}^{[2]} = \begin{bmatrix} a_{11} + a_{22} & a_{23} & -a_{13} \\ a_{32} & a_{11} + a_{33} & a_{12} \\ -a_{31} & a_{21} & a_{22} + a_{33} \end{bmatrix}.$$

一般地,一个 $n \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 k 加性复合矩阵 $\boldsymbol{A}^{[k]}$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ 定义为

$$\boldsymbol{A}^{[k]} = D_+ (I + hA)^{(k)} \big|_{h=0},$$

这里 $\boldsymbol{A}^{[k]}$ 是一个 $N \times N$ 矩阵, $N = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}^{(k)}$ 代表矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的 k 阶外幂, D_+ 代表

的是右导数.

设 $\sigma(\mathbf{A})=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$代表矩阵 $\mathbf{A}$ 的谱,则 $\sigma(\mathbf{A}^{[2]})=\{\lambda_i+\lambda_j \mid 1\leqslant i<j\leqslant n\}$是 $\mathbf{A}^{[2]}$的谱.关于一般复合矩阵的性质参见文献[14],复合矩阵与微分方程的关系见文献[13,14].

设开集 $D\subset R^n$,对 $x\in D$, $x\mapsto f(x)\in R^n$ 是 C^1 函数.考虑微分方程

$$x'=f(x). \tag{3.3.1}$$

设 $x(t,x_0)$代表方程(3.3.1)满足条件 $x(0,x_0)=x_0$ 的解,集合 K 被称为方程(3.3.1)在 D 内的**吸引集**,若对每一个紧子集 $K_1\subset D$,当 t 充分大时,都有 $x(t,K_1)\subset K$.我们做下面的基本假设:

(H_1)　方程(3.3.1)在 D 内存在一个紧吸引子集$K\subset D$;

(H_2)　方程(3.3.1)在 D 内有惟一平衡点$\bar{x}\subset D$.

平衡点 $\bar{x}$ 在D 内被称为**全局稳定**,如果它局部稳定而且在 D 内的全部轨线收敛于$\bar{x}$.若 $\bar{x}$ 在D 内全局稳定,则假设(H_1),(H_2)全部被满足.

对传染病模型和许多生态模型,其可行域一般是一个有界锥.因此,条件(H_1)与系统(3.3.1)解的一致持续性等价(见[15]).关于系统(3.3.1)的平衡点 $\bar{x}$ 的全局稳定性问题可描述为:

全局稳定性

若条件(H_1)和(H_2)成立,则能找出(3.3.1)的向量场满足某些条件,使平衡点 $\bar{x}$ 的局部稳定性隐含$\bar{x}$ 是全局稳定.

对 $n=2$,根据 Poincaré-Bendixson 定理,可以利用下面的两种方法解决 $\bar{x}$ 的全局稳定性.

方法Ⅰ　若方程(3.3.1)的全部周期轨道 Ω 在D 内轨道渐近稳定,由 Poincaré 稳定条件$\int_\Omega \operatorname{div} f\mathrm{d}t<0$知,平衡点 $\bar{x}$ 的局部稳定性隐含$\bar{x}$ 在D 内是全局渐近稳定的[16].

方法Ⅱ　若 $D\subset R^2$ 是单连通的,且在 D 内有 $\operatorname{div}\boldsymbol{f}<0$,则由 Bendixson 定理知,系统(3.3.1)在 D 内没有周期轨道,且 $\bar{x}$ 是全局稳定的.

近几年来,把解决二维情形的全局稳定性问题,用类似于上面提到的方法,推广到高维的情形.下面我们介绍这些方法.

(A)　利用 Poincaré-Bendixson 性质证明全局稳定性

定义 3.3.1　假设系统(3.3.1)有一个周期为 ω 的周期解$x=p(t)$,其轨道为 $\gamma=\{p(t)\mid 0\leqslant t\leqslant\omega\}$.轨道 γ 称为**轨道稳定**,若对任意 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,对方程(3.3.1)的任意解 $x(t)$,当 $\operatorname{dist}(x(0),\gamma)<\delta$ 时,对一切 $t\geqslant0$,有 $\operatorname{dist}(x(t),\gamma)<\varepsilon$.轨道 γ 称为**轨道渐近稳定**,若$\lim\limits_{t\to\infty}\operatorname{dist}(x(t),\gamma)=0$ 成立.轨

道 γ 称为**以渐近相轨道渐近稳定**,若 γ 是轨道渐近稳定,且存在 $b>0$,对方程(3.3.1)的任一解 $x(t)$,当 $\mathrm{dist}(x(0),\gamma)<b$ 时,有

$$\lim_{t\to\infty}\|x(t)-p(t-\tau)\|=0,$$

这里 τ 依赖于 $x(0)$,$\|\cdot\|$ 是一种范数.

定义 3.3.2 自治系统(3.3.1)被称为在 D 内是**竞争系统**①,若存在对角矩阵 $\boldsymbol{H}=\mathrm{diag}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)$,这里 ε_i 取 1 或者 -1,使得对一切 $x\in D$,都有

$$\boldsymbol{H}\frac{\partial f}{\partial t}\boldsymbol{H}$$

的非对角线元素非正.

定义 3.3.3 系统(3.3.1)被称为满足 Poincaré-Bendixson 性质,若对(3.3.1)的任何非空紧 ω 极限集不含平衡点,则该极限集一定是闭轨线.

定理 3.3.1[17] 对 $n=3$ 且 D 是凸的区域,若(3.3.1)在 D 内是竞争系统,则该系统一定满足 Poincaré-Bendixson 性质.

对满足 Poincaré-Bendixson 性质的高维系统,具有下面的性质.

定理 3.3.2[17] 若下列条件满足:

1) 假设(H_1)和(H_2)成立,

2) $\bar{x}$ 是局部渐近稳定的,

3) 系统(3.3.1)满足 Poincaré-Bendixson 性质,

4) 系统(3.3.1)的每一个周期轨道是轨道渐近稳定的,

则惟一的平衡点 $\bar{x}$ 在 D 内是全局渐近稳定的.

证明 只须证明 $\bar{x}$ 吸引 D 内的全部点.设 U 是吸引到 $\bar{x}$ 的流盒,即对任意 $x_0\in U$,$x(t,x_0)$ 收敛于 $\bar{x}$.因为 $\bar{x}$ 是渐近稳定的,故 U 是非空开集.若 $D\subset U$,则该定理就被证明了.若不然,则 U 的边界 ∂U 与区域 D 有非空的交集 B,因为 U 及 U 的闭包 $\overline{U}$ 是不变集,且 U 是开集,故 $\partial U=\overline{U}-U$ 也是不变集,因此,B 是正向不变集,故 B 有一个非空紧的 ω 极限集 Ω.根据假设(H_1),我们必有 $\Omega\cap\partial D=\varnothing$,由假设($H_2$)知,$\Omega$ 不含平衡点,故由 Poincoré-Bendixson 性质知,Ω 一定是闭轨,且由条件 4)知 Ω 是轨道渐近稳定的.这是一个矛盾,因为 Ω 是 U 内轨线的 α 极限集. ▌

关于周期解的轨道稳定性,我们有下面的定理:

定理 3.3.3[17] 设方程(3.3.1)存在周期轨道 $\gamma=\{p(t)\mid 0\leqslant t\leqslant\omega\}$,且线性系统

$$z'(t)=\frac{\partial f^{[2]}}{\partial x}(p(t))z(t) \tag{3.3.2}$$

---

① 竞争系统也称 K 单调系统.详细请参阅 §3.5 中有关内容.

是渐近稳定的,则此周期轨道必是以渐近相轨道渐近稳定的. 这里$\frac{\partial f^{[2]}}{\partial x}$是$f$的Jacobian矩阵$\frac{\partial f}{\partial x}$的第二加性复合矩阵,系统(3.3.2)称为(3.3.1)关于$p(t)$的二阶复合系统.

一个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为**稳定的**,若它的全部特征根具有负实部,关于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 稳定的判定有下面的定理.

定理 3.3.4[18]　一个 $n\times n$ 实矩阵$\boldsymbol{A}$ 是稳定的充分必要条件是$\boldsymbol{A}^{[2]}$稳定且$(-1)^n\det A>0$.

利用定理 3.3.2～3.3.4 可得下面的定理.

定理 3.3.5[17]　若下面条件成立:

1) 假设(H_1)和(H_2)成立;

2) 系统(3.3.1)满足 Poincaré-Bendixson 性质;

3) 对系统(3.3.1)具有 $P(0)\in D$ 的每一个周期解$x=p(t)$,系统(3.3.1)关于 $p(t)$的二阶复合系统(3.3.2)是渐近稳定的;

4) $(-1)^n\det\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x})\right)>0$.

则系统(3.3.1)的惟一平衡点 $\bar{x}$ 在D 内是全局渐近稳定的.

(B)利用自治收敛定理证明全局稳定性

当不知道系统的 Poincaré-Bendixson 性质是否存在时,使用自治收敛定理也能证明全局稳定性.

对 $n\geqslant 2$,利用 Bendixson 判据,可以排除系统(3.3.1)的周期解.

定义 3.3.4　若 f 满足某条件使系统(3.3.1)不存在非常数周期解,这样的条件称为 **Bendixson 判据**.

定义 3.3.5　一个 Bendixson 判据被称为**在 C^1 下关于 f 在点 $x_0\in D$ 的局部扰动是鲁棒的**,若对充分小 $\varepsilon>0$ 和 x_0 的一个邻域 U,使得对每一个 $g\in C^1(D\to R^n)$,有 $\mathrm{supp}(f-g)\subset U$,且$\|f-g\|_{C^1}<\varepsilon$ 成立. 这里

$$\|f-g\|_{C^1}=\sup\left\{|f(x)-g(x)|+\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x)-\frac{\partial g}{\partial x}(x)\right|\,x\in D\right\}.$$

g 也称为f 在点$x_0\in D$ 的一个C^1 局部 ε 扰动.

容易看到,当 $n=2$ 时,Bendixson 条件 $\mathrm{div}\boldsymbol{f}(x)<0$ 在 C^1 下关于 f 在每一个点$x_0\in R^2$ 的局部扰动是鲁棒的. Bendixson 判据在高维系统中是 C^1 鲁棒的也被讨论,见[19].

定义 3.3.6　一个点 $x_0\in B$ 被称为是系统(3.3.1)的一个**游荡点**,若存在x_0 的一个邻域 U 及 $T>0$,使得对一切 $t>T$,$U\cap x(t,U)=\varnothing$.

显然,平衡点,极限集均不是游荡点.

引理 3.3.1[17] 设 $f\in C^1(D\to R^n)$,若 x_0 是系统(3.3.1)的非游荡点,则对 x_0 的每一个邻域 U 及 $\varepsilon>0$,一定在 x_0 点存在一个关于 f 的 C^1 局部 ε 扰动 g,使得下面结论成立.

1) $\mathrm{supp}(f-g)\subset U$,

2) 扰动系统 $x'=g(x)$ 有一个过 x_0 点的非常数周期轨道.

定理 3.3.6[17] 若条件(H_1)和(H_2)成立,对系统(3.3.1)进一步假设满足 Bendixson 判据,这个判据对系统(3.3.1)的任何非平衡点和非游荡点 x,f 在该点处的 C^1 局部 ε 扰动是鲁棒的,则 $\bar{x}$ 的局部稳定蕴含全局稳定.

下面的 Bendixson 判据是文献[19]给出的.

设 $x\to P(x)$ 是一个 $\binom{n}{2}\times\binom{n}{2}$ 矩阵函数,且对 $x\in D$ 它是 C^1 的. 假设 $P^{-1}(x)$ 存在且在 $x\in K$ 上是连续的,K 是一个紧的吸引集. 定义

$$q=\limsup_{t\to\infty}\sup_{x_0\in K}\frac{1}{t}\int_0^t\mu(B(x(s,x_0)))\mathrm{d}s,$$

这里

$$B=P_fP^{-1}+P\frac{\partial f^{[2]}}{\partial x}P^{-1}.$$

P_f 是把矩阵 P 的每一个元素 p_{ij},用 P_{ij} 沿 f 的方向导数 $\dfrac{\partial P_{ij}^*}{\partial x}f=\left.\dfrac{\mathrm{d}P_{ij}}{\mathrm{d}t}\right|_{(3.3.1)}$ 取代得到的矩阵,$\mu(B)$ 是矩阵 Lozinskiǐ 测度

$$\mu(B)=\lim_{h\to0^+}\frac{\|I+hB\|-1}{h}.$$

文献[19]显示,如果 D 是单连通的,条件 $q<0$ 能排除系统(3.3.1)出现任何闭轨道,包括周期轨道,同宿轨道和异宿轨道.

定理 3.3.7[19] 若 D 是单连通区域,且条件(H_1)和(H_2)成立,则当 $q<0$ 时,系统(3.3.1)的惟一平衡点 $\bar{x}$ 在 D 内是全局渐近稳定的.

3.3.2 SEIR 传染病模型的全局稳定性

具常数移民的 SEIR 模型

考虑具有常数移民的 SEIR 传染病模型,其疾病传播可用下面的框图表示

$$\xrightarrow{A}\boxed{S}\xrightarrow{\lambda SI}\boxed{E}\xrightarrow{\varepsilon E}\boxed{I}\xrightarrow{\gamma I}\boxed{R}$$

$$\begin{array}{cccc}\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow\\ dS & dE & (d+\alpha)I & dR\end{array}$$

根据框图结构,可导出下面的微分方程组

$$\begin{cases} S' = A - dS - \lambda IS, \\ E' = \lambda SI - (\varepsilon + d)E, \\ I' = \varepsilon E - (\gamma + \alpha + d)I, \\ R' = \gamma I - dR. \end{cases} \tag{3.3.3}$$

由方程组(3.3.3)及 $N(t) = S(t) + E(t) + I(t) + R(t)$ 可得

$$N' = A - dN - \alpha I. \tag{3.3.4}$$

因为方程组(3.3.3)的前三个方程不含 R,故方程组(3.3.3)可导出下面的等价方程组

$$\begin{cases} S' = A - dS - \lambda SI, \\ E' = \lambda IS - (\varepsilon + d)E, \\ I' = \varepsilon E - (\gamma + \alpha + d)I. \end{cases} \tag{3.3.5}$$

N 和 R 能从方程(3.3.4)及 $R = N - S - E - I$ 获得. 因为 $\limsup_{t\to\infty} N(t) \leqslant \frac{A}{d}$,故方程组(3.3.5)的可行域为

$$D = \left\{ (S,E,I) \in R^3_+ \mid S + E + I \leqslant \frac{A}{d} \right\},$$

且区域 D 是方程组(3.3.5)的正向不变集. 方程组(3.3.5)的基本再生数为

$$R_0 = \frac{A\lambda\varepsilon}{d(d+\varepsilon)(\gamma + d + \alpha)}.$$

直接计算可得无病平衡点 $P_0\left(\frac{A}{d},0,0\right)$,且当 $R_0 \leqslant 1$ 时,P_0 是仅有的一个平衡点;当 $R_0 > 1$ 时,方程(3.3.5)还存在惟一的地方性平衡点 $P^* = (S^*, E^*, I^*) \in \mathring{D}$,其中 $\mathring{D}$ 表示 D 的内部,这里

$$S^* = \frac{A}{dR_0}, \qquad E^* = \frac{A(R_0 - 1)}{R_0(d+\varepsilon)}, \qquad I^* = \frac{\varepsilon E^*}{\gamma + \alpha + d}.$$

定理 3.3.8[17]　当 $R_0 \leqslant 1$ 时,方程(3.3.5)的无病平衡点 $P_0\left(\frac{A}{d},0,0\right)$ 在 D 内是全局渐近稳定的. 当 $R_0 > 1$ 时,$P_0\left(\frac{A}{d},0,0\right)$ 是不稳定的,且除 S 轴外,从 D 内充分靠近 P_0 点出发的解都远离 P_0.

证明　设 $L = \varepsilon E + (\varepsilon + d)I$, 则当 $R_0 \leqslant 1$ 时

$$L' = I[\lambda\varepsilon S - (\varepsilon + d)(\gamma + d + \alpha)] = \frac{\lambda\varepsilon AI}{d}\left(\frac{d}{A}S - \frac{1}{R_0}\right) \leqslant 0.$$

当且仅当 $I = 0$ 时,$L' = 0$. 因此,由 LaSalle 不变性原理及极限方程理论知,P_0 点全局渐近稳定. 若 $R_0 > 1$,则除 $E = I = 0$ 外,当 S 充分靠近 $\frac{A}{d}$ 时有 $L' > 0$. 故除

$E=I=0$ 外,从 D 内充分靠近 P_0 点出发的解都远离 P_0. 在 $E=I=0$ 上,由方程(3.3.5)知 $S'=A-dS$,因此有 $\lim\limits_{t\to\infty}S(t)=\dfrac{A}{d}$. ▌

定义 3.3.7 系统(3.3.5)称为在 D 内是**一致持续的**,若存在常数 $c>0$,使得对满足初始条件 $(S(0),E(0),I(0))\in\overset{o}{D}$ 的任何解 $(S(t),E(t),I(t))$ 都有

$$\min\{\lim_{t\to\infty}\inf S(t),\lim_{t\to\infty}\inf E(t),\lim_{t\to\infty}\inf I(t)\}\geqslant c.$$

对系统(3.3.5),可证明下列性质.

性质 3.3.1 系统(3.3.5)一致持续的充分必要条件为 $R_0>1$.

证明类似于文献[20]的性质 3.3,这里略去其证明.

当 $R_0>1$ 时,性质 3.3.1 及 D 的有界性隐含系统(3.3.5)存在一个紧的吸引集 $K\subset\overset{o}{D}$.

下面我们利用定理 3.3.5 来证明系统(3.3.5)惟一正平衡点 P^* 的全局稳定性.

定理 3.3.9[17] 若 $R_0>1$,则系统(3.3.5)惟一正平衡点 P^* 在 $\overset{o}{D}$ 是全局渐近稳定的.

证明 首先验证系统(3.3.5)是一个竞争系统,系统(3.3.5)的 Jacobian 矩阵为

$$\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}-d-\lambda I & 0 & -\lambda S\\ \lambda I & -(\varepsilon+d) & \lambda S\\ 0 & \varepsilon & -(\gamma+\alpha+d)\end{bmatrix}.$$

取 $\boldsymbol{H}=\mathrm{diag}(-1,1,1)$,易验证 $\boldsymbol{HJH}$ 的非对角线元素非正. 故系统(3.3.5)是竞争系统. 由定理 3.3.1 知,方程(3.3.5)满足 Poincaré-Bendixson 性质,故定理 3.3.5 的条件 1)和 2)成立,沿系统(3.3.5)任一周期解的二阶复合系统为

$$\begin{cases}X'=-(2d+\lambda I+\varepsilon)X+\lambda SY+\lambda SZ,\\ Y'=\varepsilon X-(2d+\lambda I+\gamma+\alpha)Y,\\ Z'=\lambda IY-(2d+\varepsilon+\gamma+\alpha)Z.\end{cases}\tag{3.3.6}$$

下面证明系统(3.3.6)是渐近稳定的.

考虑 Liapunov 函数

$$V(X,Y,Z;S,E,I)=\sup\left\{|X|,\frac{E}{I}(|Y|+|Z|)\right\}.\tag{3.3.7}$$

由一致持续性知,周期解 $p(t)=(S(t),E(t),I(t))$ 与边界 ∂D 有一确定的距离. 故一定存在一个常数 $c_1>0$ 使得

$$V(X,Y,Z;S,E,I)\geqslant c_1\sup\{|Z|,|Y|,|Z|\}.\tag{3.3.8}$$

对全部 $(X,Y,Z)\in R^3$ 及 $(S,E,I)\in P(t)$,计算 V 的右导数. 注意到

$$D_+ |X(t)| \leqslant -(2d+\lambda I+\varepsilon)|X(t)| + \lambda S(|Y(t)|+|Z(t)|)$$
$$= -(2d+\lambda I+\varepsilon)|X(t)| + \frac{\lambda IS}{E}\frac{E}{I}(|Y(t)|+|Z(t)| \quad (3.3.9)$$

及

$$D_+ |Y(t)| \leqslant \varepsilon |X(t)| - (2d+\lambda I+\gamma+\alpha)|Y(t)|,$$
$$D_+ |Z(t)| \leqslant \lambda I |Y(t)| - (2d+\varepsilon+\gamma+\alpha)|Z(t)|,$$

有

$$D_+ \frac{E}{I}(|Y(t)|+|Z(t)|)$$
$$= \left(\frac{E'}{E}-\frac{I'}{I}\right)\frac{E}{I}(|Y(t)|+|Z(t)|) + \frac{E}{I}D_+(|Y(t)|+|Z(t)|)$$
$$\leqslant \frac{\varepsilon E}{I}|X(t)| + \left(\frac{E'}{E}-\frac{I'}{I}-2d-\gamma-\alpha\right)\frac{E}{I}(|Y(t)|+|Z(t)|. \quad (3.3.10)$$

由(3.3.9)及(3.3.10)可得

$$D_+ V(t) \leqslant \max\{g_1(t),g_2(t)\}V(t), \quad (3.3.11)$$

这里

$$g_1(t) = -2d-\lambda I-\varepsilon+\frac{\lambda IS}{E}, \quad (3.3.12)$$

$$g_2(t) = \frac{E'}{E}-\frac{I'}{I}-2d-\gamma-\alpha+\frac{\varepsilon E}{I}. \quad (3.3.13)$$

把系统(3.3.5)改写为

$$\frac{\lambda SI}{E} = \frac{E'}{E}+\varepsilon+d, \frac{\varepsilon E}{I} = \frac{I'}{I}+\gamma+d+\alpha. \quad (3.3.14)$$

由(3.3.12)～(3.3.14)得

$$\max\{g_1(t),g_2(t)\} \leqslant \frac{E'}{E}-d.$$

因此

$$\int_0^\omega \max\{g_1(t),g_2(t)\}\mathrm{d}t \leqslant \log E(t)\Big|_0^\omega - \omega d = -\omega d.$$

由上式及(3.3.11)可得,$\lim\limits_{t\to\infty}V(t)=0$. 故由(3.3.8)可知, 当 $t\to\infty$时,$(X(t),Y(t),Z(t))\to 0$, 即二阶复合系统(3.3.6)是渐近稳定的. 这样就验证了定理3.3.5的条件 3)满足.

设$\boldsymbol{J}(P^*)$是系统(3.3.5)在 P^* 的 Jacobian 矩阵,则

$$\det(\boldsymbol{J}(P^*)) = \begin{vmatrix} -\lambda I^*-d & 0 & -\lambda S^* \\ \lambda I^* & -\varepsilon-d & \lambda S^* \\ 0 & \varepsilon & -\gamma-\alpha-d \end{vmatrix}$$

$$= -(\lambda I^* + d)(\varepsilon + d)(\gamma + \alpha + d) + \lambda\varepsilon S^* d.$$

由于 $P^* = (S^*, E^*, I^*)$ 是平衡点，故有 $\lambda\varepsilon S^* = (\varepsilon + d)(\gamma + \alpha + d)$. 因此，$\det(\boldsymbol{J}(P^*)) = -\lambda I^*(\varepsilon + d)(\gamma + \alpha + d) < 0$. 这样就验证了定理 3.3.5 的全部条件被满足，故 P^* 在 $\overset{o}{D}$ 全局渐近稳定. ▌

具有指数出生的 SEIR 模型

我们考虑具有指数出生和疾病的发生率是标准的 SEIR 传染病模型，其框图为

$$\xrightarrow{bN} \boxed{S} \xrightarrow{\lambda SI/N} \boxed{E} \xrightarrow{\varepsilon E} \boxed{I} \xrightarrow{\gamma I} \boxed{R}$$

$$\downarrow dS \qquad \downarrow dE \qquad \downarrow (d+\alpha)I \qquad \downarrow dR$$

相应的微分方程为

$$\begin{cases} S' = bN - dS - \lambda IS/N, \\ E' = \lambda IS/N - (\varepsilon + d)E, \\ I' = \varepsilon E - (\gamma + \alpha + d)I, \\ R' = \gamma I - dR. \end{cases} \tag{3.3.15}$$

总人口 $N(t) = S(t) + E(t) + I(t) + R(t)$ 满足方程

$$N' = (b - d)N - \alpha I. \tag{3.3.16}$$

作归一化变换

$$s = \frac{S}{N}, \quad e = \frac{E}{N}, \quad i = \frac{I}{N}, \quad r = \frac{R}{N}.$$

则方程(3.3.15)变为

$$\begin{cases} s' = b - bs - \lambda is + \alpha is, \\ e' = \lambda is - (\varepsilon + b)e + \alpha ie, \\ i' = \varepsilon e - (\gamma + \alpha + b)i + \alpha i^2, \\ r' = \gamma i - br + \alpha ir. \end{cases} \tag{3.3.17}$$

因为 $s + e + i + r = 1$，故只须考虑(3.3.17)的前三个方程

$$\begin{cases} s' = b - bs - \lambda is + \alpha is, \\ e' = \lambda is - (\varepsilon + b)e + \alpha ie, \\ i' = \varepsilon e - (\gamma + \alpha + b)i + \alpha i^2. \end{cases} \tag{3.3.18}$$

方程(3.3.18)的可行域

$$D = \{(s, e, i) \in R_+^3 \mid 0 \leqslant s + e + i \leqslant 1\}.$$

容易验证 D 是系统(3.3.18)的一个正向不变集. 系统(3.3.18)的修正再生数为

$$\theta = \frac{\lambda\varepsilon}{(b + \varepsilon)(\gamma + \alpha + b)}.$$

方程(3.3.18)总存在无病平衡点 $P_0(1,0,0)$，且当 $\theta > 1$ 时，有惟一的正平衡点

$p^*(s^*,e^*,i^*)$,而且有下面的定理,详见文献[20].

定理 3.3.10[20] 当 $\theta\leqslant 1$ 时,系统(3.3.18)的无病平衡点 $p_0(1,0,0)$是全局渐近稳定;当 $\theta>1$ 时,该平衡点是不稳定的.

当 $\theta>1$ 时,文献[20]利用定理 3.3.5 也证明了下面的定理.

定理 3.3.11[20] 当 $\theta>1$ 时,系统(3.3.18)有惟一的地方病平衡点 $p^*(s^*,e^*,i^*)$,且该点在 D 内全局渐近稳定.

其证明思路是:①当 $\theta>1$ 时,系统(3.3.18)是一致持续的,从而定理 3.3.5 的条件 1)被满足;②说明系统(3.3.18)是竞争系统,故具有 Poincaré-Bendixson 性质,因而定理 3.3.5 的条件 2)满足;③证明系统(3.3.15)的任一周期解对应的二阶复合系统是渐近稳定的;④验证$\det(J(P^*))<0$.

文献[21]还考虑了具有非线性疾病发生率的 SEIR 模型,其方程为

$$\begin{cases} S' = -\lambda I^p S^q + \mu - \mu S, \\ E' = \lambda I^p S^q - (\varepsilon+\mu)E, \\ I' = \varepsilon E - (\gamma+\mu)I, \\ R' = \gamma I - \mu R, \end{cases} \tag{3.3.19}$$

这里 p,q 是正常数,其它参数与模型(3.3.3)类似,方程(3.3.19)的基本再生数为 $R_0=\dfrac{\lambda\varepsilon}{(\varepsilon+\mu)(\gamma+\mu)}$,仍用定理 3.3.5 可证明,当 $0<p\leqslant 1$, $R_0>1$ 时,地方病平衡点 P^* 在不变集 $D=\{(S,E,I)\in R^3_+ \mid 0\leqslant S+E+I\leqslant 1\}$ 内是全局渐近稳定的.

具有饱和接触率的 SEIR 模型

下面考虑文献[22]给出的具有饱和接触率的 SEIR 模型,其结构为

$$\xrightarrow{\mu K} \boxed{S} \xrightarrow{\beta C(N)\frac{SI}{N}} \boxed{E} \xrightarrow{\varepsilon_0 E} \boxed{I} \xrightarrow{\gamma_0 I} \boxed{R}$$

$$S \downarrow \mu S,\quad E \downarrow \mu E,\quad I \downarrow \mu I + \alpha_0 I,\quad R \downarrow \mu R$$

这里 β 是每次接触传染的概率,$C(N)=\dfrac{bN}{1+bN+\sqrt{1+2bN}}=\dfrac{bN}{f(N)}$是饱和接触率,其微分方程为

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} = \mu K - \dfrac{\beta b}{f(N)}SI - \mu S, \\ \dfrac{dE}{dt} = \dfrac{\beta b}{f(N)}SI - \varepsilon_0 E - \mu E, \\ \dfrac{dI}{dt} = \varepsilon_0 E - \gamma_0 I - \mu I - \alpha_0 I, \\ \dfrac{dR}{dt} = \gamma_0 I - \mu R. \end{cases} \tag{3.3.20}$$

总人口 $N(t)=S(t)+E(t)+R(t)$满足方程

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=\mu K-\mu N-\alpha_0 I. \tag{3.3.21}$$

令 $\mu\mathrm{d}t=\mathrm{d}\tau$,并且 $\mathrm{d}\tau$ 仍用 $\mathrm{d}t$ 来表示,则方程组(3.3.20)及(3.3.21)与下面的方程组等价

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=\dfrac{a(N-E-I-R)I}{f(N)}-(1+\varepsilon)E,\\ \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=\varepsilon E-(1+\gamma+\alpha)I,\\ \dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}=\gamma I-R,\\ \dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=K-N-\alpha I,\end{cases} \tag{3.3.22}$$

这里 $a=\beta b/\mu,\varepsilon=\varepsilon_0/\mu,\gamma=\gamma_0/\mu,\alpha=\alpha_0/\mu$.

方程组(3.3.22)的可行域为

$$D=\{(E,I,R,N)\in R_+^4 \mid 0\leqslant E+I+R\leqslant N\leqslant K\}.$$

易证 D 是方程组(3.3.22)的正向不变集.(3.3.22)的基本再生数为

$$R_0=\frac{aK\varepsilon}{\delta w f(K)},$$

这里 $\delta=1+\gamma+\alpha,w=1+\varepsilon$.

正平衡点的存在惟一性

令方程组(3.3.22)的右端为 0 得方程组

$$\begin{cases}a(N-E-I-R)I=(1+\varepsilon)Ef(N),\\ \varepsilon E=(1+\gamma+\alpha)I,\\ \gamma I=R,\\ K-N=\alpha I.\end{cases} \tag{3.3.23}$$

从(3.3.23)的第二个方程解出 $E=\dfrac{1+\gamma+\alpha}{\varepsilon}I$,并代入第一个方程得

$$a(N-E-I-R)I=\frac{(1+\varepsilon)(1+\gamma+\alpha)}{\varepsilon}f(N)I. \tag{3.3.24}$$

从方程(3.3.24)可得 $I=0$ 或者

$$a\varepsilon(N-E-I-R)=\delta w f(N). \tag{3.3.25}$$

当 $I=0$ 时,易得无病平衡点 $P_0(0,0,0,K)$,当 $I\neq 0$ 时,我们研究方程组

$$\begin{cases}a(N-E-I-R)=\delta w f(N),\\ \varepsilon E=\delta I,\\ \gamma I=R,\\ K-N=\alpha I.\end{cases} \tag{3.3.26}$$

从(3.3.26)后面的三个方程可得

$$E=\frac{\delta}{\alpha\varepsilon}(K-N),\quad I=\frac{1}{\alpha}(K-N),\quad R=\frac{\gamma}{\alpha}(K-N).$$

把上面三个方程代入(3.3.26)的第一个方程可得

$$a[\delta\omega N-(\delta\omega-\alpha\varepsilon)K]=\alpha\delta\omega f(N). \tag{3.3.27}$$

注意到 $f(N)=1+bN+\sqrt{1+2bN}$,故(3.3.27)变为

$$F(N)\triangleq(a-\alpha b)\delta\omega N-[a(\delta\omega-\alpha\varepsilon)K+\alpha\delta\omega]-\alpha\delta\omega\sqrt{1+2bN}=0. \tag{3.3.28}$$

下面我们证明当 $R_0>1$ 时,$F(N)=0$ 在$(0,K)$内有惟一正根 N^*.

因为

$$R_0=\frac{aK\varepsilon}{\delta\omega f(K)}=\frac{aK\varepsilon}{(1+\gamma+\alpha)(1+\varepsilon)(1+bK+\sqrt{1+2bK})}$$
$$\leqslant\frac{aK\varepsilon}{\alpha\varepsilon bK}=\frac{a}{\alpha b}.$$

故 $R_0>1$ 隐含 $a-\alpha b>0$. 又因为

$$F(0)=-[\alpha\delta\omega+a(\delta\omega-\alpha\varepsilon)K]-\alpha\delta\omega<0,$$
$$F(K)=aK\varepsilon-\alpha\delta\omega f(K)=\alpha\delta\omega f(K)(R_0-1)>0.$$

故方程(3.3.28)在$(0,K)$内至少有一个正根 N^*. 注意到

$$\frac{\mathrm{d}F(N)}{\mathrm{d}N}=\delta\omega\left[a-\alpha b-\frac{\alpha b}{\sqrt{1+2bN}}\right],$$

且当 $N<\frac{a(2\alpha b-a)}{2b(a-\alpha b)^2}$时,$\frac{\mathrm{d}F(N)}{\mathrm{d}N}<0$. 当 $N>\frac{a(2\alpha b-a)}{2b(a-\alpha b)^2}$时,$\frac{\mathrm{d}F(N)}{\mathrm{d}N}>0$. 故结合$F(0)<0$,可知 $F(N)=0$ 在$(0,K)$内至多有一正根 N^*,从而可得惟一地方病平衡点 $P^*(E^*,I^*,R^*,N^*)$,其中

$$E^*=\frac{\delta}{\alpha\varepsilon}(K-N^*),I^*=\frac{1}{\alpha}(K-N^*),R^*=\frac{\gamma}{\alpha}(K-N^*).$$ ▌

平衡点的全局稳定性

定理 3.3.12[22]　当 $R_0\leqslant1$ 时,方程(3.3.22)的无病平衡点 $P_0(0,0,0,K)$ 全局渐近稳定;当 $R_0>1$ 时,$P_0(0,0,0,K)$不稳定.

证明　方程(3.3.22)在 P_0 点处的 Jacobian 矩阵为

$$J(P_0)=\begin{bmatrix}-\omega & \frac{aK}{f(K)} & 0 & 0\\ \varepsilon & -\delta & 0 & 0\\ 0 & \gamma & -1 & 0\\ 0 & -\alpha & 0 & -1\end{bmatrix}.$$

因为$\boldsymbol{J}(P_0)$的第三和第四列只有一个非零对角元素-1,故只须判断矩阵

$$\boldsymbol{J}_{11}=\begin{bmatrix}-\omega & \dfrac{aK}{f(K)}\\ \varepsilon & -\delta\end{bmatrix}.$$

特征根是否全部具有负实部.事实上,$\mathrm{tr}\boldsymbol{J}_{11}=(-\omega+\delta)<0$,$\det\boldsymbol{J}_{11}=\delta\omega(1-R_0)$,且当$R_0<1$时,$\det\boldsymbol{J}_{11}>0$;$R_0>1$时,$\det\boldsymbol{J}_{11}<0$.故当$R_0<1$时,$p_0$点局部渐近稳定,当$R_0>1$时,$P_0$不稳定.

下面证明全局渐近稳定性.

构造 Liapunov 函数$V(E,I,R,N)$

$$V(E,I,R,N)=\varepsilon E+(\varepsilon+1)I+cR+\frac{c}{2}(N-K)^2,$$

这里

$$c=\frac{\delta\omega-\dfrac{aK\varepsilon}{f(K)}}{2(\alpha K+\gamma)}=\frac{\delta\omega}{2(\alpha K+\gamma)}(1-R_0).$$

当$R_0\leqslant 1$时,$c\geqslant 0$.

$$\begin{aligned}\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(3.3.22)}&=\frac{a\varepsilon(N-E-I-R)I}{f(N)}-\delta\omega I+\gamma cI-cR-c(N-K)^2-c\alpha I(N-K)\\&=\left[\frac{a\varepsilon N}{f(N)}-\delta\omega+\gamma c+\alpha cK\right]I-\frac{a\varepsilon(E+I+R)I}{f(N)}\\&\quad-cR-c(N-K)^2-\alpha cNI.\end{aligned}$$

因为$\dfrac{N}{f(N)}$是N的单调不减函数,故$\dfrac{N}{f(N)}\leqslant\dfrac{K}{f(K)}$,从而

$$\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{(3.3.22)}\leqslant-\frac{\delta\omega}{2}(1-R_0)I-\frac{a\varepsilon(E+I+R)I}{f(N)}-cR-c(N-K)^2-\alpha cNI\leqslant 0.$$

注意到,当$R_0<1$时

$$\left\{(E,I,R,N)\in D\,\middle|\,\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=0\right\}=\{I=0\}.$$

当$R_0=1$时

$$\left\{(E,I,R,N)\in D\,\middle|\,\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=0\right\}=\{(0,I,R,N)\in D\}.$$

故由 LaSalle 不变性原理及极限方程理论知,当$R_0\leqslant 1$时,P_0是全局渐近稳定的,这样就完成了定理的证明. ▌

容易证明,当$R_0>1$时,系统(3.3.22)惟一的地方病平衡点P^*是局部渐近稳定的,文献[22]利用定理 3.3.5 还证明了当$\alpha=0$,$R_0>1$时,地方病平衡点P^*的全局渐近稳定性.因为当$\alpha=0$时,由(3.3.22)的第四个方程可得$N(t)\to K$,故(3.3.22)的极限方程为

$$
\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \dfrac{a(K-E-I-R)I}{f(K)} - (1+\varepsilon)E, \\
\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \varepsilon E - (1+\gamma)I, \\
\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = \gamma I - R.
\end{cases}
\tag{3.3.29}
$$

作变换 $x = K - E - I - R, y = E, z = I$,则方程(3.3.29)变为

$$
\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = K - \dfrac{axz}{f(K)} - x, \\
\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \dfrac{axz}{f(K)} - (1+\varepsilon)y, \\
\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \varepsilon y - (1+\gamma)z.
\end{cases}
\tag{3.3.30}
$$

方程(3.3.30)是一个三维竞争系统,由定理 3.3.5 及用类似于定理 3.3.9 的方法不难证明,方程(3.3.30)相应的正平衡点的全局稳定性.有兴趣的读者可参阅文献[22].

3.3.3 考虑常数移民的 SEIS 模型的全局渐近稳定性

这一节我们主要研究一类不含移出者类 R 且具有常数移民的 SEIS 模型,这类模型地方病平衡点的全局渐近稳定性可用定理 3.3.7 得到完满的解决.

考虑传染病模型

$$
\xrightarrow{A} \boxed{S} \xrightarrow{\lambda SI} \boxed{E} \xrightarrow{\varepsilon E} \boxed{I} \xrightarrow{\gamma I} \boxed{S}
$$

(with outflows dS from S, dE from E, $(d+\alpha)I$ from I)

这里 A 是常数移民率,其微分方程为

$$
\begin{cases}
S' = A - \lambda IS - dS + \gamma I, \\
E' = \lambda IS - (d+\varepsilon)E, \\
I' = \varepsilon E - (d+\gamma+\alpha)I.
\end{cases}
\tag{3.3.31}
$$

总人口 $N(t) = S(t) + E(t) + I(t)$满足方程

$$
N' = A - dN - \alpha I. \tag{3.3.32}
$$

方程(3.3.31)的正向不变集为

$$
D = \left\{ (S,E,I) \in R_+^3 \;\middle|\; S + E + I \leqslant \frac{A}{d} \right\}.
$$

模型(3.3.31)有基本再生数

$$
R_0 = \frac{A\lambda\varepsilon}{d(d+\varepsilon)(d+\gamma+\alpha)}.
$$

方程(3.3.31)总存在无病平衡点 $P_0\left(\dfrac{A}{d},0,0\right) \in \partial D$. 当 $R_0 > 1$ 时,也存在

惟一的地方病平衡点 $P^*(S^*,E^*,I^*)$,其中

$$S^* = \frac{(d+\varepsilon)(d+\gamma+\alpha)}{\lambda\varepsilon}, I^* = \frac{A-dS^*}{\lambda S^*-\gamma}, E^* = \frac{d+\alpha+\gamma}{\varepsilon}I^*$$

当 $R_0\leqslant 1$ 时,用类似于定理 3.3.8 的方法不难证明无病平衡点 P_0 是全局渐近稳定的,且当 $R_0>1$ 时,P_0 是不稳定的. 下面主要考虑当 $R_0>1$ 时,惟一地方病平衡点的全局渐近稳定性.

定理 3.3.13[23] 当 $R_0>1$ 时,方程(3.3.31)惟一地方病平衡点 P^* 在 $\mathring{D}$ 是全局渐近稳定的.

证明 首先利用后面的引理 3.7.3. 易证系统(3.3.31)的一致持续性等价于平衡点 P_0 的不稳定性,故当 $R_0>1$ 时,系统(3.3.31)是一致持续的. 因此,在 D 内存在一个紧吸引子集 K. 故定理 3.3.7 的假设(H_1)和(H_2)成立. 下面验证 $q<0$. 为此,求系统(3.3.31)的 Jacobian 矩阵 $\boldsymbol{J}=\frac{\partial f}{\partial x}$.

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} -\lambda I-d & 0 & -\lambda S+\gamma \\ \lambda I & -d-\varepsilon & \lambda S \\ 0 & \varepsilon & -d-\gamma-\alpha \end{bmatrix},$$

矩阵 $\boldsymbol{J}$ 的第二加性复合矩阵为

$$\boldsymbol{J}^{[2]} = \begin{bmatrix} -\lambda I-\varepsilon-2d & \lambda S & \lambda S-\gamma \\ \varepsilon & -\lambda I-\gamma-\alpha-2d & 0 \\ 0 & \lambda I & -\varepsilon-\gamma-\alpha-2d \end{bmatrix}.$$

选取 $p(x)=p(S,E,I)=\mathrm{diag}\left(1,\frac{E}{I},\frac{E}{I}\right)$,则

$$P_fP^{-1} = \mathrm{diag}\left(0,\frac{E'}{E}-\frac{I'}{I},\frac{E'}{E}-\frac{I'}{I}\right).$$

矩阵 $B=P_fP^{-1}+PJ^{[2]}P^{-1}$ 可写成分块矩阵

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix},$$

其中

$$B_{11} = -\lambda I-\varepsilon-2d, B_{12} = \left[\frac{\lambda SI}{E},(\lambda S-\gamma)\frac{I}{E}\right], B_{21} = \left[\frac{\varepsilon E}{I},0\right]^{\mathrm{T}},$$

$$B_{22} = \begin{bmatrix} \frac{E'}{E}-\frac{I'}{I}-\lambda I-\gamma-\alpha-2d & 0 \\ \lambda I & \frac{E'}{E}-\frac{I'}{I}-\varepsilon-\gamma-\alpha-2d \end{bmatrix}.$$

令 (u,v,w) 代表 $R^3\cong R^{\binom{3}{2}}$ 中的向量,其范数 $\|\cdot\|$ 定义为

$$\|(u,v,w)\| = \max\{|u|, |v|+|w|\}.$$

相应于范数 $\|\cdot\|$ 的 Lozinskiǐ 测度是 $\mu(B)$,利用文献[13]的估值方法得

$$\mu(B) \leqslant \sup\{g_1, g_2\},$$

其中

$$g_1 = \mu_1(B_{11}) + |B_{12}|, g_2 = |B_{21}| + \mu_1(B_{22}).$$

$|B_{12}|$ 和 $|B_{21}|$ 是相应于 l_1 向量范数的矩阵范数,μ_1 是相应于 l_1 范数的 Lozinskiǐ 测度,因此

$$\mu_1(B_{11}) = -\lambda I - \varepsilon - 2d, \; |B_{21}| = \frac{\varepsilon E}{I},$$

$$|B_{12}| = \max\left\{\frac{\lambda SI}{E}, \frac{|\lambda S - \gamma| I}{E}\right\}.$$

由方程(3.3.31)的第一个方程得

$$S'(t) = A - dS - (\lambda S - \gamma)I. \tag{3.3.33}$$

由(3.3.33)容易证明存在 t^*,当 $t>t^*$ 时,有 $\lambda S - \gamma > 0$. 事实上,若 $\lambda S(t) \leqslant \gamma$, 由(3.3.33)得 $S' \geqslant A - dS \geqslant A - \frac{d\gamma}{\lambda}$. 而 $R_0 > 1$ 隐含 $A - \frac{d\gamma}{\lambda} > 0$, 即 $S'(t) \geqslant A - \frac{d\gamma}{\lambda} > 0$, 这意味着从 $\mathring{D}$ 出发的每一个解一定在有限时间内过 $\lambda S = \gamma$ 线,并最终停留在 $\lambda S = \gamma$ 之上,这与 $S(t) \leqslant \frac{\gamma}{\lambda}$ 矛盾. 因此

$$|B_{12}| = \frac{\lambda SI}{E}.$$

下面计算 $\mu_1(B_{22})$. 把 B_{22} 的每一列的非对角矩阵取绝对值,然后加到相应列的对角元素上得

$$B_{22}' = \begin{bmatrix} \frac{E'}{E} - \frac{I'}{I} - \gamma - \alpha - 2d & 0 \\ \lambda I & \frac{E'}{E} - \frac{I'}{I} - \varepsilon - \gamma - \alpha - 2d \end{bmatrix}.$$

取 B_{22}' 的两个对角元素的最大值即得 $\mu(B_{22})$. 则

$$\mu(B_{22}) = \max\left\{\frac{E'}{E} - \frac{I'}{I} - \gamma - \alpha - 2d, \frac{E'}{E} - \frac{I'}{I} - \varepsilon - \gamma - \alpha - 2d\right\}$$
$$= \frac{E'}{E} - \frac{I'}{I} - \gamma - \alpha - 2d.$$

因此,当 $t > t^*$ 时

$$g_1 = -\lambda I - \varepsilon - 2d + \frac{\lambda SI}{E}, \tag{3.3.34}$$

$$g_2 = \frac{E'}{E} - \frac{I'}{I} - \gamma - \alpha - 2d + \frac{\varepsilon E}{I}. \tag{3.3.35}$$

由方程(3.3.31)得

$$\frac{E'}{E}+d+\varepsilon=\frac{\lambda SI}{E},\frac{I'}{I}+d+\gamma+\alpha=\frac{\varepsilon E}{I}. \tag{3.3.36}$$

把方程(3.3.36)代入(3.3.34)和(3.3.35)并利用 $\mu(B)\leqslant\sup\{g_1,g_2\}$ 得

$$\mu(B)\leqslant\frac{E'}{E}-d,\quad 对\ t>t^*,$$

从而

$$\frac{1}{t}\int_0^t\mu(B)\mathrm{d}S\leqslant\frac{1}{t}\int_0^{t^*}\mu(B)\mathrm{d}S+\frac{1}{t}\log\frac{E(t)}{E(t^*)}-d\frac{t-t^*}{t},$$

即有

$$q=\limsup_{t\to\infty}\sup_{x\in K}\frac{1}{t}\int_0^t\mu(B)\mathrm{d}S\leqslant-\frac{d}{2}<0.$$

因此定理 3.3.7 的全部条件满足,故结论成立. ▌

值得提及的是,文献[24]把模型(3.3.31)推广到一般模型,其框图为

$$\xrightarrow{\mu K}\boxed{S}\xrightarrow{BC(N)SI/N}\boxed{E}\xrightarrow{\varepsilon E}\boxed{I}\xrightarrow{\gamma I}\boxed{S}$$

（$S\downarrow\mu S$，$E\downarrow\mu E$，$I\downarrow(\mu+\alpha)I$）

其中对接触率 $C(N)$ 的假设为:

1) $C(N)$是关于 $N\geqslant0$ 的非负非减连续可微函数, (3.3.37)

2) $\dfrac{C(N)}{N}$是关于$N>0$ 的非增连续可微函数. (3.3.38)

上述模型是一个非常广泛的 SEIS 传染病模型,该模型的基本再生数为

$$R_0=\frac{\beta\varepsilon C(K)}{(\mu+\alpha+\gamma)(\mu+\varepsilon)}.$$

文献[24]采用类似于模型(3.3.31)的研究方法得到:

当 $R_0\leqslant1$ 时,惟一的无病平衡点是全局渐近稳定的;当 $R_0>1$ 时,无病平衡点不稳定,存在惟一的地方病平衡点且是全局渐近稳定的.

用定理 3.3.7 还可以处理没有因病死亡且疾病的发生率是双线性的 SEIRS 模型的各类平衡点的全局稳定性,以及无因病死亡但有垂直传染和连续预防接种的 SEIR 模型的全局稳定性,详见文献[17,19].

§3.4 对染病者进行隔离的传染病模型

对疾病的流行,我们通常要采取控制措施,最直接的控制措施是对易感人群进行预防接种或对染病人群进行隔离,以减少疾病的发生率. 对易感人群进行预防接种我们将在后面介绍. 这一节,我们主要介绍对染病者进行隔离的传染病模

型及隔离对疾病传播的影响.

3.4.1　具有隔离项的 SIQS 传染病模型的全局稳定性

当我们不采取隔离措施时,疾病的流行按 SIS 模型规律进行,即不考虑移出者类 R.若对染病者采取隔离措施,即引进隔离者类 Q(quarantine),则原来的 SIS 模型相应变为 SIQS 模型.设总人口为 $N(t)$,把总人口分为易感者 S 类,染病者 I 类和隔离者 Q 类,即 $N(t)=S+I+Q$, 其中 Q 是在 t 时刻染病者 I 被隔离的数量.

双线性疾病发生率的 SIQS 模型

考虑具常数移民和双线性疾病发生率的 SIQS 模型

这里 A,d,β 是正常数,μ,δ,ε 和 α 是非负常数,其中 A 是单位时间内因出生和移民而进入易感者 S 类的数量,简称输入率;d 是自然死亡率系数;β 是双线性疾病发生率系数;δ 是隔离率系数;α 是因病死亡率系数;γ 和 ε 分别是从染病者 I 类和隔离者 Q 类恢复到 S 类的恢复系数.相应的微分方程为

$$\begin{cases} S'(t) = A - \beta SI - dS + \gamma I + \varepsilon Q, \\ I'(t) = [\beta S - (d + \alpha + \delta + \gamma)]I, \\ Q'(t) = \delta I - (d + \alpha + \varepsilon)Q. \end{cases} \tag{3.4.1}$$

总人口 $N(t)$满足方程 $N'(t)=A-dN-\alpha(I+Q)$.当疾病不存在时,总人口趋于$\frac{A}{d}$.关于 N 的微分方程隐含了方程(3.4.1)从 R_+^3 出发的解最终趋向、进入或停留在 R_+^3 的子集 D 内,其中

$$D = \left\{(S,I,Q) \in R_+^3 \mid S + I + Q \leqslant \frac{A}{d}\right\}.$$

因此,只须考虑(3.4.1)在 D 内解的情况.D 对系统(3.4.1)是一个正向不变集.系统(3.4.1)总存在无病平衡点 $P_0=\left(\frac{A}{d},0,0\right)$,用 R_0 代表其基本再生数

$$R_0 = \frac{A\beta}{d(\gamma + \delta + d + \alpha)}.$$

R_0 实际上是在无病平衡点 P_0 处,有效接触率 β 乘以易感者数量$\frac{A}{d}$,再乘以染病者 I 的平均染病周期$\frac{1}{\gamma+\delta+d+\alpha}$得到的.当 $R_0>1$ 时,在 D 内也存在惟一

的正平衡点(地方病平衡点)$P^*(S^*,I^*,Q^*)$,其中

$$S^* = \frac{A}{dR_0}, I^* = \frac{A(1-1/R_0)}{(d+\alpha)(1+\delta/(\delta+d+Q))}, Q^* = \frac{\delta I^*}{\varepsilon+d+\alpha}.$$

注意到

$$N^* = S^* + I^* + Q^* = \frac{A}{d} - \frac{A\alpha(1-1/R_0)}{d(d+\alpha)},$$

因此,当 $\alpha>0$ 时,在地方病平衡点的总人口 $N^*<A/d$.

下面的定理是刻画(3.4.1)在 D 内解的情况.

定理 3.4.1[25] 对方程(3.4.1),若 $R_0\leqslant 1$,则无病平衡点 P_0 在 D 内全局渐近稳定;若 $R_0>1$,则无病平衡点 P_0 不稳定,地方病平衡点 P^* 在 $D-\{(S,I,Q)\mid I=0\}$ 内全局渐近稳定.

证明 通过分析系统(3.4.1)无病平衡点 P_0 处的 Jacobian 矩阵易知,当 $R_0\leqslant 1$ 时,P_0 局部渐近稳定;当 $R_0>1$ 时,P_0 不稳定.为证明当 $R_0\leqslant 1$ 时,P_0 的全局渐近稳定性,构造 Liapunov 函数 $V=I$,其沿系统(3.4.1)的导数为

$$V' = [\beta S - (\gamma+\delta+d+\alpha)]I \leqslant [\beta A/d - (\gamma+\delta+d+\alpha)]I \leqslant 0.$$

由 LaSalle 不变性原理及极限方程理论知,P_0 是全局渐近稳定的.

关于地方病平衡点 P^* 在 $R_0>1$ 的局部渐近稳定性可由 Routh-Hurwitz 判别法给出.为了证明当 $R_0>1$ 时,P^* 的全局稳定性,首先我们把系统(3.4.1)化为下面的等价系统

$$\begin{cases} N' = -d(N-N^*) - \alpha(I-I^*) - \alpha(Q-Q^*), \\ I' = [\beta(N-N^*) - \beta(I-I^*) - \beta(Q-Q^*)]I, \\ Q' = \delta(I-I^*) - (\varepsilon+\alpha+d)(Q-Q^*). \end{cases} \tag{3.4.2}$$

考虑 Liapunov 函数

$$V(t) = \frac{(\delta+\varepsilon+2d+\alpha)}{\beta}\left[I - I^* - I^*\ln\frac{I}{I^*}\right] + \frac{1}{2}\left\{\frac{(\varepsilon+2d)(N-N^*)^2}{\alpha} + [(N-N^*)-(Q-Q^*)]^2 + \frac{(\varepsilon+2d)(Q-Q^*)^2}{\delta}\right\}.$$

函数 $V(t)$ 在区域 $D-\{(S,I,Q)\mid I=0\}$ 是正定函数,V 的导数为

$$V' = -(\delta+\varepsilon+2d+\alpha)(I-I^*)^2 - \frac{d(\varepsilon+2d+\alpha)}{\alpha}(N-N^*)^2 - \left[\frac{(\varepsilon+2d)(\varepsilon+d+\alpha)}{\delta} + (\varepsilon+d)\right](Q-Q^*)^2.$$

因为 V' 是负定的,故由 Liapunov 定理知,P^* 在 $D-\{(S,I,Q)\mid I=0\}$ 上是全局渐近稳定. ▌

从定理 3.4.1 可以看出,引进隔离项 Q 并没有改变在无病平衡点 P_0 和地

方病平衡点 P^* 的阈值条件和稳定性,但当隔离项 Q 引入后,由于 $\delta>0$,故基本再生数 R_0 变得比原来的SIS模型基本再生数 R_0' 要小,这样 $R_0\leqslant 1$ 就更容易得到满足,故系统更易趋向于无病平衡点 P_0.

还应指出,由基本再生数 R_0 的表达式可见,γ 增大将使 R_0 的值减小,但 R_0 的值却与 ε 无关,这一事实表明,为抑制疾病的流行,加强对未隔离者的治疗比对隔离者的治疗更为重要.

疾病的发生率是 $\beta SI/(S+I)$ 的SIQS模型

现在考虑疾病的发生率受隔离者类 Q 调控的SIQS传染病模型,这里传统的标准疾病发生率 $\beta SI/N$ 中的总人口 N 用 $N-Q=S+I$ 代替.其动力学模型为

$$\begin{cases} S' = A - \beta SI/(S+I) - dS + \gamma I + \varepsilon Q, \\ I' = [\beta S/(S+I) - (\gamma+\delta+d+\alpha)]I, \\ Q' = \delta I - (\varepsilon + d + \alpha)Q. \end{cases} \tag{3.4.3}$$

总人口仍满足方程 $N'=A-dN-\alpha(I+Q)$,因此,在染病者不存在时,$N\to A/d$.故系统(3.4.3)的可行域为 $D_1=\left\{(S,I,Q)\in R_+^3 \mid S+I+Q\leqslant\dfrac{A}{d}\right\}$.类似于系统(3.4.1)的分析,可获得系统(3.4.3)的无病平衡点 $P_0=(A/d,0,0)$ 及基本再生数

$$R_0 = \frac{\beta}{\gamma+\delta+d+\alpha}.$$

当 $R_0>1$ 时,系统(3.4.3)在 D_1 内有惟一的地方病平衡点 $P^*=(S^*,I^*,Q^*)$,这里

$$S^* = \frac{I^*}{R_0-1}, I^* = \frac{A}{\dfrac{d}{1-1/R_0}+\alpha+\dfrac{\delta(\alpha+d)}{\varepsilon+d+\alpha}}, Q^* = \frac{\delta I^*}{\varepsilon+d+\alpha}.$$

定理3.4.2[25]　对系统(3.4.3),若 $R_0\leqslant 1$,则在区域 D_1 内,无病平衡点 P_0 全局渐近稳定;若 $R_0>1$,则 P_0 是不稳定的,疾病一致持续,且地方病平衡点 P^* 局部渐近稳定.特别地,当 $R_0>1$,$\alpha=0$ 时,地方病平衡点 P^* 在 $D_1-\{(S,I,Q)\in R_+^3 \mid I=0\}$ 内全局渐近稳定.

证明　对无病平衡点 P_0,通过对系统(3.4.3)的线性化系统易知,当 $R_0<1$ 时,P_0 局部渐近稳定;当 $R_0>1$ 时 P_0 不稳定.当 $R_0\leqslant 1$ 时,通过构造Liapunov函数 $V=I$,也能够证明 P_0 在 D_1 内是全局渐近稳定的;当 $R_0>1$ 时,利用文献[38]的定理4.5易得疾病一致持续,且 P^* 的局部渐近稳定性通过Routh-Hurwitz定理很容易证明.下面主要证明:当 $R_0>1$,$\alpha=0$ 时,地方病平衡点 P^* 全局渐近稳定.

事实上,当 $\alpha=0$ 时,有 $N'=A-dN$,且 $\lim\limits_{t\to+\infty}N(t)=\dfrac{A}{d}$,故方程(3.4.3)的极限方程为

$$\begin{cases}I'=[\beta(A/d-I-Q)/(A/d-Q)-(\gamma+\delta+d)]I,\\Q'=\delta I-(d+\varepsilon)Q.\end{cases}\tag{3.4.4}$$

对系统(3.4.4),考虑区域

$$\Gamma=\left\{(I,Q)\in R_+^2\mid I+Q\leqslant\frac{A}{d}\right\}.$$

易证 Γ 是(3.4.4)的正向不变集.在 Γ 的边界 ∂T 上有平衡点(0,0),当 $R_0>1$ 时,该平衡点是鞍点,从 $I=0$ 出发的轨线趋向于(0,0)点.另一个平衡点$(I^*,Q^*)\in\Gamma$ 是局部渐近稳定的.取 $B=\dfrac{1}{I}$,则有

$$\frac{\partial}{\partial I}[\beta(A/d-I-Q)/(A/d-Q)-\gamma-\delta-d]+\frac{\partial}{\partial Q}[\delta-(\varepsilon+d)Q/I]$$
$$=-\beta/(A/d-Q)-(\varepsilon+d)/I<0.$$

因此,在区域 Γ 内无周期解.由 Poincaré-Bendixson 定理知,从 $\Gamma-\{(I,Q)\mid I=0\}$ 出发的解都趋向于(I^*,Q^*),即(I^*,Q^*)在 $\Gamma-\{(I,Q)\mid I=0\}$ 内全局渐近稳定.再根据极限方程理论知,系统(3.4.3)的地方病平衡点 P^* 在 $D-\{(S,Q,I)\mid I=0\}$ 内全局渐近稳定. ▌

3.4.2 具有隔离项的 SIQR 模型

双线性疾病发生率的 SIQR 模型

假设病人恢复后具有永久免疫,染病者 I 和隔离者 Q 恢复后都进入移出者类 R,其中 R 是移出者的数量,总人口 $N=S(t)+I(t)+Q(t)+R(t)$.疾病的发生率是 βSI,对易感者 S 具有常数移民,则所考虑的 SIQR 传染病模型框图为

$$\xrightarrow{A}\boxed{S}\xrightarrow{\beta SI}\boxed{I}\xrightarrow{\delta I}\boxed{Q}\xrightarrow{\varepsilon Q}\boxed{R}$$

(图中:I 以 γI 直接进入 R;各类向下移出分别为 d,$(d+\alpha_1)Q$,$(d+\alpha_2)Q$,dR)

其中 γ 和 ε 分别为从 I 类和 Q 类移出率系数,α_1 和 α_2 分别为 I 类和 Q 类的因病死亡率系数,δ 是隔离率系数.SIQR 微分方程模型为

$$\begin{cases}S'(t)=A-\beta SI-dS,\\I'(t)=[\beta S-(\gamma+\delta+d+\alpha_1)]I,\\Q'(t)=\delta I-(d+\alpha_2+\varepsilon)Q,\\R'(t)=\gamma I+\varepsilon Q-dR.\end{cases}\tag{3.4.5}$$

总人口 $N(t)$满足方程

$$N' = A - dN - \alpha_1 I - \alpha_2 Q.$$

故方程(3.4.5)的可行域为

$$D = \{(S,I,Q,R) \in R_+^4 \mid S + I + Q + R \leqslant A/d\},$$

且 D 是(3.4.5)的正向不变集.

系统(3.4.5)总有无病平衡点 $P_0(A/d,0,0,0)$. 基本再生数为

$$R_0 = \frac{\beta(A/d)}{\gamma + \delta + d + \alpha_1}.$$

当 $R_0 > 1$ 时,区域 D 内含有惟一的地方病平衡点 $P^* = (S^*, I^*, Q^*, R^*)$,这里

$$S^* = \frac{A/d}{R_0}, \qquad I^* = \frac{d(R_0 - 1)}{\beta},$$

$$Q^* = \frac{\delta d(R_0 - 1)}{\beta(\varepsilon + d + \alpha_2)}, \quad R^* = \left(\gamma + \frac{\varepsilon\delta}{\varepsilon + d + \alpha_2}\right)\frac{R_0 - 1}{\beta}.$$

注意到

$$\begin{aligned} N^* &= S^* + I^* + Q^* + R^* \\ &= \frac{A/d}{R_0} + \left[d + \gamma + \frac{\delta(\varepsilon + d)}{\varepsilon + d + \alpha_2}\right]\frac{R_0 - 1}{\beta}. \end{aligned}$$

因此,当 $R_0 > 1$ 时,$N^* < A/d$.

下面的定理刻画了系统(3.4.5)的全局稳定性.

定理 3.4.3[25]　对系统(3.4.5),若 $R_0 \leqslant 1$,则无病平衡点 P_0 在 D 内全局渐近稳定;当 $R_0 > 1$ 时,无病平衡点 P_0 不稳定,惟一的地方病平衡点 P^* 在 $D - \{(S,I,Q,R) \mid I = 0\}$ 内全局渐近稳定.

证明　无病平衡点 P_0 的稳定性完全类似于定理 3.4.1 的证明,这里不再赘述. 下面主要考虑当 $R_0 > 1$ 时,地方病平衡点 P^* 的全局渐近稳定性.

地方病平衡点 P^* 的局部渐近稳定性可通过线性化系统及 Hurwitz 判别法证得. 为证全局稳定性,由于方程组(3.4.5)的前两个方程中不含 Q 与 R,故我们首先考虑(3.4.5)关于 SI 的子系统.

取 Liapunov 函数

$$V = S^* \int_{S^*}^{S} \frac{\beta u - (\gamma + \delta + d + \alpha_1)}{u} \mathrm{d}u + \int_{I^*}^{I} \frac{\beta S^* u + dS^* - A}{u} \mathrm{d}u.$$

显然 V 是正定函数,且当 $S \to +\infty$ 或 $I \to +\infty$ 时,$V \to +\infty$. 求 V 沿系统(3.4.5)的导数,并注意到 $\gamma + \delta + d + \alpha_1 = \beta S^*$ 得

$$\begin{aligned} V' &= S^* \beta(S - S^*)(A - \beta SI - dS)/S + \beta(\beta S^* I + dS^* - A)(S - S^*) \\ &= -A\beta(S - S^*)^2/S \leqslant 0. \end{aligned}$$

注意到,$V' = 0$ 可导出 $S = S^*$. 容易看出,$V' = 0$ 的最大不变子集只有

$\{(S^*,I^*)\}$,故由 LaSalle 不变性原理知,(S^*,I^*)在 R_+^2 上全局渐近稳定,从而得 $\lim\limits_{t\to+\infty} I(t)=I^*$.

由方程(3.4.5)的第三个方程得

$$Q(t)=\left[Q_0+\int_{t_0}^{t}\delta I(\tau)\exp\{(\varepsilon+d+\alpha_2)(\tau-t_0)\}d\tau\right]\cdot\exp\{-(\varepsilon+d+\alpha_2)(t-t_0)\}.$$

由 L'Hospital 法则得

$$\lim_{t\to+\infty}Q(t)=\lim_{t\to\infty}\frac{\delta I(t)}{\varepsilon+d+\alpha_2}=\frac{\delta I^*}{\varepsilon+d+\alpha_2}=Q^*.$$

类似地,可得 $\lim\limits_{t\to+\infty}R(t)=\dfrac{\alpha I^*+\varepsilon Q^*}{d}=R^*$.

从上面分析可得,地方病平衡点 $P^*(S^*,I^*,Q^*,R^*)$是全局吸引的,结合 P^* 的局部稳定性可知 P^* 在 $D-\{(S,I,Q,R)\mid I=0\}$上是全局渐近稳定. ▌

疾病的发生率是 $\beta SI/(S+I+R)$的 SIQR 模型

上面给出的疾病发生率是双线性的 SIQR 模型,下面研究疾病的发生率是 $\beta SI/(S+I+R)$的 SIQR 模型:

$$\begin{cases}S'(t)=A-\beta SI/(S+I+R)-dS,\\I'(t)=[\beta S/(S+I+R)-(\gamma+\delta+d+\alpha_1)]I,\\Q'(t)=\delta I-(\varepsilon+d+\alpha_2)Q,\\R'(t)=\gamma I+\varepsilon Q-dR.\end{cases}\tag{3.4.6}$$

模型(3.4.6)从两个方面推广了 Feng 和 Thieme[59]的模型,一是有些染病者个体不经过隔离者类直接进入 R 类;二是考虑了因病死亡率.该系统的可行区域仍为 $D=\left\{(S,I,Q,R)\in R_+^4\mid S+I+Q+R\leqslant\dfrac{A}{d}\right\}$,是一个正向不变集.无病平衡点为 $P_0(A/d,0,0,0)$,基本再生数为

$$R_0=\frac{\beta}{\gamma+\delta+d+\alpha_1}.$$

当 $R_0>1$ 时,D 含有惟一地方病平衡点 $P^*=(S^*,I^*,Q^*,R^*)$,这里

$$S^*=\frac{(A/d)[(\gamma+d)(\varepsilon+d+\alpha_2)+\delta\varepsilon]}{(\varepsilon+d+\alpha_2)[R_0(\gamma+\delta+d+\alpha_1)-\delta-\alpha_1]+\varepsilon\delta},$$

$$I^*=\frac{A(R_0-1)(\varepsilon+d+\alpha_2)}{(\varepsilon+d+\alpha_2)[R_0(\gamma+\delta+d+\alpha_1)-\delta-\alpha_1]+\varepsilon\delta},$$

$$Q^*=\frac{\delta A(R_0-1)}{(\varepsilon+d+\alpha_2)[R_0(\gamma+\delta+d+\alpha_1)-\delta-\alpha_1]+\varepsilon\delta},$$

$$R^*=\frac{(A/d)(R_0-1)[\gamma(\varepsilon+d+\alpha_2)+\varepsilon\delta]}{(\varepsilon+d+\alpha_2)[R_0(\gamma+\delta+d+\alpha_1)-\delta-\alpha_1]+\varepsilon\delta},$$

$$N^{*}=\frac{(A/d)R_0[(\gamma+d)(\varepsilon+d+\alpha_2)+\delta(\varepsilon+d)]-d\delta}{(\varepsilon+d+\alpha_2)[R_0(\gamma+\delta+d+\alpha_1)-\delta-\alpha_1]+\varepsilon\delta}.$$

对于系统(3.4.6).文献[25]证明:若 $R_0\leqslant 1$,则无病平衡点 P_0 在 D 内是全局渐近稳定的;当 $R_0>1$ 时,P_0 点不稳定,惟一地方病平衡点 P^* 通常是局部渐近稳定的.但是,当 $R_0>1$,对某些参数值,Hopf 分支现象可能发生.

该节给出了具有隔离项且疾病的发生率是双线性和不考虑隔离项的标准传染病模型,一般情况下其定性性质与不考虑隔离项的模型没有太大变化,但从基本再生数角度讲是减弱了,这样更有利于疾病的控制.但对带隔离项且疾病的发生率为 $\beta SI/(S+I+R)$ 的 SIQR 模型,则其定性性质与其它模型有本质区别,该模型可能出现 Hopf 分支现象.

§3.5 性传播疾病(STD)模型

关于疾病在多个易感群体和染病群体中的传播模型,在 2.3.3 已进行了介绍.这一节,我们主要考虑一个特殊的疾病传播模型即性传播疾病(STD)模型.以此来显示这类模型的结构和一般的研究方法,特别是 K-单调系统方法.关于性传播疾病模型的研究已有许多文献[29~33].我们这里主要介绍 C. Castillo-chavez, W. Huang 和 J. Li 等人的一些工作.

3.5.1 STD 模型的建立

在建立通过性活动传播的 SIS 传染病模型时,我们假设性活动只在异性之间进行,即将进行性活动的群体分为男性和女性.考虑女性可能在几个不同的固定场所,所以把女性又分为两种群体,这样实质上把进行性传播的人群分为三类,分别用上标 m 代表男性,上标 f 代表 f 群体的女性,上标 c 代表 c 群体的女性,且同一群体中的患病者由于病原体菌株的不同又分为两类,分别用下标 1 和 2 表示.这样用 $S^k(k=m,f,c)$ 分别代表易感者男性、f 群体易感者女性和 c 群体的易感者女性,用 $I_i^k(k=m,f,c,i=1,2)$ 代表含菌株 i 的不同群体中的染病者.

根据以上分析可建立下面的 SIS 传染病模型.

$$\begin{cases}\dot{S}^k=\Lambda^k-B^k-\mu^k S^k+\sum\limits_{i=1}^{2}\gamma_i^k I_i^k,\\ \dot{I}_i^k=B_i^k-(\mu^k+\gamma_i^k)I_i^k, k=m,f,c,i=1,2,\end{cases}\tag{3.5.1}$$

这里

$$B_i^m=r^m(T^m,T^f,T^c)S^m\left(\beta_i^f\frac{I_i^f}{T^f}+\beta_i^c\frac{I_i^c}{T^c}\right),$$

$$B_i^l = r^l(T^m, T^f, T^c) S^l \beta_i^m \frac{I_i^m}{T^m}, l = f, c,$$

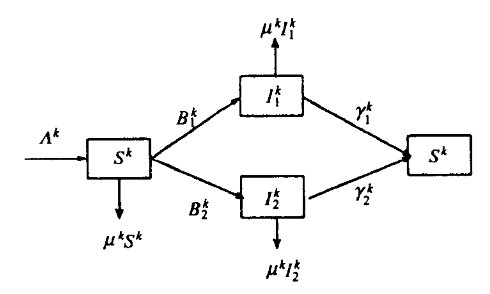
$$B^k = \sum_{i=1}^{2} B_i^k, k = m, f, c.$$

约束条件为

$$r^m(T^m, T^f, T^c) T^m = r^f(T^m, T^f, T^c) T^f + r^c(T^m, T^f, T^c) T^c,$$

其中 Λ^k 是进入性活动人群的易感者的输入率；$1/\mu^k$ 代表在 k 类人群中的平均性活动时间；γ_i^k 是染病者的恢复率；$T^k = S^k + \sum_{i=1}^{2} I_i^k$ 分别代表男性人群、女性 f 类人群和女性 c 类人群的总数；γ^k 是 T^m、T^f 及 T^c 的函数，它分别代表各群体中每个个体在单位时间内的性伙伴数；β_i^k 是传染的概率. 约束条件表示在单位时间内女性的性伙伴总数和男性的性伙伴总数是相等的.

方程组(3.5.1)框图为



由方程组(3.5.1)知

$$\dot{T}^k = \Lambda^k - \mu^k T^k. \tag{3.5.2}$$

注意到(3.5.2)的任一解都有

$$\lim_{t \to +\infty} T^k = \frac{\Lambda^k}{\mu^k}.$$

因此，方程组(3.5.1)的极限方程为

$$\begin{cases} \dot{I}_i^m = -\sigma_i^m I_i^m + (p^m - \sum_{j=1}^{2} I_j^m)(a_i^{mf} I_i^f + a_i^{mc} I_i^c), \\ \dot{I}_i^f = -\sigma_i^f I_i^f + a_i^{fm}(p^f - \sum_{j=1}^{2} I_j^f) I_i^m, \\ \dot{I}_i^c = -\sigma_i^c I_i^c + a_i^{cm}(p^c - \sum_{j=1}^{2} I_j^c) I_i^m, \end{cases} \tag{3.5.3}$$

这里

$$b^k = r^k(\Lambda^m/\mu^m, \Lambda^f/\mu^f, \Lambda^c/\mu^c), \sigma_i^k = \mu^k + \gamma_i^k, p^k = \frac{\Lambda^k}{\mu^k},$$

$$a_i^{mf}=\frac{b^m\beta_i^f}{p^f},\ a_i^{mc}=\frac{b^m\beta_i^c}{p^c},\ a_i^{fm}=\frac{b^f\beta_i^m}{p^m},\ a_i^{cm}=\frac{b^c\beta_i^m}{p^m}.$$

为叙述整齐方便,我们引进下面的记号

$$x_1=I_1^m,x_2=I_1^f,x_3=I_1^c,y_1=I_2^m,y_2=I_2^f,y_3=I_2^c,$$
$$p_1=p^m,p_2=p^f,p_3=p^c,\gamma_1^x=\sigma_1^m,\gamma_2^x=\sigma_1^f,\gamma_3^x=\sigma_1^c,$$
$$\gamma_1^y=\sigma_2^m,\gamma_2^y=\sigma_2^f,\gamma_3^y=\sigma_2^c,$$
$$a_{12}=\frac{a_1^{mf}}{\sigma_1^m},a_{13}=\frac{a_1^{mc}}{\sigma_1^m},a_{21}=\frac{a_1^{fm}}{\sigma_1^f},a_{31}=\frac{a_1^{cm}}{\sigma_1^c},$$
$$\beta_{12}=\frac{a_2^{mf}}{\sigma_2^m},\beta_{13}=\frac{a_2^{mc}}{\sigma_2^m},\beta_{21}=\frac{a_2^{fm}}{\sigma_2^f},\beta_{31}=\frac{a_2^{cm}}{\sigma_2^c},$$
$$a_{11}=a_{22}=a_{23}=a_{32}=a_{33}=\beta_{11}=\beta_{22}=\beta_{23}=\beta_{32}=\beta_{33}=0.$$

从而方程组(3.5.3)可写成下面方程

$$\begin{cases}\dot{x}_i=\gamma_i^x[-x_i+(p_i-x_i-y_i)\sum_j^3 a_{ij}x_j]\triangleq X_i(x,y),\\ \dot{y}_i=\gamma_i^y[-y_i+(p_i-x_i-y_i)\sum_j^3\beta_{ij}y_j]\triangleq Y_i(x,y),i=1,2,3.\end{cases}\tag{3.5.4}$$

注意 p_i 是 i 群体的总人口数,$i=1,2,3$.故我们只考虑可行域 $\Omega\subset R_+^6$ 上的方程性态.其中 Ω 为

$$\Omega=\{(x,y)\in R_+^6\mid x_i+y_i\leqslant p_i,i=1,2,3\},$$

这里 $x=(x_1,x_2,x_3)\in R^3,y=(y_1,y_2,y_3)\in R^3$.

易证 Ω 是方程(3.5.4)的正向不变集.

3.5.2 预备知识

为了研究系统(3.5.4)的平衡点的全局稳定性,需要一些 K 单调系统的知识和有关结论,下面加以介绍.

定义 3.5.1 设 $K=\{x\in R^n\mid(-1)^{m_i}x_i\geqslant 0,1\leqslant i\leqslant n\},m_i\in\{0,1\}$.在 K 上定义**偏序**:

$$x\geqslant_K y\ \text{当且仅当}\ x-y\in K;$$
$$x>_K y\ \text{当且仅当}\ x-y\in K,x\neq y;$$
$$x\gg_K y,\text{当且仅当}\ x-y\in\overset{o}{K},$$

这里 $\overset{o}{K}$ 代表 K 的内部.

定义 3.5.2 动力系统

$$x'=f(x)\tag{3.5.5}$$

称为 K 单调系统,若 $x_0 \geqslant_K y_0$,则有 $\varphi_t(x_0) \geqslant_K \varphi_t(y_0)$,这里 $\varphi_t(x_0)$,$\varphi_t(y_0)$分别是系统(3.5.5)过初值 x_0 和 y_0 的轨线.

下面给出一个动力系统是 K 单调动力系统的充要条件.

定理 3.5.1[21,35] 若 $f(x) \in C^1(\Omega)$,Ω 是凸集,则系统(3.5.5)是 K 单调系统的充分必要条件为存在 $P_m = \mathrm{diag}((-1)^{m_1},(-1)^{m_2},\cdots,(-1)^{m_n})$,$m_i \in \{0,1\}$,使矩阵 $P_m Df(x) P_m$ 有非负的非对角线元素,其中 $Df(x)$为 $f(x)$的 Jacobian 矩阵.

下面的定理在证明动力系统正平衡点的全局稳定性时非常有用.详细见文献[34].

定理 3.5.2[34] 设 $O^+(x) = \{\varphi_t(x) \mid t \geqslant 0\}$是 K 单调系统(3.5.5)的正半轨,且 $O^+(x)$在 Ω 上是紧集,系统(3.5.5)有正平衡点 E 及边界平衡点E_1.则必有下面结论之一成立:

(i) 对全部满足 $E_1 >_K x \geqslant_K E$ 的 $x = (x_1, x_2)$,$x_2 \neq 0$,有

$$\lim_{t \to +\infty} \varphi_t(x) = E.$$

(ii) 对全部满足 $E_1 \geqslant_K x > E$ 的 $x = (x_1, x_2)$,有

$$\lim_{t \to +\infty} \varphi_t(x) = E_1.$$

令 $X = (X_1, X_2, X_3)$, $Y = (Y_1, Y_2, Y_3)$,$(x, y) \in \Omega$,则系统(3.5.4)的 Jacobian矩阵为

$$\frac{\partial(X(x,y), Y(x,y))}{\partial(x,y)} = \begin{bmatrix} A_{11}(x,y) & A_{12}(x,y) \\ A_{21}(x,y) & A_{22}(x,y) \end{bmatrix},$$

这里 $A_{ij}(x,y)$是 3×3 矩阵,且 $A_{11}(x,y)$和 $A_{22}(x,y)$的全部非对角线元素是非负,$A_{12}(x,y)$和 $A_{21}(x,y)$的全部非对角线元素是非正,故取 $P_m = \mathrm{diag}(1,1,1,-1,-1,-1)$可使矩阵 $P_m \dfrac{\partial(X(x,y), Y(x,y))}{\partial(x,y)} P_m$ 的非对角线元素非负,从而系统(3.5.4)是一个 K 单调动力系统,即若

$$(x^0, y^0) \geqslant_K (x^1, y^1) \Leftrightarrow x^0 \geqslant x^1, \quad y^0 \leqslant y^1,$$

则有

$$(\hat{x}(t), \hat{y}(t)) \geqslant_K (\bar{x}(t), \bar{y}(t)), t \geqslant 0,$$

这里$(\hat{x}(t), \hat{y}(t))$是满足初始条件$(\hat{x}(0), \hat{y}(0)) = (x^0, y^0)$的解,$(\bar{x}(t), \bar{y}(t))$是满足初始条件$(\bar{x}(0), \bar{y}(0)) = (x^1, y^1)$的解.

系统(3.5.4)有无病平衡点 $x=0, y=0$ 及可能的非平凡平衡点:边界平衡点 $E_x = (\bar{x}, 0)$,$\bar{x} \gg 0$ 及 $E_y = (0, \bar{y})$,$\bar{y} \gg 0$,地方病平衡点 $E = (x^*, y^*)$,$x^* \gg 0$,$y^* \gg 0$.

关于无病平衡点的稳定性及非平凡平衡点的存在性和稳定性文献[32]给出

下面的结论：

定理 3.5.3[32]　系统(3.5.4)无病平衡点全局渐近稳定的充要条件为

$$p_1p_2\alpha_{12}\alpha_{21}+p_1p_3\alpha_{13}\alpha_{31}\leqslant 1,$$
$$p_1p_2\beta_{12}\beta_{21}+p_1p_3\beta_{13}\beta_{31}\leqslant 1.$$

定理 3.5.4[32]　系统(3.5.4)的边界平衡点 $E_x(E_y)$存在的充要条件为

$$p_1p_2\alpha_{12}\alpha_{21}+p_1p_3\alpha_{13}\alpha_{31}>1(p_1p_2\beta_{12}\beta_{21}+p_1p_3\beta_{13}\beta_{31}>1).$$

进一步，若 $E_x(E_y)$是仅有的一个边界平衡点，即 $E_x(E_y)$存在，$E_y(E_x)$不存在，则 $E_x(E_y)$是全局渐近稳定.

定理 3.5.5[32]　若 E_x 和 E_y 都存在，设

$$\Delta_1=\alpha_{12}\alpha_{21}-\beta_{12}\beta_{21},\Delta_2=\alpha_{13}\alpha_{31}-\beta_{13}\beta_{31},$$

则当 $\Delta_1\Delta_2\geqslant 0,\Delta_1+\Delta_2\neq 0$ 时，E_x 和 E_y 有相反的稳定性，此时地方病平衡点不存在，当边界平衡点局部稳定时，必全局稳定.

3.5.3　地方病平衡点的存在性和稳定性

定理 3.5.3～3.5.5 刻画了动力系统(3.5.4)的基本情况，本段主要考虑当 $\Delta_1\Delta_2<0$ 时，地方病平衡点的存在性和稳定性，不失一般性. 我们总假设 $\Delta_1>0,\Delta_2<0$.

关于系统(3.5.4)地方病平衡点的存在性文献[33]给出下面的定理.

定理 3.5.6[33]　系统(3.5.4)地方病平衡点存在且惟一的充要条件为下列条件之一成立.

(H₁)　$p_1p_2h^*-\theta^*>0,p_1p_3h^*-1>0$，且

$$\frac{p_2h^*+\beta_{21}\theta^*}{p_3h^*+\beta_{31}}>\frac{p_1p_2h^*-\theta^*}{p_1p_3h^*-1}>\frac{p_2h^*+\alpha_{21}\theta^*}{p_3h^*+\alpha_{31}};$$

(H₂)　$p_1p_2h^*-\theta^*>0,p_1p_3h^*-1>0$，且

$$\frac{p_2h^*+\beta_{21}\theta^*}{p_3h^*+\beta_{31}}<\frac{p_1p_2h^*-\theta^*}{p_1p_3h^*-1}<\frac{p_2h^*+\alpha_{21}\theta^*}{p_3h^*+\alpha_{31}},$$

其中 $\theta^*=-\dfrac{\Delta_2}{\Delta_1},h^*=\theta^*\alpha_{12}\alpha_{21}+\alpha_{13}\alpha_{31}$.

使用(3.5.4)在正平衡点 $E(x^*,y^*)$处的线性系统可证明下面的定理.

定理 3.5.7[33]　当(H_2)成立时，地方病平衡点 $E(x^*,y^*)$是稳定的；当(H_1)成立时，地方病平衡点不稳定.

系统(3.5.4)边界平衡点 E_x 和 E_y 的稳定性如下：

定理 3.5.8[33]　系统(3.5.4)边界平衡点 E_x 稳定(或不稳定)的充要条件为

$$\frac{p_1p_2h^*-1}{p_2h^*+\theta^*\alpha_{21}}>\frac{p_1p_3h^*-1}{p_3h^*+\alpha_{31}}\left(或\frac{p_1p_2h^*-\theta^*}{p_2h^*+\theta^*\alpha_{21}}<\frac{p_1p_3h^*-1}{p_3h^*+\alpha_{31}}\right),$$

E_y 稳定(不稳定)充要条件为

$$\frac{p_1p_2h^*-\theta^*}{p_2h^*+\theta^*\beta_{21}}<\frac{p_1p_3h^*-1}{p_3h^*+\beta_{31}}\left(或\frac{p_1p_2h^*-\theta^*}{p_2h^*+\theta^*\beta_{21}}>\frac{p_1p_3h^*-1}{p_3h^*+\beta_{31}}\right).$$

由定理 3.5.6~3.5.8 可得下面的推论.

推论 3.5.1 系统(3.5.4)存在地方病平衡点的充要条件为两个边界平衡点有相同的稳定性,且地方病平衡点的稳定性与边界边平衡点的稳定性相反.

为了证明地方病平衡点的全局渐近稳定性,我们首先对系统(3.5.4)的解进行估计,即下面的引理.

引理 3.5.1[33] 设系统(3.5.4)有不稳定的边界平衡点 $E_x=(\bar{x},0)$ 或 $E_y=(0,\bar{y})$,$(x(t),y(t))$是(3.5.4)满足 $x(0)>0,y(0)>0$ 的解,则一定存在向量 $V^*\gg 0$(或 $U^*\gg 0$)使得下式成立

$$\bar{x}\geqslant\lim_{t\to\infty}\sup x(t),\quad \lim_{t\to\infty}\inf y(t)\geqslant V^*,$$

或

$$\bar{y}\geqslant\lim_{t\to\infty}\sup y(t),\quad \lim_{t\to\infty}\inf x(t)\geqslant U^*.$$

下面利用引理 3.5.1 及定理 3.5.2 来证明地方病平衡点 E 的全局渐近稳定性.

定理 3.5.9[33] 若系统(3.5.4)的边界平衡点 E_x 和 E_y 存在且都不稳定,即地方病平衡点 E 存在且是局部渐近稳定,则地方病平衡点全局渐近稳定.即有:若$(x(t),y(t))$是(3.5.4)满足$x(0)>0,y(0)>0$的解,$(x(0),y(0))\in\Omega$,则有

$$\lim_{t\to\infty}(x(t),y(t))=E.$$

证明 假设地方病平衡点 $E(x^*,y^*)$是局部渐近稳定.首先,考虑系统(3.5.4)满足 $0<x(0)\leqslant\bar{x},0<y(0)\leqslant\bar{y}$ 的解$(x(t),y(t))$.因为 $x(0)>0$,$y(0)>0$,且 $E_x\geqslant_K E\geqslant_K E_y$,故存在 $x_0,y_0\in R_+^3$,使得 $0<x_0\leqslant x(0),x_0\leqslant x^*$;$0<y_0\leqslant y(0),y_0\leqslant y^*$ 成立.从而可得

$$E_x>_K(\bar{x},y_0)\geqslant_K E\geqslant_K(x_0,\bar{y})>_K E_y \tag{3.5.6}$$

及

$$(\bar{x},y_0)\geqslant_K(x(0),y(0))\geqslant_K(x_0,\bar{y}). \tag{3.5.7}$$

因为地方病平衡点 E 是惟一的,由定理 3.5.2 及(3.5.7)式可得

$$\lim_{t\to\infty}(x^+(t),y^+(t))=E,\lim_{t\to\infty}(x_+(t),y_+(t))=E, \tag{3.5.8}$$

这里$(x^+(t),y^+(t))$,$(x_+(t),y_+(t))$分别是系统(3.5.4)满足初始条件

$(x^+(0),y^+(0))=(\bar{x},y_0)$和$(x_+(0),y_+(0))=(x_0,\bar{y})$的解.由于(3.5.4)是单调系统,因此由(3.5.7)和(3.5.8)可得

$$\lim_{t\to\infty}(x(t),y(t)) = E.$$

其次,令$(x(0),y(0))\in\Omega,x(0)>0,y(0)>0$.则引理 3.5.1 隐含点$(\hat{x},\hat{y})\in\Gamma=\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant\bar{x},0\leqslant y\leqslant\bar{y}\},\hat{x}\gg0,\hat{y}\gg0$.从而对满足初始条件$(\hat{x}(0),\hat{y}(0))=(\hat{x},\hat{y})$的解$(\hat{x}(t),\hat{y}(t))$,当$t\to\infty$时,收敛于$E$.又因为$E$是局部渐近稳定的,所以存在$(\hat{x},\hat{y})$的一个邻域,使得从该邻域内出发的任何解都收敛于$E$,即$(x(t),y(t))\to E$. ▌

现在考虑原系统(3.5.1)的全局稳定性,我们仅考虑满足初始条件

$$S^k(0)>0,k=m,f,c,(I_i^m(0),I_i^f(0),I_0^c(0))>0,\quad i=1,2 \tag{3.5.9}$$

的解.

定理 3.5.10[33]　设系统(3.5.4)的地方病平衡点$E(x^*,y^*)$存在且局部渐近稳定.若系统(3.5.1)的解$(S^k(t),I^k(t),k=m,f,c,i=1,2)$满足初始条件(3.5.9),则有

$$\lim_{t\to\infty}(I_1^m(t),I_1^f(t),I_1^c(t)) = x^*,\lim_{t\to\infty}(I_2^m(t),I_2^f(t),I_2^c(t)) = y^*$$

及

$$\lim_{t\to\infty}(S^m(t),S^f(t),S^c(t)) = S^* = (p_1,p_2,p_3)-x^*-y^*.$$

证明　对$k=m,f,c$,由系统(3.5.1)可得

$$\begin{aligned}S^k(t)+I_1^k(t)+I_2^k(t) &= T^k(t)\\ &= T_0^k e^{-\mu^k t}+p^k(1-e^{-\mu^k t}),t\geqslant0.\end{aligned} \tag{3.5.10}$$

因$x=(x_1,x_2,x_3)=(I_1^m,I_1^f,I_1^c),y=(y_1,y_2,y_3)=(I_2^m,I_2^f,I_2^c)$,故由引理 3.5.1知,对$x(0)>0,y(0)>0,(x(t),y(t))$不收敛于系统(3.5.4)的边界平衡点(0,0),E_x及E_y.由定理 3.5.9 知,系统(3.5.1)的极限系统(3.5.4)在R_+^6内没有含平衡点的闭轨线,故由[51]中的推论 4.3 知

$$(I_1^m(t),I_1^f(t),I_1^c(t)) = x(t)\to x^*,\quad t\to\infty,$$
$$(I_2^m(t),I_2^f(t),I_2^c(t)) = y(t)\to y^*,\quad t\to\infty.$$

从而由(3.5.10)可得

$$(S^m(t),S^f(t),S^c(t))\to S^*,\quad t\to\infty.$$ ▌

§3.6　传染病模型的持续性

对一些复杂的传染病模型,如疾病的发生率为$C(N)SI/N$,或非自治的传染病模型,我们只关心其种群数量、染病者、易感者等是否能持续生存,染病者的

绝灭与持续意味着疾病的消亡与流行.这些都涉及到研究模型的持续性问题.关于生态模型的持续性已有许多文献,但对传染病模型的持续性主要是 H. Thieme 的一些工作[37~44].研究传染病模型的持续性,主要有两方面的工作,一方面是针对自治传染病模型,如接触率为 N 的函数的情形即 $C(N)$,另一方面是非自治传染病模型.下面我们分别考虑这两种模型的持续性.

3.6.1 疾病的发生率为 $C(N)SI/N$ 的 SIRS 模型的持续性

持续性概念及有关结论

考虑距离空间 X,d 是距离.设 X 是两个不相交子集 X_1 和 X_2 的并,Φ 是定义在 X_1 上的连续半流,即连续映射 $\Phi:[0,\infty)\times X_1\to X_1$ 具有下面性质:

$$\Phi_t\cdot\Phi_s=\Phi_{t+s},\ t,s\geqslant 0;\quad \Phi_0(x)=x,\ x\in X_1,$$

这里 $\Phi_t:X_1\to X_1$,$\Phi_t(x)=\Phi(t,x)$.点 $x\in X$ 到 X 子空间 Y 的距离定义为

$$d(x,y)=\inf_{y\in Y}d(x,y).$$

定义 3.6.1 设 Y_2 是 X_2 的子集.

Y_2 **称为对** X_1 **弱排斥**,若

$$\limsup_{t\to\infty}d(\Phi_t(x_1),Y_2)>0,\ \forall x_1\in X_1.$$

Y_2 **称为对** X_1 **强排斥**,若

$$\liminf_{t\to\infty}d(\Phi_t(x_1),Y_2)>0,\ \forall x_1\in X_1.$$

Y_2 **称为对** X_1 **一致弱排斥**,若存在 $\varepsilon>0$,使得

$$\limsup_{t\to\infty}d(\Phi_t(x_1),Y_2)>\varepsilon,\ \forall x_1\in X_1.$$

Y_2 **称为对** X_1 **一致强排斥**,若存在 $\varepsilon>0$,使得

$$\liminf_{t\to\infty}d(\Phi_t(x_1),Y_2)>\varepsilon,\ \forall x_1\in X_1.$$

特别地,X_1 是 X 中的开集,X_2 是 X 的边界,则动力系统 Φ 称为**(一致)弱或(一致)强持续**,若 X_2 对 X_1 是(一致)弱或(一致)强排斥的.

下面给出有关弱持续和强持续的结论.

引理 3.6.1[38] 设 X 是局部紧的距离空间.$X=X_1\cup X_2$,其中 X_2 是紧集,Φ 是定义在 X_1 上的连续半流,则当 X_2 对 X_1 一致弱排斥时,X_2 对 X_1 一定是一致强排斥的.

引理 3.6.2[38] 设 D 是 R 内的一个有界区间.$g:(t_0,\infty)\times D\to R$ 是有界的,且一致连续.$x:(t_0,\infty)\to D$ 是方程

$$x'=g(t,x)$$

定义在区间 (t_0,∞) 上的一个解,则有

1) $\liminf\limits_{t\to\infty}g(t,x_\infty)\leqslant 0\leqslant\limsup\limits_{t\to\infty}g(t,x_\infty)$,

2) $\liminf\limits_{t\to\infty} g(t,x^{\infty}) \leqslant 0 \leqslant \limsup\limits_{t\to\infty} g(t,x^{\infty})$,

其中 $x^{\infty}=\limsup\limits_{t\to+\infty} x(t)$, $x_{\infty}=\liminf\limits_{t\to\infty} x(t)$.

定义 3.6.2 集合 $M\subset X_2$ 称为与另一个集合 $N\subset X_2$ 键连接,记为 $M \mapsto N$,若存在 $y\in X_2$, $y\notin M\cup N$,使得在 X_2 中过 y 点的全部轨线的 α 极限集包含在 M 中,ω 极限集包含在 N 中.

定义 3.6.3 有限覆盖 $M=\bigcup\limits_{k=1}^{m} M_k$ 称为**循环覆盖**,若有 $M_1 \mapsto M_2 \mapsto \cdots \mapsto M_k \mapsto M_1$,对一些 $k\in\{1,\cdots,m\}$,否则称 M 是**非循环覆盖**.

引理 3.6.3[40] 设 X 是距离空间,$X_1\subset X$ 是连续半流 Φ 的闭正向不变子集,且存在 $\alpha>0$,使半流 Φ 在 $\{X:x\in X, d(x,\partial X_1)\leqslant\alpha\}\cap\overset{o}{X}_1$ 上是点耗散的;进一步假设 N 是半流 Φ 在 ∂X_1 上的最大闭不变子集,$\{N_\alpha\}_{\alpha\in A}$($A$ 是一个非空指标集)是 N 的一个非循环覆盖,$N_\alpha\subset\partial X_1$ 是一些孤立的闭不变集的并,且 ∂X_1 中的任一紧子集至多包含 $\{N_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 中的有限多个集合,则半流 Φ 一致连续的充分必要条件是

$$W^{+}(N_\alpha)\cap\{X:x\in X, d(x,\partial X_1)\leqslant\varepsilon\}\cap\overset{o}{X}_1=\varnothing,$$

这里 $W^{+}(N_\alpha)=\{y\in X, \omega(y)\subset N_\alpha\}$.

疾病的发生率为 $C(N)SI/N$ 的 SIRS 传染病模型的一致持续性

当我们考虑接触率 $C(N)$ 是 N 的函数时,则具有标准疾病发生率的 SIRS 模型可用下面的动力学方程来描述

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=\beta N-\mu S-C(N)\dfrac{SI}{N}+\rho R,\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=C(N)S\dfrac{I}{N}-(\mu+\gamma+\alpha)I,\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}=\gamma I-(\mu+\rho)R.\end{cases}\tag{3.6.1}$$

总人口 $N=S+I+R$,满足方程

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=(\beta-\mu)N-\alpha I,\tag{3.6.2}$$

其中 β,μ 分别是出生率和死亡率系数,ρ 是失去免疫率系数,γ 是恢复率系数,α 是因病死亡率系数.这些系数全部都是正数.另外,我们假设 $\beta>\mu$,即考虑当疾病不存在时,种群 N 是指数增加的,$C(N)$ 是接触率.我们假设 $C(N)$ 满足条件(3.3.37)和(3.3.38).

对系统(3.6.1)进行归一化变化

$$x=\frac{S}{N}, y=\frac{I}{N}, z=\frac{R}{N}.$$

则(3.6.1)及(3.6.2)变为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\beta(1-x)-[C(N)-\alpha]xy+\rho z,\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=C(N)xy-(\gamma+\alpha+\beta)y+\alpha y^2,\\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\gamma y-(\beta+\rho)z+\alpha yz,\\ \dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=(\beta-\mu-\alpha y)N,\end{cases}\tag{3.6.3}$$

其中

$$x+y+z=1.\tag{3.6.4}$$

显然,$D=\{(x,y,z),x+y+z=1,x\geqslant0,y\geqslant0,z\geqslant0\}$是正向不变集.

下面的定理 3.6.1 是研究特殊情形下种群 N 的持续性.

定理 3.6.1[38] 设 $C(0)=0,N(0)>0$,则种群 N 是一致持续的,即存在 $\varepsilon>0$,使$\liminf\limits_{t\to\infty}N(t)\geqslant\varepsilon$.

证明 根据引理 3.6.1,我们只须证明集合 $X_2=\{N=0,x\geqslant0,y\geqslant0,z\geqslant0,x+y+z=1\}$对集合 $X_1=\{N>0,x\geqslant0,y\geqslant0,z\geqslant0,x+y+z=1\}$是一致强排斥的.

考虑 $N^\infty<\infty$.注意到 $x,y\leqslant1$,对方程(3.6.3)应用引理 3.6.2 2)可得

$$0\leqslant C(N^\infty)-(\gamma+\beta)y^\infty.$$

把 y^∞解出得

$$y^\infty\leqslant\frac{C(N^\infty)}{\gamma+\beta}.\tag{3.6.5}$$

由(3.6.3)的第四个方程可得

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{1}{N}\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}\geqslant\beta-\mu-\alpha y^\infty.$$

因此,当 $y^\infty<\dfrac{\beta-\mu}{\alpha}$时,$N$ 是指数增加的.当 $y^\infty\geqslant\dfrac{\beta-\mu}{\alpha}$时,结合(3.6.5)得

$$C(N^\infty)\geqslant\frac{(\beta-\mu)(\gamma+\beta)}{\alpha}>0.$$

因为 $C(0)=0$,且 $C(N)$在 0 处连续,则一定存在 $\varepsilon>0$,使 $N^\infty\geqslant\varepsilon>0$,否则上式不能成立,定理证毕. ▌

事实上,从定理的证明可看出,条件 $C(0)=0$,可放松为

$$C(0)<(\beta-\mu)\frac{\gamma+\beta}{\alpha}.$$

性质 3.6.1 设 $\alpha+\beta+\gamma<C(\infty)$,则当 $y(0)>0$ 时,疾病一致弱持续生存,即存在 $\varepsilon>0$,使得

$$y^{\infty} = \limsup_{t\to\infty} y(t) \geqslant \varepsilon.$$

证明(反证)　若不然,则一定有

$$y^{\infty} < \min\left\{\frac{\beta-\mu}{\alpha}, \frac{1}{1+\dfrac{\gamma+\alpha}{\beta+\rho}}\left(1-\frac{\gamma+\alpha+\beta}{C(\infty)}\right)\right\}.$$

由方程(3.6.3)第四个方程得

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{N}\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} > 0,$$

即有

$$\lim_{t\to\infty} C(N(t)) = C(\infty).$$

对(3.6.3)中 z 的方程应用引理 3.6.2 2)得

$$0 \leqslant \gamma\eta^{\infty} - (\beta+\rho)z^{\infty} + \alpha y^{\infty}.$$

解上述方程得

$$z^{\infty} \leqslant \frac{\gamma+\alpha}{\beta+\rho}y^{\infty}.$$

把(3.6.4)代入(3.6.3)得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = C(N)(1-y-z)y - (\gamma+\alpha+\beta)y + \alpha y^2.$$

因此

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \geqslant C(\infty)\left[1-y^{\infty}\left(1+\frac{\gamma+\alpha}{\beta+\rho}\right)\right] - (\gamma+\alpha+\beta).$$

从上式可看出,当

$$y^{\infty} < \frac{1}{1+\dfrac{\gamma+\alpha}{\beta+\rho}}\left(1-\frac{\gamma+\alpha+\beta}{C(\infty)}\right)$$

时,有 $\liminf\limits_{t\to\infty} \dfrac{1}{y}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} > 0$. 这意味着 $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = \infty$,这是一个矛盾,故结论成立. ▌

下面我们应用引理 3.6.1 来研究方程(3.6.3)关于 y 和 z 的持续性. 注意到引理 3.6.1 需要紧性条件,故我们现在只考虑 $C(\infty) < \infty$ 的情形.

定理 3.6.2[38]　设 $\alpha+\beta+\gamma < C(\infty) < \infty$,则当 $y(0) > 0$ 时,存在 $\varepsilon > 0$,使下式成立

$$\liminf_{t\to\infty} y(t) \geqslant \varepsilon > 0, \liminf_{t\to\infty} z(t) \geqslant \varepsilon > 0.$$

证明　取 $X = \{(N,x,y,z) | 0 \leqslant N \leqslant \infty, x,y,z \geqslant 0, x+y+z=1\}$. 为构造 X 是距离空间,我们定义

$$\varphi(N) = \begin{cases} \dfrac{N}{1+N}, & 0 \leqslant N < \infty, \\ 1, & N = \infty, \end{cases}$$

及距离

$$d((N_1,x_1,y_1,z_1),(N_2,x_2,y_2,z_2))$$
$$=|\varphi(N_1)-\varphi(N_2)|+|x_1-x_2|+|y_1-y_2|+|z_1-z_2|.$$

若 $N_0<\infty$,则半流 $\Phi_t(N_0,x_0,y_0,z_0)$是方程(3.6.3)在 t 时刻满足初始条件$N(0)=N_0$, $x(0)=x_0$, $y(0)=y_0$, $z(0)=z_0$ 的解. 若 $N_0=\infty$, 则 $\Phi_t(\infty,x_0,y_0,z_0)=(\infty,x(t),y(t),z(t))$也是方程(3.6.3)的解. 此时, $C(N)$被 $C(\infty)$取代. 容易验证 Φ 是一个连续半流,且距离空间是一个紧空间.

首先,由性质 3.6.1 知,$X_2=\{(N,x,0,z)\mid 0\leqslant N\leqslant\infty,x,z\geqslant 0,x+z=1\}$ 对 $X_1=\{(N,x,y,z)\mid 0\leqslant N\leqslant\infty,x,z\geqslant 0,y>0,x+y+z=1\}$是一致强排斥. 注意到 $d((N,x,y,z),X_2)=y$,故有$\liminf\limits_{t\to\infty}y(t)\geqslant\varepsilon>0$. 为了证明 z 的一致持续性,对(3.6.3)的第三个方程应用引理 3.6.2 1)得

$$0\geqslant\gamma y_\infty-(\beta+\rho)z_\infty,$$

即

$$z_\infty\geqslant\frac{\gamma}{\beta+\rho}y_\infty\geqslant\frac{\gamma\varepsilon}{\beta+\rho}.$$

定理证毕. ▌

定理 3.6.3[37] 设 $\alpha+\beta+\gamma\geqslant C(\infty)$,则有

$$\lim_{t\to\infty}y(t)=\lim_{t\to\infty}z(t)=0.$$

证明 由方程(3.6.3)的第二个方程,并注意到 $x+y+z=1,x,y,z\geqslant 0$ 得

$$\begin{aligned}&C(N)x-(\gamma+\alpha+\beta)+\alpha y\\&=(C(N)-\alpha)x-(\gamma+\beta)-\alpha z\\&\leqslant[C(N)-\alpha]_+-(\gamma+\beta)-\alpha z\\&\leqslant[C(\infty)-\alpha]_+-(\gamma+\beta)-\alpha z,\end{aligned}\tag{3.6.6}$$

这里

$$r_+=\begin{cases}0, & r\leqslant 0;\\ r, & r>0.\end{cases}$$

因此, 当 $\alpha+\beta+\gamma\geqslant C(\infty)$时, 有$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\leqslant 0$. 从而 $y(t)$单调递减, 即$\lim\limits_{t\to\infty}y(t)=y(\infty)$存在. 对方程(3.6.3)的第三个方程应用引理 3.6.2 1)得

$$z_\infty\geqslant\frac{\gamma}{\beta+\rho}y_\infty.$$

若 $y(\infty)>0$ 时,则有 $z_\infty>0$. 故由(3.6.6)得$\liminf\limits_{t\to\infty}\frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}<0$. 因此 y 是指数递减,这与 $y(\infty)>0$ 矛盾. 因此,$y(\infty)=0$. 再对方程(3.6.3)的第三个方程应用引理 3.6.2 2)得

$$z^{\infty} \leqslant \frac{\gamma+\alpha}{\beta+\rho} y^{\infty},$$

而$\lim\limits_{t\to\infty} y(t)=0$,故必有 $z^{\infty}=0$,即$\lim\limits_{t\to\infty} z(t)=0$.定理证毕. ▍

由定理 3.6.3 及方程(3.6.3)的第一和第四个方程可知

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{N} \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = \beta - \mu, \lim_{t\to\infty} x(t) = 1,$$

即

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln N(t) = \beta - \mu, \lim_{t\to\infty} x(t) = 1.$$

再由(3.6.3)的第二个方程可得

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{y} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = C(\infty) - (\gamma + \alpha + \beta),$$

即

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln y(t) = C(\infty) - (\gamma + \alpha + \beta).$$

由定理 3.6.2 和定理 3.6.3 可知,当 $C(\infty)$存在时,$R_0=\dfrac{C(\infty)}{\alpha+\beta+\gamma}$成为疾病 y 持续生存和绝灭的一个阈值参数.

疾病的发生率是强非线性的传染病模型的持续性

该段我们利用引理 3.6.3 给出强非线性传染病动力系统一致持续性存在等价于无病平衡点的不稳定性这一结果.这种方法,我们在 3.3.3 段中研究方程(3.3.30)的持续性已经用过,下面再举一个例子.

考虑含潜伏者类的 SEIRS 模型

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = -\lambda I^p S^q + \mu - \mu S + \delta R, \\ \dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \lambda I^p S^q - (\varepsilon + \mu) E, \\ \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \varepsilon E - (r + \mu) I, \\ \dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = rI - (\delta + \mu) R. \end{cases} \tag{3.6.7}$$

假设

$$S + E + I + R = 1, \tag{3.6.8}$$

且全部参数为正.则利用(3.6.8),可把方程(3.6.7)化为下面的三维系统

$$\begin{cases}\dfrac{dE}{dt} = \lambda I^p(1 - E - I - R)^q - (\varepsilon + \mu)E, \\ \dfrac{dI}{dt} = \varepsilon E - (r + \mu)I, \\ \dfrac{dR}{dt} = rI - (\delta + \mu)R.\end{cases} \tag{3.6.9}$$

取

$$X_1 = \{(E,I,R) \mid E \geqslant 0, I \geqslant 0, R \geqslant 0, E + R + I \leqslant 1\},$$

则 X_1 是(3.6.9)的正向不变子集. 在 X_1 的边界∂X_1 上总存在惟一的平衡点 $P_0(0,0,0)$,该点是无病平衡点. 当$P_0(0,0,0)$不稳定时,$P_0(0,0,0)$成为∂X_1 上惟一最大不变集$\{N_\alpha\}_{\alpha\in A} = \{P_0\}$,故 $W^+(N_\alpha) = \varnothing$,从而引理 3.6.3 的全部条件满足,由引理 3.6.3 知,系统(3.6.9)是一致持续的. 反之,当(3.6.9)是一致持续时,显然,平衡点 $P_0(0,0,0)$是不稳定的,即有下面的定理.

定理 3.6.4[40] 模型(3.6.7)一致持续的充分必要条件是无病平衡点 $P_0(0,0,0)$是不稳定的.

结合文献[46]给出的局部稳定性分析,我们可得下面的推论.

推论 3.6.1 模型(3.6.7)一致持续的充分必要条件是 $0<p<1$ 或 $p=1$, $\delta>1$.

3.6.2 非自治传染病模型的一致持续性

关于非自治传染病模型的研究,目前所见工作不是很多,主要是 H. R. Thieme 及 Junling. Ma 和 Zhien Ma 的一些工作[39,42]. 前者主要研究传染病模型的持续,后者则研究稳定性和弱持续性,且其主要工作已在§2.4 作了介绍. 下面主要介绍前者的工作.

时变的 SIRS 传染病模型的一致持续性

考虑时变的 SIRS 传染病模型

$$\begin{cases}\dfrac{dS}{dt} = B(t) - \mu(t)S - \alpha(t)SI + \xi(t)R, \\ \dfrac{dI}{dt} = \alpha(t)SI - \mu(t)I - \gamma(t)I, \\ \dfrac{dR}{dt} = \gamma(t)I - \mu(t)R - \xi(t)R.\end{cases} \tag{3.6.10}$$

总人口 $N(t) = S + I + R$ 满足方程

$$\frac{dN}{dt} = B(t) - \mu(t)N(t), \tag{3.6.11}$$

这里 $B(t)$是人口的出生率,$\mu(t)$是人口的死亡率系数,$\alpha(t)$是疾病的发生率系

数,$\gamma(t)$是移出率系数,$\xi(t)$是失去免疫率系数. 由方程(3.6.11)知,当$B(t)$,$\mu(t)$已知时,$N(t)$是可求出的. 故我们可把方程(3.6.10)化为下面的等价方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \alpha(t)SI - \mu(t)I - \gamma(t)I,\\ \dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = \gamma(t)I - \mu(t)R - \xi(t)R,\end{cases} \tag{3.6.12}$$

其中

$$S(t) = N(t) - I(t) - R(t).$$

在(3.6.11)中,假设 N,μ,α,γ 和 ξ 是在$[0,\infty)$上任意非负有界连续函数,且 $\inf\mu(t)>0$. 由方程(3.6.10)及(3.6.11)可知,当 $S(0)\geqslant 0$ 时,有 $0\leqslant S(t)$, $I(t),R(t)\leqslant N(t),t\geqslant 0$. 记

$$R^* = \frac{(\alpha N)^*}{\mu_* + \gamma_*}, \qquad (\alpha N)^* = \limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \alpha(s)N(s)\mathrm{d}s.$$

$$\gamma_* = \liminf_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \gamma(s)\mathrm{d}s, \quad \mu_* = \liminf_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mu(s)\mathrm{d}s.$$

定理 3.6.5[39]　设 $R^*<1$,则当 $t\to\infty$时疾病绝灭,即对方程组(3.6.12)中每一个解都有

$$\lim_{t\to\infty} I(t) = 0, \lim_{t\to\infty} R(t) = 0.$$

证明　因为 $S\leqslant N$,且 $R^*<1$,则对$\forall\varepsilon>0$,存在 $r>0$,使下式成立

$$\frac{1}{t}\int_0^t \alpha(s)S(s)\mathrm{d}s - \frac{1}{t}\int_0^t [\gamma(s) + \mu(s)]\mathrm{d}s \leqslant -\varepsilon, \forall t \geqslant r.$$

对方程组(3.6.12)的第一个方程积分得

$$\frac{1}{t}\ln\frac{I(t)}{I(0)} = \frac{1}{t}\int_0^t \alpha(s)S(s)\mathrm{d}s - \frac{1}{t}\int_0^t \gamma(s)\mathrm{d}s - \frac{1}{t}\int_0^t \mu(s)\mathrm{d}s, \forall t \geqslant r > 0. \tag{3.6.13}$$

故有

$$\frac{1}{t}\ln\frac{I(t)}{I(0)} \leqslant -\varepsilon, \qquad \forall t \geqslant r,$$

即

$$I(t) \leqslant I(0)\mathrm{e}^{-\varepsilon t}, \qquad t \geqslant r.$$

从而当 $t\to\infty$ 时,有 $\lim\limits_{t\to\infty} I(t) = 0$. 由方程(3.6.12)的第二个方程也可得 $\lim\limits_{t\to\infty} R(t) = 0$. ∎

为了获得方程(3.6.12)的弱持续性,令

$$R_* = \frac{(\alpha N)_*}{\mu^* + \gamma^*}, \qquad (\alpha N)_* = \liminf_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \alpha(s)N(s)\mathrm{d}s,$$

$$\gamma^* = \limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \gamma(s)\mathrm{d}s, \qquad \mu^* = \limsup_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \mu(s)\mathrm{d}s.$$

定理 3.6.6[39] 设 $R_* > 1$，则当 $t\to\infty$ 时，疾病是一致弱持续生存，即存在 $\varepsilon > 0$，使得方程组(3.6.12)的满足初始条件 $I(0) > 0$ 的全部解 $I(t)$，都有

$$I^\infty = \limsup_{t\to\infty} I(t) > \varepsilon.$$

证明(反证) 若对任意 $\varepsilon > 0$，存在解满足 $\limsup\limits_{t\to\infty} I(t) < \varepsilon$，对(3.6.12)的第二个方程应用引理 3.6.2 可得

$$R^\infty \leqslant \sup\left(\frac{\gamma}{\mu}\right) I^\infty.$$

由上式也可得

$$I^\infty + R^\infty \leqslant \left[1 + \sup\left(\frac{\gamma}{\mu}\right)\right] I^\infty \triangleq cI^\infty.$$

由方程 $N = S + I + R$ 及方程组(3.6.12)的第一个方程可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln I(t) \geqslant \alpha(t)[N(t) - c\varepsilon] - \gamma(t) - \mu(t).$$

因此，对 $t \gg 1$，我们有

$$\frac{1}{t}\ln\frac{I(t)}{I(0)}$$

$$\geqslant \left[\frac{1}{t}\int_0^t \alpha(s)N(s)\mathrm{d}s - \frac{c\varepsilon}{t}\int_0^t \alpha(s)\mathrm{d}s - \frac{1}{t}\int_0^t r(s)\mathrm{d}s - \frac{1}{t}\int_0^t \mu(s)\mathrm{d}s\right],$$

即

$$\frac{1}{t}\ln\frac{I(t)}{I(0)} \geqslant (\alpha N)_* - c\varepsilon\alpha^* - \gamma^* - \mu^* - \varepsilon.$$

因为 $R_* > 1$，$(\alpha N)_* - \gamma^* - \mu^* > 0$，故对充分大的 t，一定存在 $\delta(\varepsilon) > 0$ 使得下式成立

$$\frac{1}{t}\ln\frac{I(t)}{I(0)} \geqslant \delta(\varepsilon),$$

即

$$I(t) \geqslant I(0)\mathrm{e}^{\delta(\varepsilon)t}.$$

因此有 $\lim\limits_{t\to\infty} I(t) = \infty$，这与 $I(t)$ 有界矛盾. ▌

文献[39]进一步证明下面的定理.

定理 3.6.7[39] 设 $N(t)$ 在 $[0,\infty)$ 上一致连续，再设

$$R_* = \frac{(\alpha N)_*}{\mu^* + \gamma^*}, \quad (\alpha N)_* = \liminf_{t,s\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \alpha(\gamma + s)N(r + s)\mathrm{d}r,$$

$$r^* = \limsup_{t,s\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \gamma(r + s)\mathrm{d}r, \quad \mu^* = \limsup_{t,s\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \gamma(r + s)\mathrm{d}r.$$

则当 $R_* > 1$ 时,疾病一致强持续生存,即存在 $\varepsilon > 0$,使得 $\liminf\limits_{t\to\infty} I(t) > \varepsilon$.

定理 3.6.7 证明比较复杂,详见文献[39].

§3.7 传染病模型的分支

前面几节介绍的传染病模型性态都比较简单,疾病的发生率大多是双线性的或标准的.地方病平衡点最多只有一个,但对一些复杂的流行病模型,如疾病的发生率为非线性形式 $\beta S^q I^p$ 模型,具有隔离项的 SIQR 模型,具有预防接种者类 V 的 SIS 模型等常会出现分支现象,分支是流行病模型中又一种现象.

什么是分支呢? 若一个系统是结构不稳系统,就称为分支系统.就平面系统而言,分支现象可以出现在一个奇点邻近.若该奇点相应的一次近似系统的特征根是一对纯虚根,这时对相应的奇点为中心或细焦点,系统经扰动后在此奇点的外围邻近可能会出现极限环,这就是 Hopf 分支;若该奇点相应的一次近似系统具有零特征根,此时相应的奇点为高阶奇点.系统经扰动后,奇点可能分裂为几个,且伴随着极限环的出现,这种现象中研究较深入的一个称为 Bogdanov-Takens 分支.分支系统也可以具有鞍点之间的连接轨线.通常有同宿轨线和异宿轨线,相应的系统就出现同宿和异宿分支.还有一种分支通常称为 Poincaré 分支,即系统具有一系列闭轨,经扰动后,这些闭轨大部分破裂,而在某一些闭轨邻近出现孤立的闭环及多重极限环分支.

对流行病模型而言,最常见的是 Hopf 分支.这一节,我们主要介绍李建全[2]所做的传染病模型的后向分支和王稳地[54]所做的传染病模型中一种新的分支现象,即 Bogdanov-Takens 分支.

3.7.1 一类具有预防接种的 SISV 传染病模型后向分支

在 3.2.2 中已经考虑了一类具有预防接种的 SISV 传染病模型.在该模型中,假设所有接种疫苗完全有效.但在实际中,疫苗的有效率往往达不到百分之百,因此在带有接种的传染病模型中考虑疫苗的有效性很有必要.在本段,我们将考虑模型

$$\begin{cases} S' = r(1-q)N - \beta \dfrac{SI}{N} - [p + f(N)]S + \gamma I + \varepsilon V, \\ I' = \beta(S + \sigma V)\dfrac{I}{N} - [\gamma + \alpha + f(N)]I, \\ V' = rqN + pS - \sigma\beta \dfrac{IV}{N} - [\varepsilon + f(N)]V, \end{cases} \tag{3.7.1}$$

其中参数 $\sigma(0\leqslant\sigma\leqslant 1)$表示疫苗的有效性,$\sigma$ 越大意味着疫苗的效果越差.$\sigma = 0$

意味着在预防传染方面疫苗完全有效,而 $\sigma=1$ 意味着接种完全无效.其余参数的含义与系统(3.2.33)中的相同.

为了讨论的方便,我们对后向分支作简单介绍.

对于通常所见的传染病模型只具有一个阈值 $R_0=1$,当 $R_0\leqslant 1$ 时模型仅有全局渐近稳定的无病平衡点,当 $R_0>1$ 时除不稳定的无病平衡点外,还有全局渐近稳定的正平衡点.近十多年,随着对传染病模型研究的不断深入,已出现了一些具有后向分支的传染病模型[60~65,67~69].当传染病模型存在后向分支时,通常存在阈值 $R_0=1$ 和 $R_c(R_c<1)$.当 $R_0\geqslant 1$ 时模型除有无病平衡点外,还有惟一的全局渐近稳定的地方病平衡点;当 $R_c<R_0<1$ 时模型存在两个地方病平衡点,一个是稳定的结点,一个是鞍点.这时疾病的发展趋势依赖于模型的初始值,在一定初始条件下疾病会发展成为地方病,而在另外初始条件下,疾病则会最终消亡;当 $R_0=R_c$ 时模型存在的惟一地方病平衡点是鞍结点.疾病的发展趋势与情形 $R_c<R_0<1$ 相类似;当 $R_0<R_c$ 时模型仅有的无病平衡点是全局渐近稳定的.模型(3.7.1)在一定条件下就存在后向分支.

由于 $N=S+I+V$,所以有

$$N'=N[r-f(N)]-\alpha I. \tag{3.7.2}$$

记 $x=\dfrac{S}{N},y=\dfrac{I}{N}$ 和 $z=\dfrac{V}{N}$,则 x,y,z 分别表示易感类(S),染病类(I)和被接种类(V)在总种群中所占的比例.

通过直接计算可得

$$\begin{cases} x'=r(1-q)-(\beta-\alpha)xy-(p+r)x+\gamma y+\varepsilon z,\\ y'=y[\beta x+\alpha y+\beta\sigma z-(\gamma+\alpha+r)],\\ z'=rq+px-(\varepsilon+r)z+(\alpha-\sigma\beta)yz,\\ x+y+z=1 \end{cases} \tag{3.7.3}$$

和

$$N'=N[r-f(N)-\alpha y]. \tag{3.7.4}$$

由于 $\sigma=1$ 意味着接种完全无效,即所有被接种者都仍是易感者,于是当 $\sigma=1$ 时,记 $\bar{S}=S+V$,则(3.7.1)变为

$$\begin{cases} \bar{S}'=r(1-q)N-\beta\dfrac{\bar{S}I}{N}-f(N)\bar{S}+\gamma I,\\ I'=\beta\dfrac{\bar{S}I}{N}-[\gamma+\alpha+f(N)]I,\\ N=\bar{S}+I. \end{cases} \tag{3.7.5}$$

模型(3.7.5)在文献[12]中已做完整讨论.

当 $\sigma=0$ 时,即接种完全有效.此种情形在 3.2.2 段中已做讨论.

将 $x=1-y-z$ 代入到(3.7.3)中的第二个方程，则由(3.7.3)中的第二个和第三个方程得

$$\begin{cases} y' = y[\beta - (\gamma + \alpha + r) - (\beta - \alpha)y - \beta(1-\sigma)z], \\ z' = rq + p - py - (p + r + \varepsilon)z + (\alpha - \sigma\beta)yz. \end{cases} \tag{3.7.6}$$

因此有定理：

定理 3.7.1[2]

1) 如果 $y(0)=0$，则对 $t\geqslant 0$ 有 $y(t)\equiv 0$，且 $\lim\limits_{t\to\infty} z(t)=\dfrac{rq+p}{p+r+\varepsilon}\triangleq z_0$.

2) 如果 $y(0)>0$，则对 $t\geqslant 0$ 有 $y(t)>0$，且区域 $D=\{(y,z)\mid y\geqslant 0, z>0, y+z<1\}$ 是系统(3.7.6)的正向不变集.

定理 3.7.1 的证明比较简单，故略去.

定理 3.7.2[2]　记 $R_0=\dfrac{\beta[\varepsilon+\sigma p+r(1-(1-\sigma)q)]}{(\alpha+r+\gamma)(p+\varepsilon+r)}$. 系统(3.7.6)始终存在无病平衡点 $P_0(0,z_0)$，同时，下面结论成立.

1) 若 $R_0>1$，则(3.7.6)存在惟一地方病平衡点 $P^*(y^*,z^*)$；

2) 若 $R_0<1, \beta>r+\alpha+\gamma, \alpha<\sigma\beta, B>2\sqrt{AC}$，则(3.7.6)存在两个地方病平衡点 $P_1^*(y_1^*,z_1^*), P_2^*(y_2^*,z_2^*)(y_1^*<y_2^*, z_1^*>z_2^*)$；

3) 若 $R_0<1, \beta>r+\alpha+\gamma, \alpha<\sigma\beta, B=2\sqrt{AC}$，则(3.7.6)存在惟一地方病平衡点 $P_3^*(y^*,z^*)$；

4) 若 $R_0=1, \alpha<\sigma\beta, B>0$，则(3.7.6)存在惟一地方病平衡点 $P_4^*(y^*,z^*)$；

5) 对于其它参数情形，(3.7.6)不存在地方病平衡点，

其中

$$A=(\alpha-\sigma\beta)(\beta-\alpha), C=(p+r+\varepsilon)(r+\alpha+\gamma)(R_0-1),$$

$$B=\alpha(p+\varepsilon+\gamma+\alpha+2r)-\beta[(\alpha+r+\varepsilon)-\sigma(\beta-r-\alpha-\gamma-p)],$$

而且 $y^*, z^*, y_1^*, y_2^*, z_1^*$ 和 z_2^* 满足方程组

$$\begin{cases} (\beta-\alpha)y+\beta(1-\sigma)z=\beta-(\gamma+\alpha+r), \\ py+(p+r+\varepsilon)z-(\alpha-\sigma\beta)yz=rq+p. \end{cases}$$

证明　容易看出 P_0 总是(3.7.6)的平衡点. (3.7.6)的正平衡点(地方病平衡点)即方程组

$$\begin{cases} (\beta-\alpha)y+\beta(1-\sigma)z=\beta-(\gamma+\alpha+r), \\ py+(p+r+\varepsilon)z-(\alpha-\sigma\beta)yz=rq+p \end{cases} \tag{3.7.7}$$

在区域 D 的解. 换言之，(3.7.6)的正平衡点是直线 l_1：

$$z=h_1(y)\triangleq\frac{\beta-(\gamma+r+\alpha)-(\beta-\alpha)y}{\beta(1-\sigma)} \tag{3.7.8}$$

和曲线 l_2：

$$z = h_2(y) \triangleq \frac{rq + p - py}{(p + r + \varepsilon) - (\alpha - \sigma\beta)y}$$

在 D 内的交点.

设 $\beta = \alpha$，则从(3.7.8)有 $z = -\dfrac{r+\gamma}{\beta(1-\sigma)} < 0$，即当 $\alpha = \beta$ 时，(3.7.6)无正平衡点.因此，下面仅考虑情形 $\alpha \neq \beta$.

当 $\alpha \neq \beta$ 时，直线 l_1 与 y 轴(横轴)的交点横坐标为 $y_1 = \dfrac{\beta - (\gamma + r + \alpha)}{\beta - \alpha}$，$l_1$ 与 z 轴(纵轴)的交点纵坐标为 $z_1 = \dfrac{\beta - (\gamma + r + \alpha)}{\beta(1-\sigma)}$.

l_2 与 y 轴的交点为 $Q_1(y_2, 0)$(其中 $y_2 = \dfrac{rq + p}{p} > 1$)，$l_2$ 与 z 轴的交点为 $Q_2(0, z_2)$(其中 $z_2 = \dfrac{rq + p}{p + r + \varepsilon} < 1$).当 $\alpha \neq \sigma\beta$ 时，曲线 l_2 有垂直渐近线 $y = \dfrac{p + r + \varepsilon}{\alpha - \sigma\beta}$ 和水平渐近线 $z = \dfrac{p}{\alpha - \sigma\beta}$，并且

$$h'_2(y) = \frac{(\alpha - \sigma\beta)(rq + p) - p(p + r + \varepsilon)}{[(p + r + \varepsilon) - (\alpha - \sigma\beta)y]^2},$$

$$h''_2(y) = \frac{2(\alpha - \sigma\beta)[(\alpha - \sigma\beta)(rq + p) - p(p + r + \varepsilon)]}{[(p + r + \varepsilon) - (\alpha - \sigma\beta)y]^3}.$$

下面分三种情形来证明(3.7.6)在 D 内平衡点的存在性.

情形 1 $R_0 > 1$.

明显地，$R_0 > 1$ 等价于 $z_1 > z_2$，即 $C > 0$. $R_0 > 1$ 意味着 $\beta > \gamma + r + \alpha$，因此有 $0 < y_1 < 1$ 和 $z_1 > 0$.由于 $0 < y_1 < 1 < y_2$，因此 Q_1 位于 l_1 上方，而 Q_2 位于 l_1 的下方.

(i) 若 $\alpha \leqslant \sigma\beta$，则 $h_2(y)$ 是连续的，且对于 $y > 0$，有 $h'_2(y) < 0$，$h''_2(y) \geqslant 0$.这意味着 l_2 是一条向上凹的单调递减的曲线.由于 Q_1 和 Q_2 位于 l_1 的两侧，因此，这时(3.7.7)在 D 内有惟一的正解 $P^*(y^*, z^*)$.

(ii) 若 $\alpha > \sigma\beta$，则 $z_1 < 1$，并且直线 l_1 在第一象限的部分位于 D 的内部.

(a) 若 $\dfrac{p + r + \varepsilon}{\alpha - \sigma\beta} < \dfrac{rq + p}{p}$，则 $h'_2(y) > 0$.这意味着曲线 l_2 是单调递增的，并且其垂直渐近线位于直线 $y = y_2$ 的左侧.由于 Q_2 位于 l_1 的下方，且 $y_1 < 1 < y_2$，所以易知 l_1 和 l_2 在 D 内有惟一交点 $P^*(y^*, z^*)$.

(b) 若 $\dfrac{p + r + \varepsilon}{\alpha - \sigma\beta} = \dfrac{rq + p}{p}$，则 $h'_2(y) \equiv 0$，即 l_2 是直线 $z = z_2$ 被 $z \neq \dfrac{p + r + \varepsilon}{\alpha - \sigma\beta}$ 分开的两端.由于 Q_2 位于 l_1 的下方，因此这时 l_1 和 l_2 在 D 内有惟

一交点$P^*(y^*,z^*)$.

(c) 若$\frac{p+r+\varepsilon}{\alpha-\sigma\beta}>\frac{rq+p}{p}$,则对 $y<y_2$ 有 $h_2'(y)<0,h_2''(y)<0$.这意味着 l_2 是一条向下凹的单调递减的曲线,其垂直渐近线位于直线 $y=y_2$ 的右侧.由于 Q_1 和 Q_2 位于 l_1 的两侧,因此这时 l_1 和 l_2 在 D 内有惟一交点$P^*(y^*,z^*)$.

情形 2　$R_0<1$.

显然,$R_0<1$ 等价于 $z_1<z_2$,即 $C<0$.这意味着 Q_2 位于 l_1 上方.从(3.7.7)中消去 z 可得

$$h(y)\triangleq Ay^2+By+C=0, \tag{3.7.9}$$

其中 A,B 和C 在定理 3.7.2 中定义.

(i) 若 $\alpha<\sigma\beta$,则 $\alpha<\beta$ 和$A<0$.

(a) 若 $\alpha<\sigma\beta$ 且$\alpha<\beta\leqslant r+\gamma+\alpha$,则直线 l_1 不经过第一象限,因此,这时(3.7.7)在 D 内无解.

(b) 若 $\alpha<\sigma\beta,\beta>r+\gamma+\alpha$ 且$B\leqslant 0$,则由于 $A<0$ 和 $C<0$,因而(3.7.9)无正实根,即(3.7.7)在 D 内无解.

(c) 若 $\alpha<\sigma\beta,\beta>r+\gamma+\alpha$ 且 $0<B<2\sqrt{AC}$,则(3.7.9)无实数根,即(3.7.7)在 D 内无解.

(d) 若 $\alpha<\sigma\beta,\beta>r+\gamma+\alpha$ 且$B>2\sqrt{AC}$,则由于 $A<0$ 和

$$\begin{aligned}h(y_1)&=C+\frac{\beta-(\gamma+\alpha+r)}{\beta-\alpha}[p(\alpha-\sigma\beta)+(\alpha-\beta)(r+\varepsilon)]\\&<C=h(0)<0,\end{aligned} \tag{3.7.10}$$

因而(3.7.9)在区间$(0,y_1)$上有两个不同的正根 $y_1^*,y_2^*(y_1^*<y_2^*)$.将 $y_i^*(i=1,2)$分别代入(3.7.8)可得 $z_i^*(i=1,2)(z_1^*>z_2^*)$.鉴于对此情形有 $y_1<1$ 和 $z_1<1$,所以在区域 D 内(3.7.7)有两个正解 $P_1^*(y_1^*,z_1^*)$和$P_2^*(y_2^*,z_2^*)$.

(e) 若 $\alpha<\sigma\beta,\beta>r+\gamma+\alpha$ 且$B=2\sqrt{AC}$,则(3.7.9)有一个重根 $y^*<y_1$.因此(3.7.7)有惟一解(y^*,z^*),记为 P_3^*.

(ii) 若 $\alpha=\sigma\beta$,则 $A=0,h(0)<0$ 且 $h(1)=-(p+r+\varepsilon)(r+\gamma)-rq\beta(1-\sigma)<0$,因此方程 $h(y)=0$ 在区间$(0,1)$上无解.因此(3.7.7)在 D 内无解.

(iii) 设 $\alpha>\sigma\beta$,则下面分三种情形讨论(3.7.7)在 D 内解的存在性.

(a) 若$\frac{p+r+\varepsilon}{\alpha-\sigma\beta}<\frac{rq+p}{p}$,则 $h_2'(y)>0$.这意味着 l_2 是单调递减的,其垂直渐近线位于直线 $y=y_2$ 的左侧.若 $\beta>\alpha$,则直线 l_1 是递减的.注意到 $z_2>z_1$ 和 $h_2(y_2)=0$,因此,l_1 和 l_2 在 D 内没有交点.若 $\beta<\alpha$,则直线 l_1 是递增的,并且 $y_1>1$,因此在 D 内不可能与曲线l_2 相交.所以这时(3.7.7)在 D 内无解.

(b) 若$\dfrac{p+r+\varepsilon}{\alpha-\sigma\beta}=\dfrac{rq+p}{p}$,则 $h_2'(y)\equiv 0$,即 l_2 是直线 $z=z_2>z_1$ 被 $z\neq\dfrac{p+r+\varepsilon}{\alpha-\sigma\beta}$分成的两部分. 若 $\alpha>\beta$,则 $h_1(y)$是单调递增的且 $h_1(1)<0$;如果 $\sigma\beta<\alpha<\beta$,则 $h_1(y)$是单调递减的,且 $h_1(0)=z_1<z_2$. 因此在 D 内 l_1 和 l_2 无交点.

(c) 若$\dfrac{p+r+\varepsilon}{\alpha-\sigma\beta}>\dfrac{rq+p}{p}$,则对于 $0<y<y_2$ 有 $h_2'(y)<0$ 和 $h_2''(y)<0$. 这意味着 l_2 的垂直渐近线位于直线 $y=y_2$ 的右侧,l_2 的水平渐近线位于直线 $z=z_2$ 的上侧. 并且对于 $0<y<y_2$,l_2 是单调递减向下凹的. 若 $\beta>\alpha$,则 $y_1<1$,且直线 l_1 是单调递减的; 若 $\beta<\alpha$,则 $y_1>1$,且直线 l_1 是单调递增的. 因此易知在区域 D 内 l_1 和 l_2 没有交点,即(3.7.7)在 D 内无解.

情形 3 $R_0=1$.

显然,$R_0=1$ 等价于 $C=0$. 这意味着 $\beta>r+\gamma+\alpha$ 和 $h(0)=0$.

(i) 设 $\alpha<\sigma\beta$,则 $A<0$. 显然,在区间$(0,y_1)$内, 若 $B\leqslant 0$,则 $h(y)=0$ 没有根; 若 $B>0$,从(3.7.10)知 $h(y_1)<0$,因此 $h(y)=0$ 有一根 $y^*=-\dfrac{B}{A}<y_1$. 所以(3.7.7)在 D 内有惟一正解$P_4^*\left(-\dfrac{B}{A},z^*\right)$.

(ii) 易知当 $\alpha=\sigma\beta$ 时方程$h(y)=0$ 没有非零根.

(iii) 设 $\alpha>\sigma\beta$,则 $A>0$.

(a) 易知当 $B\geqslant 0$ 时方程 $h(y)=0$ 没有正根.

(b) 我们断言,当 $B<0$ 时,方程 $h(y)=0$ 在区间$(0,y_1)$内没根. 若不然,则对充分小的正数 δ,当 $R_0=1+\delta$ 时,方程 $h(y)=0$ 在区间$(0,1)$内有两个根. 这与情形 1 的结果相矛盾,因此断言成立. 定理 3.7.2 证毕. ▌

为了便于理解疫苗有效性对模型(3.7.6)动力行为的影响,下面给出定理 3.7.2 的等价叙述.

定理 3.7.3[2] 记 $\sigma_1=\dfrac{(p+\varepsilon+r)(r+\alpha+\gamma)-\beta[\varepsilon+r(1-q)]}{\beta(p+rq)}$,$\sigma_2$ 为 $B=0$ 关于 σ 的根(如果存在),σ_c $(\sigma_2<\sigma_c<\sigma_1<1)$为 $B=2\sqrt{AC}$关于σ 的根(如果存在). 对于系统(3.7.6),总有无病平衡点 $P_0(0,z_0)$,同时下列叙述成立:

1) 若 $R_0>1$,则存在惟一地方病平衡点 $P^*(y^*,z^*)$;

2) 若 $\sigma_c<\sigma<\sigma_1<1$,则存在两个地方病平衡点 $P_1^*(y_1^*,z_1^*)$,$P_2^*(y_2^*,z_2^*)$ $(y_1^*<y_2^*,z_1^*>z_2^*)$;

3) 若 $\sigma=\sigma_c<\sigma_1<1$,则存在惟一地方病平衡点 $P_3^*(y^*,z^*)$;

4) 若 $\sigma_c<\sigma=\sigma_1<1$,则存在惟一地方病平衡点 $P_4^*(y^*,z^*)$;

5) 除以上四种情形外,均不存在地方病平衡点.其中 R_0,A,B,C,y^*,z^*,y_1^*,y_2^*,z_1^* 和 z_2^* 与定理 3.7.2 中的相同.

证明 下面主要证明定理 3.7.2 和定理 3.7.3 的条件等价.

注意到 $R_0<1$ 与 $\sigma<\sigma_1$ 等价,$R_0=1$ 与 $\sigma=\sigma_1$ 等价,$\beta>r+\alpha+\gamma$ 与 $\sigma_1<1$ 等价.因此,当 $\beta>r+\alpha+\gamma$ 且 $R_0<1$ 时,$AC>0$ 当且仅当

$$\frac{\alpha}{\beta}<\sigma<\sigma_1<1.$$

若 $r+\alpha+\gamma<\beta\leqslant r+\alpha+\gamma+p$,则 B 关于 σ 是单调不增的.由于当 $\alpha=\sigma\beta$ 时 $B=(\alpha-\beta)(r+\varepsilon)<0$,所以当 $\alpha<\sigma\beta$ 时 $B<0$.

若 $\beta>r+\alpha+\gamma+p$,则 B 关于 σ 是单调递增的.当 $r+\alpha+\gamma+p<\beta\leqslant p+\varepsilon+\gamma+\alpha+2r$ 时,若 $\sigma=1$,则 $B=(\alpha-\beta)[(p+\varepsilon+\gamma+\alpha+2r)-\beta]\leqslant 0$,这意味着对于 $\sigma\in(\frac{\alpha}{\beta},1)$,有 $B<0$.当 $\beta>p+\varepsilon+\gamma+\alpha+2r$ 时,若 $\sigma=1$,则 $B>0$;若 $\alpha=\sigma\beta$,则 $B=(\alpha-\beta)(r+\varepsilon)<0$,因此存在 $\sigma_2\in(\frac{\alpha}{\beta},1)$ 使得对于 $\sigma\in(\frac{\alpha}{\beta},\sigma_2)$ 有 $B<0$,对于 $\sigma\in(\sigma_2,1)$ 有 $B>0$.

因此,当 $R_0<1$ 且 $\beta>p+\varepsilon+\gamma+\alpha+2r$ 时,若 $\sigma_2>\sigma_1$,则对于 $\sigma\in(\frac{\alpha}{\beta},1)$,$B>2\sqrt{AC}$ 不能成立;若 $\sigma=\sigma_2=\sigma_1$,则 $B=0$;若 $\sigma_2<\sigma_1$,则存在 $\sigma_c\in(\sigma_2,\sigma_1)$,使得当 $\sigma\in(\sigma_2,\sigma_c)$ 时 $0<B<2\sqrt{AC}$,当 $\sigma=\sigma_c$ 时 $B=2\sqrt{AC}$,当 $\sigma\in(\sigma_c,\sigma_1)$ 时 $B>2\sqrt{AC}$.

概括以上推理可得:

(i) 条件 $R_0<1$, $\beta<r+\alpha+\gamma,\alpha<\sigma\beta$ 和 $B>2\sqrt{AC}$ 等价于

$$\sigma_c<\sigma<\sigma_1<1;$$

(ii) 条件 $R_0<1,\beta>r+\alpha+\gamma,\alpha<\sigma\beta,B=2\sqrt{AC}$ 等价于 $\sigma=\sigma_c<\sigma_1<1$;

(iii) 条件 $R_0=1,\alpha<\sigma\beta,B>0$ 等价于 $\sigma_c<\sigma=\sigma_1<1$.

从定理 3.7.2 知,定理 3.7.3 成立. ▌

注 记 $R_c\triangleq\dfrac{\beta[\varepsilon+\sigma_c p+r(1-(1-\sigma_c)q)]}{(\alpha+r+\gamma)(p+\varepsilon+r)}$,则 $\sigma_c<\sigma<\sigma_1<1$ 等价于 $R_c<R_0<1$;$\sigma=\sigma_c<\sigma_1<1$ 等价于 $R_c=R_0<1$;$\sigma_c<\sigma=\sigma_1<1$ 等价于 $R_c<R_0=1$.

同时我们还可以证明系统(3.7.6)的各平衡点局部稳定性.

定理 3.7.4[2] 对于系统(3.7.6),下列结论成立.

1) 对无病平衡点 P_0,当 $R_0<1$ 时是稳定结点,当 $R_0>1$ 时是鞍点;

2) 当 $R_0>1$ 时地方病平衡点 P^* 是局部渐近稳定的;

3) 当地方病平衡点 P_1^* 和 P_2^* 存在时,它们分别为鞍点和稳定结点;

4) 当地方病平衡点 P_3^* 存在时,一定是鞍结点;

5) 当 $R_0=1,\alpha<\sigma\beta,B>0$ 时,无病平衡点 P_0 在区域 D 内部是不稳定的,地方病平衡点 P_4^* 是局部渐近稳定的.

关于系统(3.7.3)的全局稳定性,有下面几个定理.

定理 3.7.5 系统(3.7.3)不存在周期解.

证明 由于区域 $\Omega=\{(x,y,z)\mid x>0,y\geqslant 0,z>0,x+y+z=1\}$ 是(3.7.3)的不变集,又易知区域的边界线 $\partial\Omega$ 不可能是系统(3.7.3)的周期解.因此,以下仅在区域 Ω 内讨论.

假设系统(3.7.3)在 Ω 内有周期解 $\varphi(t)=\{x(t),y(t),z(t)\}$,并且 $\varphi(t)$ 的轨线 Γ 所围的平面区域为 Π,平面域 Π 位于 Ω 的内部.

记 f_1,f_2,f_3 分别为系统(3.7.3)的右端三方程的表达式,$\boldsymbol{f}=(f_1,f_2,f_3)^{\mathrm T}$ (T 代表转置),$\boldsymbol{g}(x,y,z)=\dfrac{1}{xyz}\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{f}$(其中 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)^{\mathrm T}$),则易知

$$\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{f}=0.$$

记 $\boldsymbol{g}=(g_1,g_2,g_3)$ 和 $\mathrm{Curl}\boldsymbol{g}=\left(\dfrac{\partial g_3}{\partial y}-\dfrac{\partial g_2}{\partial z},\dfrac{\partial g_1}{\partial z}-\dfrac{\partial g_3}{\partial x},\dfrac{\partial g_2}{\partial x}-\dfrac{\partial g_1}{\partial y}\right)$,则直接计算可知在区域 Ω 内有

$$\begin{aligned}&\mathrm{Curl}g\cdot(1,1,1)^{\mathrm T}\\&=-\frac{px+\gamma y+\varepsilon z}{xyz}-\frac{rq+px}{z^2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)-\frac{r(1-q)+\sigma y+\varepsilon z}{x^2}\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\\&<0.\end{aligned}\tag{3.7.11}$$

设平面区域 Π 的方向是向上的,轨线 Γ 的方向与 Π 的方向成右手法则.由于向量(1,1,1)是平面区域 Π 的法向量,所以由 3.2.2 中的定理3.2.9可知定理3.7.5成立. ▍

由定理 3.7.5 和定理 3.7.4,容易得到下面的定理:

定理 3.7.6[2] 当 $0<\sigma<1$ 时,对于系统(3.7.6),下列结论成立:

(i) 当 $R_0>1$ 时 P^* 是全局渐近稳定的.

(ii) 如果 $R_0<1,\alpha<\sigma\beta,\beta>r+\gamma+\alpha,B>2\sqrt{AC}$,则存在平衡点 P_1^* 的两条稳定流形将区域 D 分为两部分:D_1 和 D_2(其中 $P_2^*\notin D_1,P_2^*\in D_2$),使得当 $(y(0),z(0))\in D_1$ 时 $\lim\limits_{t\to\infty}(y(t),z(t))=(0,z_0)$,当 $(y(0),z(0))\in D_2$ 时 $\lim\limits_{t\to\infty}(y(t),z(t))=(y_2^*,z_2^*)$.

(iii) 如果 $R_0<1,\alpha<\sigma\beta,\beta>r+\gamma+\alpha,B=2\sqrt{AC}$,则存在 P_3^* 的两条稳

定流形将区域 D 分为两部分：D_1 和 D_2（D_1 位于 D_2 上方），使得当 $(y(0), z(0)) \in D_1$ 时 $\lim\limits_{t\to\infty}(y(t), z(t)) = (0, z_0)$，当 $(y(0), z(0)) \in D_2$ 时 $\lim\limits_{t\to\infty}(y(t), z(t)) = (y^*, z^*)$.

(iv)　如果 $R_0 = 1, \alpha < \sigma\beta, B > 0$，则 P_4^* 是全局渐近稳定的.

(v)　如果(3.7.6)的参数不满足(i)－(iv)的条件，则无病平衡点 P_0 是全局渐近稳定的.

当总种群中无传染病存在时，根据对 $f(N)$ 的假设，方程 $N' = N[r - f(N)]$ 有惟一全局渐近稳定的正平衡点 $N_0 = f^{-1}(r)$. 当传染病引起死亡时，N 符合方程 $N' = N[r - f(N) - \alpha y]$.

由定理 3.7.6 知，染病者比例 $y(t)$ 要么满足 $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = 0$，要么满足 $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = \bar{y} > 0$（其中 $\bar{y}$ 是地方病平衡点的 y 坐标值）. 因此，有定理：

定理 3.7.7[2]　设 $\bar{y}$ 是地方病平衡点的 y 坐标值，则下列结果成立.

(i)　如果 $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = 0$，则 $\lim\limits_{t\to\infty} N(t) = N_0$；

(ii)　如果 $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = \bar{y} > 0$ 且 $\alpha\bar{y} < r - f(0)$，则

$$\lim_{t\to\infty} N(t) = f^{-1}(r - \alpha\bar{y}) < N_0;$$

(iii)　如果 $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = \bar{y} > 0$ 且 $\alpha\bar{y} \geqslant r - f(0)$，则 $\lim\limits_{t\to\infty} N(t) = 0$.

3.7.2　一类 SIRS 传染病模型的稳定性分析

考虑下面的 SIRS 模型

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = b - dS - \dfrac{kI^l S}{1 + \alpha I^h} + \nu R, \\ \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \dfrac{kI^l S}{1 + \alpha I^h} - (d + \gamma) I, \\ \dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = \gamma I - (d + \nu) R, \end{cases} \tag{3.7.12}$$

其中 b 是种群的出生率，d 是种群的死亡率系数，γ 是染病者的恢复率系数，ν 是免疫者失去免疫率系数，l 和 h 是正常数，而 α 是非负常数. 该模型采用的疾病发生率为 $\dfrac{kI^l S}{1 + \alpha I^h}$，其中 kI^l 是度量疾病的传染力，$\dfrac{1}{1 + \alpha I^h}$ 是描述易感者采取措施以抑制传染力.

由方程组(3.7.12)知，种群总数量 $N(t)$ 满足方程

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = b - dN.$$

因为，当 $t \to +\infty$ 时，$N(t) \to \dfrac{b}{d} = N_0$. 所以，系统(3.7.12)极限方程为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \dfrac{kI^l}{1+\alpha I^h}(N_0 - I - R) - (d+\gamma)I, \\ \dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = \gamma I - (d+\nu)R. \end{cases} \tag{3.7.13}$$

这里,我们将考虑 $l=h=2$ 的情形.因而,系统(3.7.13)变为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \dfrac{kI^2}{1+\alpha I^2}(N_0 - I - R) - (d+\gamma)I, \\ \dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = \gamma I - (d+\nu)R. \end{cases} \tag{3.7.14}$$

为方便,对(3.7.14)作变换 $X=\sqrt{\dfrac{k}{d+\nu}}I$, $Y=\sqrt{\dfrac{k}{d+\nu}}R$, $\theta=(d+\nu)t$.并把 X,Y,θ 仍用 I,R,t 来表示,则(3.7.14)变为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \dfrac{I^2}{1+pI^2}(A - I - R) - mI, \\ \dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = qI - R, \end{cases} \tag{3.7.15}$$

其中

$$p = \frac{\alpha(d+\nu)}{k}, \qquad A = N_0\sqrt{\frac{k}{d+\nu}}, \qquad m = \frac{d+\gamma}{d+\nu}, q = \frac{\gamma}{d+\nu}.$$

为寻找(3.7.15)的正平衡点,令

$$qI - R = 0, \frac{I}{1+pI^2}(A - I - R) - m = 0.$$

从而可得关于 I 的方程

$$(mp+q+1)I^2 - AI + m = 0. \tag{3.7.16}$$

由(3.7.16)可知:

(i) 若 $A^2<4m(mp+q+1)$, 则系统(3.7.15)没有正平衡点;

(ii) 若 $A^2=4m(mp+q+1)$, 则系统(3.7.15)只有一个正平衡点;

(iii) 若 $A^2>4m(mp+q+1)$, 则系统(3.7.15)有两个正平衡点.

设 $A^2>4m(mp+q+1)$.则(3.7.15)的两个正平衡点分别为(I_1,R_1)和(I_2,R_2),其中

$$I_1 = \frac{A-\sqrt{A^2-4m(mp+q+1)}}{2(mp+q+1)}, \qquad R_1 = qI_1;$$

$$I_2 = \frac{A+\sqrt{A^2-4m(mp+q+1)}}{2(mp+q+1)}, \qquad R_2 = qI_2.$$

首先可以证明(I_1,R_1)为鞍点,即需证明在(I_1,R_1)处的 Jacobian 矩阵 M_1 的行列式 $\det(M_1)<0$,详细证明见文献[54].其次,用类似的方法可证明$(I_2,$

R_2)为系统(3.7.15)的结点,或焦点,或是中心.即在(I_2,R_2)处的 Jacobian 矩阵

$$M_2=\begin{bmatrix}\frac{I_2(A-ApI_2^2-2I_2-qI_2+qI_2^3p)}{(1+pI_2^2)^2} & -\frac{I_2^2}{1+pI_2^2}\\ q & -1\end{bmatrix}$$

的行列式 $\det(M_2)>0$.

平衡点(I_2,R_2)的稳定性可利用 $\mathrm{tr}(M_2)$的符号加以确定.首先文献[54]证明了当 $m\leqslant 1$ 时,(I_2,R_2)的稳定性不会改变;当 $m>1$ 且

$$A^2\neq\frac{(mq+2m-q-1+2m^2p)^2}{(m-1)(mp+p+1)}$$

时,(I_2,R_2)的稳定性也不会改变.

当 $m>1$ 时,(I_2,R_2)稳定性改变的充要条件为

$$\begin{cases}m>1,\\ q>\dfrac{2mp+1}{m-1},\\ A^2=\dfrac{(mq+2m-1-q+2m^2p)^2}{(m-1)(mp+p+1)}.\end{cases}\tag{3.7.17}$$

并得到下面的定理.

定理 3.7.8[54]　如果下列不等式之一成立:

(1)　$(m-1)(mp+p+1)A^2>(mq+2m-1-q+2m^2p)^2$,

(2)　$m<1$,

(3)　$q<\dfrac{2mp+1}{m-1}$.

则平衡点(I_2,R_2)是稳定的,如果

$$\begin{cases}m>1,\\ q>\dfrac{2mp+1}{m-1},\\ 4m(mp+q+1)<A^2<\dfrac{(mq+2m-1-q+2m^2p)^2}{(m-1)(mp+p+1)},\end{cases}$$

则平衡点(I_2,R_2)是不稳定的.

3.7.3　SIRS 传染病模型的 Hopf 分支及 Bogdanov-Takens 分支

SIRS 模型的 Hopf 分支

模型(3.7.15)如果有极限环,其动力学性态将由(I_2,R_2)的稳定性和极限环的个数来确定.为了寻找极限环,首先考虑(I_2,R_2)的 Hopf 分支,此时使(I_2,R_2)的稳定性改变的条件(3.7.17)必须满足.为计算方便,考虑与(3.7.15)等价

的系统

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=I^2(A-I-R)-mI(1+pI^2),\\ \dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}=(qI-R)(1+pI^2).\end{cases}\tag{3.7.18}$$

做变换 $x=I-I_2,y=R-R_2$,则(3.7.18)变为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=a_{11}x+a_{12}y+f_1(x,y),\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=a_{21}x+a_{22}y+f_2(x,y),\end{cases}\tag{3.7.19}$$

其中

$$\begin{aligned}a_{11}&=2I_2(A-I_2-R_2)-I_2^2-m(1+pI_2^2)-2mI_2^2p,\\ a_{12}&=-I_2^2,\\ a_{21}&=q(1+pI_2^2)+2(qI_2-R_2)pI_2,\\ a_{22}&=-(1+pI_2^2).\end{aligned}$$

由于(3.7.17)蕴涵 $a_{11}+a_{22}=0$,故有

$$g_1\triangleq(-2q-3mp-3-p)I_2^2+2AI_2-1-m=0.\tag{3.7.20}$$

由于 $(mp+q+1)I_2^2-AI_2+m=0$,从而可得

$$I_2=\frac{2m^2p-q+mq-1+2m}{A(mp+1+p)}.\tag{3.7.21}$$

利用(3.7.21)和(3.7.17)的第三个方程,可以把 a_{ij} 化为

$$\begin{aligned}a_{11}&=k_0(2mp+1),\qquad a_{12}=-k_0(m-1),\\ a_{21}&=k_0(2mp+1)q,\quad a_{22}=-k_0(2mp+1),\end{aligned}$$

其中 $k_0=1/(mp+p+1)$.再做变换 $X=x,Y=a_{11}x+a_{12}y$,则(3.7.19)变为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}=Y+f_1\left(X,\dfrac{Y-a_{11}X}{a_{12}}\right),\\ \dfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}=-k_1X+a_{11}f_1\left(X,\dfrac{Y-a_{11}X}{a_{12}}\right)+a_{12}f_2\left(X,\dfrac{Y-a_{11}X}{a_{12}}\right),\end{cases}\tag{3.7.22}$$

其中

$$k_1=k_0^2(mq-2mp-q-1)(2mp+1).$$

由于 $m>1,q>\dfrac{2mp+1}{m-1}$,所以有 $k_1>0$.

设 $u=-X,v=\dfrac{1}{\sqrt{k_1}}Y$,则(3.7.22)变为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=-\sqrt{k_1}v+F_1(u,v),\\ \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\sqrt{k_1}u+F_2(u,v),\end{cases}$$

其中

$$F_1(u,v)=-f_1(-u,(v\sqrt{k_1}+a_{11}u)/a_{12}),$$

$$F_2(u,v)$$

$$=\frac{a_{11}f_1(-u,(v\sqrt{k_1}+a_{11}u)/a_{12})+a_{12}f_2(-u,(v\sqrt{k_1}+a_{11}u)/a_{12})}{\sqrt{k_1}}.$$

设

$$\sigma=\frac{1}{16}\left[\frac{\partial^3F_1}{\partial u^3}+\frac{\partial^3F_1}{\partial u\partial v^2}+\frac{\partial^3F_2}{\partial u^2\partial v}+\frac{\partial^3F_2}{\partial v^3}\right]$$
$$+\frac{1}{16\sqrt{k_1}}\left[\frac{\partial^2F_1}{\partial u\partial v}\left(\frac{\partial^2F_1}{\partial u^2}+\frac{\partial^2F_1}{\partial v^2}\right)-\frac{\partial^2F_2}{\partial u\partial v}\left(\frac{\partial^2F_2}{\partial u^2}+\frac{\partial^2F_2}{\partial v^2}\right)\right.$$
$$\left.-\frac{\partial^2F_1}{\partial u^2}\frac{\partial^2F_2}{\partial u^2}+\frac{\partial^2F_1}{\partial v^2}\frac{\partial^2F_2}{\partial v^2}\right].$$

利用(3.7.17)的第三个方程,再借助于 Maple 可推出 σ 的符号由下式确定

$$\mu\triangleq q(m-1)(2mp-4p-1)$$
$$+(2m^2p+2m+4p+1)(2mp+1),\tag{3.7.23}$$

从而由[55]可得下列结论.

定理 3.7.9[54] 设(3.7.17)成立.若 $\mu<0$,则当 A^2 从

$$\frac{(mq+2m-1-q+2m^2p)^2}{(m-1)(mp+p+1)}$$

减少时,(3.7.15)存在一族稳定的周期轨道;若 $\mu>0$,则当 A^2 从 $\dfrac{(mq+2m-1-q+2m^2p)^2}{(m-1)(mp+p+1)}$ 增加时,(3.7.15)存在一族不稳定的周期轨道;若 $\mu=0$,则在适当的扰动下,(3.7.15)至少有两个极限环.

例 设 $m=3.0,q=3.0,p=0.2$ 以及 $A=7.69487564$,则(3.7.17)成立,由(3.7.23)知,$\mu=21.48$,因此,当 A 从7.69487564增加时,有一族不稳定的极限环(见图 3.1).

Bogdanov-Takens 分支

考虑(3.7.15)的 Bogdanov-Takens 分支.设

$$(\mathrm{H}_1)\qquad A^2=4m(mp+q+1)$$

成立,则(3.7.15)有惟一的正平衡点(I^*,R^*),这里

$$I^*=\frac{A}{2(mp+q+1)},\quad R^*=qI^*.$$

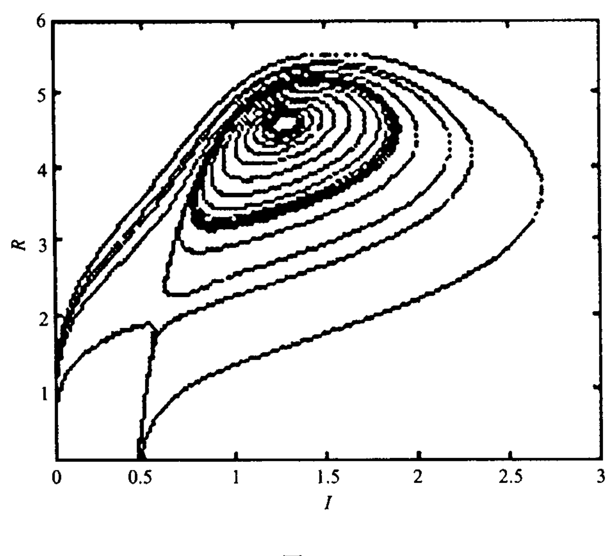


图 3.1

取一点(A_0,p_0,m_0,q_0)使(H_1)成立.考虑系统

$$\begin{cases}\dfrac{dI}{dt}=\dfrac{I^2}{1+p_0I^2}(A_0-I-R)-m_0I,\\[2mm] \dfrac{dR}{dt}=q_0I-R.\end{cases}\tag{3.7.24}$$

作变换$x=I-I^*,y=R-R^*$,则(3.7.24)变为

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=a_{11}x+a_{12}y+f_1(x,y),\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=q_0x-y+f_2(x,y),\end{cases}\tag{3.7.25}$$

其中$f_i(x,y)$是高阶项,而

$$a_{11}=\frac{I^*(A_0-2I^*-R^*-A_0p_0I^{*2}+R^*p_0I^{*2})}{(1+p_0I^{*2})^2},$$

$$a_{12}=-\frac{I^{*2}}{1+p_0I^{*2}}.$$

由于我们对余维2分支感兴趣,进一步设

(H_2) $a_{11}=1$.

在假设(H_1)和(H_2)之下,可证明矩阵

$$M=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ q_0 & -1\end{bmatrix}$$

的行列式为零,并且 $a_{12}=-\dfrac{1}{q_0}$.

事实上

$$\det(M)=-a_{11}-q_0a_{12}=\frac{I^*(-A_0+A_0p_0I^{*2}+2I^*+2q_0I^*)}{(1+p_0I^{*2})^2}.$$

由于 $I^*=\dfrac{A_0}{2(m_0p_0+q_0+1)}$,故由($H_1$)可得 $\det(M)=0$ 及 $a_{11}=-1$ 等价于

$$q_0=\frac{2m_0p_0+1}{m_0-1}. \tag{3.7.26}$$

(3.7.26)蕴含 $m_0>1$,把 $I^*=\dfrac{A_0}{2(m_0p_0+q_0+1)}$ 和 $A_0^2=4m_0(m_0p_0+q_0+1)$ 代入 a_{12} 得

$$a_{12}=-\frac{m_0}{2m_0p_0+q_0+1}.$$

再由(3.7.26)即得 $a_{12}=-\dfrac{1}{q_0}$. 此时,矩阵 M 显然有二重零特征值. 因此,在假设(H_1)和 (H_2)之下,系统(3.7.25)变为

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x-\dfrac{1}{q_0}y+a_{21}x^2+a_{22}xy+p(x,y),\\ \dfrac{dy}{dt}=q_0x-y,\end{cases} \tag{3.7.27}$$

其中 p 是 x,y 的至少 3 阶光滑函数. 因为

$$\begin{cases}a_{22}=-\dfrac{2I^*}{(1+p_0I^{*2})^2}<0,\\ a_{21}=\dfrac{A_0-3A_0p_0I^{*2}-3I^*+I^{*3}p_0-R^*+3R^*p_0I^{*2}}{(1+p_0I^{*2})^2},\end{cases}$$

经化简可得

$$\begin{cases}a_{22}=-\dfrac{(m_0-1)(m_0p_0+p_0+1)A_0}{m_0(2m_0p_0+1)^2},\\ a_{21}=-\dfrac{A_0(m_0p_0+p_0+1)(m_0-2)}{2m_0(2m_0p_0+1)}.\end{cases} \tag{3.7.28}$$

设 $X=x, Y=x-y/q_0$, 则(3.7.27)变为

$$\begin{cases}\dfrac{dX}{dt}=Y+(a_{21}+q_0a_{22})X^2-a_{22}q_0XY+\bar{P}(X,Y),\\ \dfrac{dY}{dt}=(a_{21}+q_0a_{22})X^2-a_{22}q_0XY+\bar{P}(X,Y),\end{cases} \tag{3.7.29}$$

其中 $\bar{P}$ 是 x,y 的光滑函数且至少是 3 阶的. 为了得到标准形,作变量变换

$$u = X + \frac{a_{22}q_0}{2}X^2, \quad v = Y + (a_{21} + q_0 a_{22})X^2.$$

我们有

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = v + R_1(u,v), \\ \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = (a_{21} + q_0 a_{22})u^2 + (2a_{21} + q_0 a_{22})uv + R_2(u,v), \end{cases} \tag{3.7.30}$$

其中 R_i 是 u,v 的光滑函数且至少是 3 阶的. 由(3.7.26)和(3.7.28),我们有

$$a_{21} + q_0 a_{22} = -\frac{A_0(m_0 p_0 + p_0 + 1)}{2(2m_0 p_0 + 1)} < 0,$$

$$2a_{21} + q_0 a_{22} = -\frac{(m_0 - 1)(m_0 p_0 + p_0 + 1)A_0}{m_0(2m_0 p_0 + 1)} < 0,$$

其中 $m_0 > 1$ 被用到. 现在,我们可以叙述一个重要定理.

定理 3.7.10[54] 设(H_1)和(H_2)成立,则(3.7.24)的平衡点(I^*,R^*)是一个余维 2 的尖点,也就是说,它具有 Bogdanov-Takens 奇异性.

开折与分支曲线

下面,我们将寻找(3.7.15)用原始参数表示的开折,用这种方法,我们就能够知道分支曲线的近似表达式. 把 A 和 m 取为分支参数,让 A_0,p,m_0,q 满足(H_1)和(H_2),设

$$A = A_0 + \lambda_1, \qquad m = m_0 + \lambda_2,$$

$$I^* = \frac{A_0}{2(m_0 p + q + 1)}, \qquad R^* = qI^*.$$

如果 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$,则($I^*,R^*$)是(3.7.15)的一个退化平衡点. 把 $x = I - I^*$, $y = R - R^*$ 代入到(3.7.15),然后使用 Taylor 展式,得

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = a_0 + a_1 x - \dfrac{1}{q}y + a_2 x^2 + a_3 xy + W_1(x,y,\lambda), \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = qx - y, \end{cases} \tag{3.7.31}$$

其中 $\lambda = (\lambda_1,\lambda_2)$, W_1 是 x,y,λ 的光滑函数且对 x 和 y 至少是 3 阶的,并且

$$a_0 = -\frac{I^*(-I^*A_0 - I^*\lambda_1 + (I^*)^2 + I^*R^* + m_0 + m_0 p(I^*)^2 + \lambda_2 + \lambda_2 p(I^*)^2)}{1 + p(I^*)^2},$$

$$a_1 = -\frac{m_0 p^2(I^*)^4 + \lambda_2 p^2(I^*)^4 + (I^*)^4 p + 2\lambda_2 p(I^*)^2 + 2m_0 p(I^*)^2}{(1 + p(I^*)^2)^2}$$
$$- \frac{3(I^*)^2 - 2I^*\lambda_1 + 2I^*R^* + \lambda_2 - 2I^*A_0 + m_0}{(1 + p(I^*)^2)^2},$$

$$a_2 = -\frac{-p(I^*)^2 + 3\lambda_1 p(I^*)^2 + 3A_0 p(I^*)^2 - \lambda_1 - A_0 + 3I^* + R^*}{(1 + p(I^*)^2)^3},$$

$$a_3 = -\frac{2I^*}{(1+p(I^*)^2)^3}.$$

和简化(3.7.28)中的 a_{ij} 一样,可以得到

$$a_0 = -\frac{A_0(m_0-1)(2m_0(2m_0p+1)\lambda_2 - A_0(m_0-1)\lambda_1)}{4(2m_0p+1)(m_0p+p+1)m_0^2},$$

$$a_1 = 1+\frac{A_0(m_0-1)(m_0p+p+1)\lambda_1 - m_0(2m_0p+1)^2\lambda_2}{m_0(2m_0p+1)^2},$$

$$a_2 = -\frac{(m_0p+q+1)}{2(2m_0p+q+1)^3} \cdot \frac{[2\lambda_1(-q-1+2m_0p)(m_0p+q+1)+A_0(2m_0p+q+1)(q+1+2p)]}{2(2m_0p+q+1)^3},$$

$$a_3 = -\frac{A_0(m_0-1)(m_0p+p+1)}{m_0(2m_0p+1)^2}.$$

作变量变换 $X=x, Y=a_0+a_1x-\frac{1}{q}y+a_2x^2+a_3xy+W_1(x,y)$,然后把 X,Y 重新分别写为 x,y,我们有

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = a_0+(a_1-1)x+a_4y+(a_3q+a_2)x^2+a_5xy \\ \qquad -a_3qy^2+W_2(x,y,\lambda), \end{cases} \tag{3.7.32}$$

其中

$$a_4 = a_1-1+qa_3a_0, \quad a_5 = 2a_2+a_3qa_1+a_0a_3^2q^2.$$

如果 $\lambda_i \to 0$,易知 $a_5 \to -\frac{A_0(m_0-1)(m_0p+p+1)}{(2m_0p+1)m_0} < 0$. 设 $X = x+\frac{a_4}{a_5}$. 再把 X 重新写为 x,我们有

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = b_0+b_1x+(a_3q+a_2)x^2+a_5xy-qa_3y^2+W_3(x,y,\lambda), \end{cases} \tag{3.7.33}$$

其中 $W_3(x,y,\lambda)$ 是 x,y 和 λ 的光滑函数,且至少是 3 阶的. 又

$$b_0 = \frac{a_0a_5^2+a_5a_4-a_5a_1a_4+qa_3a_4^2+a_2a_4^2}{a_5^2},$$

$$b_1 = -\frac{a_5-a_1a_5+2qa_3a_4+2a_2a_4}{a_5}.$$

再用 $\mathrm{d}t=(1+qa_3x)\mathrm{d}\tau$ 来引进新的时间变量 τ,并把 τ 重新写为 t 得

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y(1+qa_3x),\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=(1+qa_3x)(b_0+b_1x+(a_3q+a_2)x^2\\ \qquad +a_5xy-qa_3y^2+W_3(x,y,\lambda)).\end{cases}\tag{3.7.34}$$

设 $X=x,Y=y(1+qa_3x)$,再把 X,Y 重新写为 x,y 得

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y,\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=b_0+c_1x+c_2x^2+a_5xy+W_4(x,y,\lambda),\end{cases}\tag{3.7.35}$$

其中 $W_4(x,y,\lambda)$ 是 x,y 和 λ 至少 3 阶的光滑函数,并且

$$c_1=2b_0a_3q+b_1,$$
$$c_2=a_3^2q^2b_0+2b_1a_3q+a_3q+a_2.$$

注意到当 $\lambda_i\to0$ 时,有

$$b_i\to0,$$
$$a_5\to-\frac{A_0(m_0-1)(m_0p+p+1)}{(2m_0p+1)m_0}<0,$$
$$c_2\to-\frac{(m_0p+p+1)A_0}{2(2m_0p+1)}<0.$$

作最后一个变量变换

$$X=\frac{a_5^2x}{c_2},\quad Y=\frac{a_5^3y}{c_2^2},\quad \tau=\frac{c_2t}{a_5}.$$

再把它们重新分别写为 x,y,t,得

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y,\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\tau_1+\tau_2x+x^2+xy+W_5(x,y,\lambda),\end{cases}\tag{3.7.36}$$

其中 $W_5(x,y,\lambda)$ 是 x,y 和 λ 至少 3 阶的光滑函数,并且

$$\tau_1=\frac{b_0a_5^4}{c_2^3},\qquad \tau_2=\frac{c_1a_5^2}{c_2^2}.\tag{3.7.37}$$

最后根据 Kuznetsov[56] 中的定理,可得到在原点附近分支曲线的表达式.

定理 3.7.11[54] 设(H_1)和(H_2)成立,则系统(3.7.15)拥有下列分支特性:

(i) 有鞍结点分支曲线 $SN=\{(\lambda_1,\lambda_2)|4c_2b_0=c_1^2\}$,

(ii) 有 Hopf 分支曲线 $H=\{(\lambda_1,\lambda_2)|b_0=0,c_1<0\}$,

(iii) 有同宿环分支曲线 $HL=\{(\lambda_1,\lambda_2)|25b_0c_2+6c_1^2=0+o(\|\lambda\|)^2\}$.

例　设 $p_0=1, m_0=2$. 则 $q_0=1.4, A_0=4.5607017$, 由上面的计算公式可知同宿环分支曲线由下式确定

$$0.9841399516\lambda_2^2-2.424322230\lambda_2\lambda_1+1.395121027\lambda_1^2$$
$$+1.166710988\lambda_2-0.9501822832\lambda_1+o(\|\lambda\|)^2)=0.$$

如果 $\lambda_1=0.1$, 它蕴涵着 $\lambda_2=0.08076325823$. 用 XPPAUT, 我们得到图 3.2所示的一个同宿环.

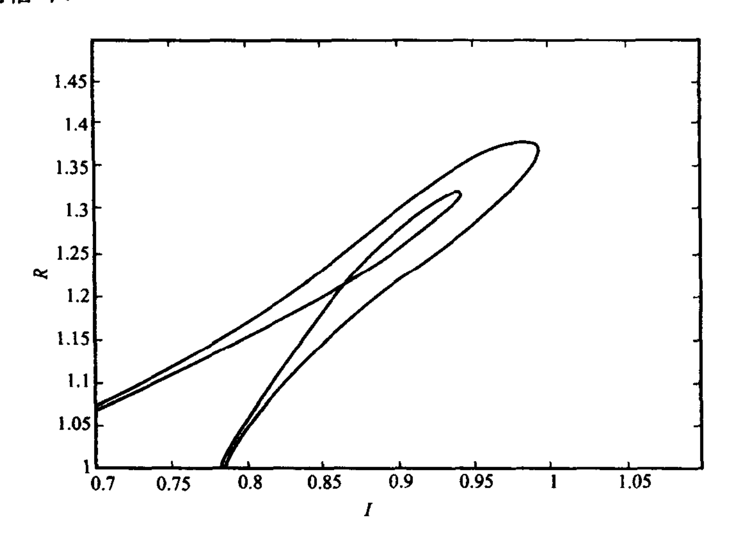


图 3.2　$\lambda_1=0.1$ 和 $\lambda_2=0.08076325823$ 时的同宿轨

参考文献

[1] V Capasso. Mathematical Structures of Epidemic Systems. Vol. 97 of Lecturenotes in Biomathematics. Berlin, Springer-Verlag: 1993

[2] 李建全. 具有预防接种流行病的模型. 西安交通大学博士论文, 2003

[3] Jianquan Li, Zhien Ma. Qualitative analyses of SIS epidemic model with vaccination and varying total population size. Math. Computer Modelling, 2002(35): 1235～1243

[4] 陈兰荪, 陈　键. 非线性生物动力系统. 北京: 科学出版社, 1993

[5] 靳　祯. 在脉冲作用下的生态和流行病模型的研究. 西安交通大学博士论文, 2001

[6] J Mena-lorca, H W Hethcote. Dynamic models of infectious diseases as regulations of population sizes. J. Math. Biol., 1992, 30: 693～716

[7] C Castillo-Chavez, H R Thieme. Asymtotically Autonomous Epidemic Models. in: O. Arinoetal. (Eds.). Mathematical Population Dynamics: Analysis of Heterogeneity I. Theory of Epidemics, Wuerz, 1995, 33

[8] H R Thieme. Convergence results and a Poincare-Bendixson trichotomy for asymtotically autonomous differential equations. J. Math. Biol., 1991, 30: 462～471

[9] S Busenberg, P Van Driessche. Analysis of a disease transimission model in a population with varying size. J. Math. Biol., 1990, 28: 257~270

[10] J Mena-lorca, H W Hethcote. Dynamic models of infectious diseases as regulatiors of population sizes. J. Math. Biol., 1992, 30: 693~716

[11] R M Anderson, R M May. Population biology of infectious diseases. Nature, 1979, 180: 361~367

[12] L Q Gao, H W Hethcote. Disease transmission models with density-depen dented emographics. J. Math. Biol., 1992, 30: 717~7731

[13] M Fiedler. Additive compound matrices and inequality for eigenvalues of stochastic matrices. Czech. Math. J., 1974, 99: 392~402

[14] J S Muldowney. Compound matrices and ordinary differential equations. RockyMount. J. Math., 1990, 20: 857~872

[15] G J Butler, P Waltman. Persistence in dynamical systems, Proc. Amer. Math. Soc., 1986, 96: 425~430

[16] J K Hale. Ordinary Differential Equations. New York, JohnWiley & Sons: 1969

[17] M Y Li, Liancheng Wang. Global stability in some SEIR epidemic models(to appear)

[18] M Y Li, L Wang. Acriterion for stability of matrices. J. Math. Anal. Appl., 1998, 225: 249~264

[19] M Y Li, J S Muldowney. A geometric approach to the global-stability problems. SIAM J. Math. Anal., 1996, 27: 1070~1083

[20] M Y Li, J R Graef, L C Wang, J Karsai. Global dynamics of a SEIR model with a varying total population size. Math. Biosci., 1999, 160: 191~213

[21] M Y Li, James S Muldowney. Global stability for the SEIR model in epidemiology. Math. Biosci., 1995, 125: 155~164

[22] Juan Zhang, Zhien Ma. Dynamic behavior of the SEIR epidemic model with the saturating contact rate(to appear)

[23] Meng Fan, M Y Li, Ke Wang. Global stability of an SEIS epidemicmodel with recruitment and a verying total population size. Math. Biosci., 2001, 170: 199~208

[24] Juan zhang, Zhien Ma. Global dynamic of an SEIS epidemic model with populationsize dependent incidence. Math. Biosci., 2003, 185: 15~32

[25] H Hethcote, Ma Zhien, Liao Shengbing. Effects of quarantine in six endemic models for infectious diseases. Math. Biosci., 2002, 180: 141~160

[26] Fred Brauer, P. van den Driessche. Models for transmission of disease with immigration of infectives. Math. Biosci., 2001, 171: 143~154

[27] Li Jianquan, Zhang Juan, Ma Zhien. Global analysis of some epidemic models with general contact rate and constant immigration. Applied Math. Mech., 2004, 4: 396~404

[28] G Gripenberg, S O Londen, O Staffans. Volterra Integral and Functional Equations. Cambridge Cambridge, University, 1990

[29] H W Hethcote, J A Yorke. Gonorrhea Transmission Dynamics and Control, Lecture Notes Biomath. 56, Springer-Verlag, New York, 1984

[30] C Castillo-Chavez, W Huang, J Li. Dynamics of multiple pathogen strains in heterosexual epidemiological models. in Differential Equations and Applications to Biologyand Industry. M Martelli, K Cooke, E Cumberbatch, B Tang, and H Thieme, eds., World Scientific, Singapore, 1995, 289~298

[31] C Castillo-Chavez, W Huang, J Li. Competitive exclusion in gonorrhea model san dother sexually transmitted diseases. SIAM J. Appl. Math., 1996, 56: 494~508

[32] C Castillo-Chavez, W Huang, J Li. The effects of female's susceptibility on coexistence of multiple pathogen strains of sexually transmitted diseases. J Math. Biol., 1997, 35: 503~522

[33] C Castillo-Chavez, W Huang, J Li. Competitive exclusion and coexistence of multiple strains in an SIS STD model. SIAM J. Appl. Math., 1999, 59: 1790~1811

[34] S B Hsu, H L Smith, P Waltman. Competitive exclusion and coexistence for competitive systems on ordered Banach spaces. Trans. AMS, 1996, 348: 4083~4094

[35] H L Smith. Systems of ordinary differential equations with generate an order preserving flow. SIAM Rev., 1988, 30: 87~113

[36] 胡适耕. 非线性分析理论与方法. 武汉: 华中科技大学出版社, 1996

[37] H R Thieme. Epidemic and demographic interaction in the spread of potentially fatal diseases in growing populations. Math. Biosci., 1992, 111: 99~130

[38] H R Thieme. Persistence under relaxed point-dissipativity with application to an endemic model. SIAM J. Math. Anal., 1993, 24: 407~435

[39] H R Thieme. Uniform persistence and permanence for non-autonomous semiflows in population biology. Math. Biosci., 2000, 166: 173~201

[40] H I Freedman, Shigui Ruan, Moxun Tang. Uniform persistence and flows near a closed positively invariant set. Reprinted from Journal of Dynamics and Equations, 1994, 6: 583~600

[41] Debasis Mukherjee. Uniform persistence in a generalized prey-predator system with parasitic infection. BioSystems, 1998, 47: 149~155

[42] Junling Ma, Zhien Ma. Time variant SIS SIR SEIR epidemiological models. J Math. Biol., (to appear)

[43] D Ludwig, K L Cooke, Eds., Epidemiology, SIMS Utah Conference Proceedings, SIAM, Philadelphia, 1975

[44] R M May, R M Anderaon. Transmission dynamics of HIV infection, Nature, 1987, 326: 137~142

[45] S Busenberg, K P Hadeler. Demography and epidemics. MathBiosci, 1990, 101: 63~74

[46] W M Liu, H W Hethcote, S A Levin. Dynamical behavior of epidemiological models with nonlinear incidence rates. J. Math. Biol., 1987, 25: 359~380

[47] H W Hethcote. The mathematics of infectious diseases. SIAM Rev., 2000,42: 599～653

[48] J A P Heesterbeek, J A J Metz. The saturating contact rate in marriage and epidemic models. J. Math. Biol., 1993,31: 529～539

[49] H W Hethcote. A thousand and one epidemic models. in frontiers in theoretical biology. S A Levin, ed., Springer-verlag, Berlin, 1994:504～515

[50] D J D Earn, P Rohani, B M Bolkerand, B T Grenfell. A simple model for complex dynamical transitions in epidemics. Science, 2000,287: 667～670

[51] H R Thieme. Convergence result sand a poincaré-Bendixson trichotomy for asymptotically autonomous differential equations. J. Math. Biol., 1992,30: 755～763

[52] 马知恩，靳祯．总人口在变化的流行病动力学模型．华北工学院学报，2001,22: 262～271

[53] 廖晓昕．稳定性的理论和方法．武汉：华中理工大学出版社，1989

[54] 王稳地．传染病数学模型的稳定性和分支．西安交通大学博士论文，2001

[55] J Guckenheimer, P J Holmes. Nonlinear Oscillations Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields. Spring-Verlag, NewYork, 1996

[56] Y A Kuznetsov. Elements of Applied Bifurcation Theory. Spring-Verlag, NewYork, 1998

[57] J D Murray. Mathematical Biology. Springer-Verlag, Berlin, 1989

[58] J Zhou, H W Hethcote. Population size dependent incidence in models for disease without immunity. J. Math. Biol., 1994,32: 809～834

[59] Z Feng, H R Thieme. Recurrent outbreaks of childhood disease revisited the impact of isolation. Math. Biol., 1995,128: 93～130

[60] J Dushoff, W Huang, C Castillo Chavez. Backward bifurcation and catastrophe in simple models of fatal disease. J. Math. Biol., 1998, 36: 227～248

[61] K P Hadeler, C Castillo-chavez. A core group model for disease transmission. Math. Biol., 1995,128: 41～55

[62] K P Hadeler, P van den Driessche. Backward bifurcation in epidemic control. Math. Biosci., 1997, 146: 15～35

[63] C M Kribs-Zaleta. Core reruitment effects in SIS models with constant total populations. Math. Biosci., 1999, 160: 109～158

[64] C M Kribs-Zaleta, J X Velasco-Hernández. As imple vaccination model with multiple endemic states. Math. Biosci., 2000, 164: 183～201

[65] D Greenhalgh, O Diekmann and Mart C M de Jong. Subcritical endemic steady states in mathematical models for animal infections with incomplete immunity. Math. Biosci., 2000, 165: 1～25

[66] Fred Brauer, P van den Driessche. Models for transmission of disease with immigration of infectives. Math. Biosci., 2001, 171: 143～154

[67] C M Kribs-Zaleta, M Martcheva. Vaccination strategies and backward bifurcation in an age-since-infection structured model. M. B., 2002, 177&178: 317～332

[68] W Huang, K L Cooke, C Castillo-Chavez. Stability and bifurcation for a multiple-group model for the dynamics of HIV/AIDS transmission. SIAM J. Appl. Math., 1992, 52: 835～854

[69] P ven den Driessche, J Watmough. As imple SIS epidemic model with a backward bifurcation. J. Math. Biol., 2000, 40: 525～540

[70] 张芷芬，丁同仁，黄文灶，董镇喜. 微分方程定性理论. 北京：科学出版社，1997

[71] X A Zhong, L S Chen. The periodic solution of a class of epidemic models Comput and Math. with appls. 1999,38:61～71

第 4 章　带时滞的传染病模型

时滞在传染病的传播过程中扮演着重要的角色,我们可以用时滞模拟传染病的潜伏期、患者对疾病的感染期和恢复者对疾病的免疫期. 在第一章和第二章我们已经阐述了带时滞的传染病模型的建模思想以及基本研究方法. 本章的目的是系统介绍这一方面的研究方法以及近年来的研究工作.

§4.1　种群规模不变的传染病模型

当传染病流行期较短或者种群出生与死亡达到平衡时,我们就可以认为种群规模是不变的. 这种假设既有一定的现实背景,又给数学研究带来了很大的方便.

4.1.1　不考虑出生与死亡的 SIS 和 SEIS 模型

Cooke 和 Yorke[13] 在研究淋病时提出了下面的 SIS 模型

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = -\beta S(t)I(t) + \beta S(t-\tau)I(t-\tau),$$

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \beta S(t)I(t) - \beta S(t-\tau)I(t-\tau),$$

其中 τ 是淋病的感染期,这里忽略了种群的出生与死亡,显而易见种群规模 $N = S + I$ 是一个常数. 为方便起见,设 $N = 1$,则有

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \beta I(t)(1 - I(t)) - \beta I(t-\tau)(1 - I(t-\tau)). \qquad (4.1.1)$$

从这个方程出发,他们证明了当 t 趋向于无穷大时,$I(t)$ 收敛于一个确定的值.

Busenberg 和 Cooke[9] 把文献[13] 的研究方法应用到一个由媒介传播疾病的 SEIS 模型. 作如下基本假设:

(a) 疾病不是致命的,且人口对这种病没有免疫力;

(b) 传病媒介的数量大,携带病毒的媒介数量与感染者的人数成正比;

(c) 设时滞 $T > 0$ 是疾病在人群中的潜伏期;

(d) 感染者被治愈后返回到易感类,其速率与感染者的人数成比例,比例系数为 $\gamma > 0$.

由假设(b),携带病毒的媒介数量等于 $\beta_1 I(t)$,$\beta_1 > 0$. 又设 $\beta_2 > 0$ 是易感者和传病媒介间的有效接触系数. 则有模型

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} &= \gamma I(t) - \beta S(t)I(t), \\
\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} &= \beta S(t)I(t) - \beta S(t-T)I(t-T), \\
\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} &= \beta S(t-T)I(t-T) - \gamma I(t),
\end{aligned}
\tag{4.1.2}
$$

其中 $\beta = \beta_1\beta_2$. 对于这个问题以及其它类似问题，我们应该注意的是，从形式上看，第一和第三个方程与第二个方程独立，可以从第一和第三个方程先把 S 和 I 解出来，然后再从第二个方程把 E 解出来. 但下面会看到仅仅这样作还是不够的. 我们设种群规模 $N = S + E + I \equiv a$. 于是模型(4.1.2)的可行区域为

$$
D = \{(S,E,I) \mid 0 \leqslant S \leqslant a, 0 \leqslant E \leqslant a, 0 \leqslant I \leqslant a, S + E + I \equiv a\}.
$$

显然系统(4.1.2)的初始函数和解应始终落在这个区域中. 文献[13]给出反例，尽管初始函数在可行区域中，但(4.1.2)的解可以跑出可行区域. 解决这个问题的方法是，根据(4.1.2)和它的实际意义，我们有

$$
E(t) = \beta \int_{t-T}^{t} S(\theta)I(\theta)\mathrm{d}\theta,
$$

于是，(4.1.2)的任何一个解满足

$$
S(t) + I(t) = a - \beta \int_{t-T}^{t} S(\theta)I(\theta)\mathrm{d}\theta. \tag{4.1.3}
$$

下面证明满足这个限制条件的解是符合实际意义的.

考虑

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} &= \gamma I(t) - \beta S(t)I(t), \\
\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} &= \beta S(t-T)I(t-T) - \gamma I(t).
\end{aligned}
\tag{4.1.4}
$$

记

$$
G_a = \{(S(t),I(t)) \mid S(t)\text{ 和 }I(t)\text{ 在 }t \geqslant 0\text{ 上连续、非负，且满足(4.1.3)}\}.
$$

定理 4.1.1　设 $S_0(t), I_0(t)$ 是 $[-T,0]$ 上的连续函数，满足

$$
0 \leqslant S_0(t) \leqslant a,\ 0 \leqslant I_0(t) \leqslant a,\ t \in [-T,0],
$$

并满足

$$
S_0(0) + I_0(0) = a - \beta \int_{-T}^{0} S_0(\theta)I_0(\theta)\mathrm{d}\theta.
$$

若 $(S(t),I(t))$ 是(4.1.4)的解，满足 $(S(t),I(t)) = (S_0(t),I_0(t)), t \in [-T,0]$，则有

(1) $(S(t),I(t))$ 对所有的 $t \geqslant 0$ 存在，且满足 $0 \leqslant S(t) \leqslant a, 0 \leqslant I(t) \leqslant a$ 和(4.1.3).

(2) 若 $0 < a\beta \leqslant \gamma$，则当 $t \to \infty$ 时，$(S(t),I(t)) \to (0,a)$.

(3) 若 $0 < \gamma < a\beta$,则解 $(0,a)$ 不稳定,并且当 $t \to \infty$ 时,$(S(t),I(t)) \to (\gamma/\beta,[a\beta-\gamma]/\beta(1+\gamma T))$.

这个定理的证明需要时滞微分方程的 LaSalle 不变性原理. 为方便读者,我们先介绍相关内容. 与常微分方程不同的是,像(4.1.4) 这种时滞方程,初值应该取 $[-T,0]$ 上的连续函数. 用 C 表示 $C([-T,0],R^n)$(也就是 $[-T,0]$ 上的连续函数组成的 Banach 空间). 则 C 就是时滞方程的初值空间. 为了理论研究的需要,如讨论初值问题解的惟一性,讨论解的稳定性等,我们通常把 C 也作为时滞方程的状态空间,具体做法是,如果 $x(t)$ 是一个时滞方程的解,令 $x_t = x(t+\theta),\theta \in [-T,0]$,则 $x_t \in C$. 用这种方法,就把 R^n 中的函数 $x(t)$ 转化为 C 空间的函数 x_t.

考虑

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x_t), \tag{4.1.5}$$

这里 $f: C \to R^n$ 在 Ω 上连续,且在 C 的每一个紧子集上满足 Lipschitz 条件. 用 $x_t(\phi)$ 表示系统(4.1.5) 过 $(0,\phi)$ 的解.

如果 $V: C \to R$ 是一个连续泛函,定义 V 沿着系统(4.1.5)解的导数

$$\dot V(\phi) = \limsup_{h\to 0^+} \frac{1}{h}[V(x_h(\phi)) - V(\phi)].$$

定义 4.1.1 设 $G \subset C$. 如果 V 在区域 G 的闭包 $\bar G$ 上连续,在 G 上有 $\dot V \leqslant 0$,我们就称 V 在 G 上是(4.1.5) 的 Liapunov 泛函.

设 V 在 G 上是(4.1.5) 的 Liapunov 泛函. 记

$$B = \{\phi \in \bar G \mid \dot V(\phi) = 0\}.$$

设 M 是(4.1.5) 在 B 中的最大不变集.

定理 4.1.2[27] 如果 V 在 G 上是(4.1.5) 的 Liapunov 泛函,$x_t(\phi)$ 是(4.1.5) 的一个有界解,并且停留在 G 中,则当 $t\to\infty$ 时,$x_t(\phi) \to M$.

证明 当 $t > 0$ 时,由(4.1.4)知,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[S(t)+I(t)] = \beta[S(t-T)I(t-T) - S(t)I(t)],$$

于是,

$$\begin{aligned} S(t)+I(t) &= S(0)+I(0)+\beta\int_0^t [S(\theta-T)I(\theta-T) - S(\theta)I(\theta)]\mathrm{d}\theta \\ &= S(0)+I(0)+\beta\int_{-T}^0 S(\theta)I(\theta)\mathrm{d}\theta \\ &\quad + \beta\int_0^{t-T} S(\theta)I(\theta)\mathrm{d}\theta - \beta\int_0^t S(\theta)I(\theta)\mathrm{d}\theta \\ &= a - \beta\int_{t-T}^t S(\theta)I(\theta)\mathrm{d}\theta. \end{aligned}$$

这就验证了(4.1.3).

由(4.1.4)可得

$$I(t)=e^{-\gamma t}I(0)+\beta\int_0^t e^{\gamma(\theta-t)}S(\theta-T)I(\theta-T)d\theta,$$

$$S(t)=S(0)e^{h(t)}+\gamma\int_0^t e^{h(t)-h(\theta)}I(\theta)d\theta,$$

这里 $h(t)=-\beta\int_0^t I(\theta)d\theta$. 再由初始条件可知,$I(t)\geqslant 0, t\in[0,T]$. 上式又表明,只要 $S(t)$ 在$[0,T]$上存在,就必然有 $S(t)\geqslant 0$. 于是由 $S(t)$ 和 $I(t)$ 的非负性,从(4.1.3)可知,它们以 a 为上界. 因而它们必在$[0,T]$上存在. 然后再反复重复上面的作法,可以得知 $S(t), I(t)$ 在$[0,\infty)$上存在,且满足 $0\leqslant S_0(t)\leqslant a, 0\leqslant I_0(t)\leqslant a, t\in[-T,0]$. 这就完成了(1)的证明.

通过分析特征方程的特征根容易得知:当 $0<\gamma<a\beta$ 时,解$(0,a)$不稳定.

下面用 Liapunov 泛函方法完成其它证明. 记 $C_+=C([-T,0],R_+^2)$. 设 $(\phi_1,\phi_2)\in C_+$. 定义

$$V(\phi)=\frac{1}{2\gamma}\phi_2^2(0)+\frac{1}{2}\int_{-T}^0\phi_2^2(\theta)d\theta.$$

计算 V 沿系统(4.1.4)解的导数得

$$\dot V(\phi)=-\frac{1}{2}[\phi_2^2(0)-\frac{2\beta}{\gamma}\phi_2(0)\phi_2(-T)\phi_1(-T)+\phi_2^2(-T)].$$

如果把这个式子的右端看成是 $\phi_2(0)$ 和 $\phi_2(-T)$ 的二次型,容易看出,当 $\phi_1(-T)<\gamma/\beta$ 时,它是负定的. 注意到在我们感兴趣的范围内,有 $\phi_1(\theta)\leqslant a,\theta\in[-T,0]$, 当 $a\beta<\gamma$ 时,显然有 $\phi_1(-T)<\gamma/\beta$.

记

$$G_a^*=\{(\phi_1,\phi_2)\in C_+\mid 0\leqslant\phi_i(\theta)\leqslant a,\theta\in[-T,0],$$
$$\text{并且在 }\theta=0\text{ 处}(\phi_1,\phi_2)\text{ 满足(4.1.3)}\}.$$

由第一部分的证明知道 G_a^* 是正向不变的. 记 $B=\{\phi\in G_a^*\mid\dot V(\phi)=0\}$. 如果 $a\beta<\gamma$,由上面的讨论知 $\dot V(\phi)$ 是负定的,因而 $B=\{\phi\in G_a^*\mid\phi_2(0)=\phi_2(-T)=0\}$. 由 LaSalle 不变性原理知,当 $t\to\infty$ 时 $I(t)\to 0$. 再由(4.1.3)可知,当 $t\to\infty$ 时,$S(t)\to a$. 如果 $a\beta=\gamma$,则由上面的讨论知,B 包含在集合$\{\phi\in G_a^*\mid\phi_2(0)=\pm\phi_2(-T),\phi_1(-T)=a\}$中. 由 ϕ_i 的非负性和(4.1.3)知 $\phi_2(0)=0$. 于是由 LaSalle 不变性原理和(4.1.3)得知,当 $t\to\infty$ 时$(S(t),I(t))\to(a,0)$.

现在设 $a\beta>\gamma$. G_a^* 的含义同上. 定义 Liapunov 泛函

$$V(\phi)=\frac{1}{2}[\phi_1(0)-\frac{\gamma}{\beta}]^2.$$

计算 V 沿系统(4.1.4)解的导数得

$$\dot{V}(\phi) = [\phi_1(0) - \frac{\gamma}{\beta}]\dot{\phi}_1(0) = -\beta[\phi_1(0) - \frac{\gamma}{\beta}]^2\phi_2(0).$$

当 $\phi \in G_a^*$ 时,显然有 $\dot{V}(\phi) \leqslant 0$. 由不变性原理,当 $t \to \infty$ 时,解 $(S(t), I(t))$ 趋向于集合 $\{\phi \in G_a^* \mid \dot{V}(\phi) = 0\}$. 由于 $\dot{V}(\phi) = 0$ 意味着 $\phi_2(0) = 0$ 或 $\phi_1(0) = \gamma/\beta$. 因此,当 $t \to \infty$ 时,$I(t) \to 0$ 或 $S(t) \to \gamma/\beta$.

现在设 $t \to \infty$ 时 $I(t) \to 0$. 则由(4.1.3)知,当 $t \to \infty$ 时,$S(t) \to a$. 注意到 $a\beta > \gamma$. 从(4.1.4)的第一个方程知,存在 $t^* > 0$,使得 $S'(t) \leqslant 0, t \geqslant t^*$. 这说明当 $t \geqslant t^*$ 时,$S(t)$ 单调不增. 由于 $0 \leqslant S(t) \leqslant a$ 以及 $t \to \infty$ 时 $S(t) \to a$,我们有 $S(t) \equiv a, t \geqslant t^*$. 因此,当 $t \geqslant t^*$ 时,$0 = S' = (\gamma - a\beta)I(t)$. 因而,当 $t \geqslant t^*$ 时,$I(t) \equiv 0$. 再由(4.1.4)的第二个方程得,$0 = I'(t) = \beta S(t - T)I(t - T), t \geqslant t^*$. 利用这一点和 $S(t)$ 的连续性得知,存在 $\eta > 0$,使得 $S(t) > 0, I(t) = 0, t \in [t^* - \eta, \infty)$. 注意到 $S' = (\gamma - \beta S(t))I(t) = 0, t \in [t^* - \eta, \infty)$. 我们有 $S(t) \equiv a, t \in [t^* - \eta, \infty)$. 令 $\eta^* \leqslant t^*$ 是所有这种 η 的上确界. 我们断言 $\eta^* = t^*$. 即 $I(t) \equiv 0, t \geqslant 0$. 事实上,如果 $\eta^* < t^*$,利用连续性得知,$I(\eta^*) = 0, S(\eta^*) = a$. 再重复上面的作法知,存在 $\eta_1 > 0$,使得 $I(t) = 0, S(t) = a, t \in [t^* - \eta^* - \eta_1, \infty)$. 矛盾.

从上面的讨论知道,如果 $(S(t), I(t)) \not\equiv (a, 0)$,当 $t \to \infty$ 时,就有 $S(t) \to \gamma/\beta$. 现在证明在此情形下,$I(t) \to I^0 \triangleq (a\beta - \gamma)/\beta(1 + \gamma T)$. 从 $t - T$ 到 t 对(4.1.4)的第一个方程作积分得

$$S(t) + \beta\int_{t-T}^{t} S(\theta)I(\theta)\mathrm{d}\theta = S(t - T) + \gamma\int_{t-T}^{t} I(\theta)\mathrm{d}\theta.$$

由这个式子和(4.1.3)得

$$I(t) + \gamma\int_{t-T}^{t} I(\theta)\mathrm{d}\theta = a - S(t - T). \tag{4.1.6}$$

定义线性差分算子 $D: C \to R$ 为 $Df = f(0) + \gamma\int_{-T}^{0} f(\theta)\mathrm{d}\theta$. 则上式可写为 $DI_t = a - S(t - T)$.

让 $\bar{t}$ 是一个固定的实数. 记

$$h^*(t) = \frac{\gamma}{\beta} - S(t + \bar{t} - T), \quad u^*(t) = I(t + \bar{t}) - I^0.$$

由于 $I^0 = (a\beta - \gamma)/\beta(1 + \gamma T)$,利用(4.1.6)可得

$$Du_t^* = h^*(t).$$

由文献[21](12.3 节)可知,D 的特征方程为

$$1 + \frac{\gamma}{\lambda}(1 - \mathrm{e}^{-\lambda T}) = 0.$$

由于 $\gamma T > 0 \neq -1$，$\lambda = 0$ 不是一个特征根. 很容易看出所有特征根的实部满足 $\operatorname{Re}\lambda < 0$. 因此，存在 $\delta > 0$，使得所有的特征根满足 $Re\,\lambda \leqslant \delta < 0$. 再由专著[21]第 287 页的定理 4.1，存在正常数 α_1, α_2（与 h^* 无关），使得

$$|u_t^*| \leqslant \alpha_2 e^{-\alpha_1 t}|u_0^*| + \alpha_2 \sup_{0\leqslant\theta\leqslant t}|h^*(\theta)|.$$

于是，当 $t^* \to \infty$ 时，

$$\limsup_{t\to\infty}|I(t) - I^0| = \limsup_{t\to\infty}|I(t+\bar{t}) - I^0| = \limsup_{t\to\infty}|u^*(t)|$$
$$\leqslant \alpha_2 \sup_{0\leqslant t}|h^*(t)| = \alpha_2 \sup_{t^*\leqslant t}\left|S(t-T) - \frac{\gamma}{\beta}\right| \to 0.$$

从而，当 $t \to \infty$ 时，$I(t) \to I^0$. ▌

从前面几章的讨论知道，没有时滞时，模型的阈值为 $R_0 = \beta a/\gamma$. 当 $R_0 < 1$ 时疾病消失，当 $R_0 > 1$ 时地方病平衡点全局稳定. 从定理 4.1.1 知道，引入疾病潜伏期时滞后，模型的阈值不变，时滞的主要作用是降低了地方病平衡态的幅度.

4.1.2　出生率与死亡率相等的 SEIRS 模型

我们现在开始考虑在疾病传播过程中种群出生与死亡不能被忽略的情形，但将假设种群的出生率和死亡率是相同的. 在这个假设下，种群的总规模可以认为是不变的，这使得数学研究得以简化.

Cooke 和 van den Driessche[11] 提出了一类含有两个时滞的 **SEIRS** 模型. 通过忽略因病死亡率，文献[11]中的模型变为

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} &= bN(t) - bS(t) - \frac{\lambda S(t)I(t)}{N(t)} + \gamma I(t-\tau)e^{-b\tau},\\
E(t) &= \int_{t-\omega}^{t} \frac{\lambda S(u)I(u)}{N(u)} e^{-b(t-u)}du,\\
\frac{dI}{dt} &= \frac{\lambda S(t-\omega)I(t-\omega)}{N(t-\omega)} e^{-b\omega} - (b+\gamma)I(t),\\
R(t) &= \int_{t-\tau}^{t} \gamma I(u) e^{-b(t-u)}du,
\end{aligned}\tag{4.1.7}$$

其中 ω 是疾病的潜伏期，τ 是恢复者对疾病的免疫期.

由于种群规模 N 是一个常数，如果令

$$s(t) = \frac{S(t)}{N(t)},\qquad e(t) = \frac{E(t)}{N(t)},$$
$$i(t) = \frac{I(t)}{N(t)},\qquad r(t) = \frac{R(t)}{N(t)},$$

则有

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} &= b - bs(t) - \lambda s(t)i(t) + \gamma i(t-\tau)\mathrm{e}^{-b\tau}, \\
e(t) &= \int_{t-\omega}^{t} \lambda s(u)i(u)\mathrm{e}^{-b(t-u)}\mathrm{d}u, \\
\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} &= \lambda s(t-\omega)i(t-\omega)\mathrm{e}^{-b\omega} - (b+\gamma)i(t), \\
r(t) &= \int_{t-\tau}^{t} \gamma i(u)\mathrm{e}^{-b(t-u)}\mathrm{d}u.
\end{aligned}
\tag{4.1.8}
$$

由于第一个方程和第三个方程可以从(4.1.8)中分离出来,我们只需考虑

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} &= b - bs(t) - \lambda s(t)i(t) + \beta i(t-\tau), \\
\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} &= \lambda \alpha s(t-\omega)i(t-\omega) - (b+\gamma)i(t),
\end{aligned}
\tag{4.1.9}
$$

其中 $\alpha = \exp(-b\omega)$ 和 $\beta = \gamma\mathrm{e}^{-b\tau}$.

由于这个模型含有两个时滞,研究地方病平衡点的稳定性变得比较困难.我们转而研究疾病传播与消失的阈值.注意到 s 是易感者的比例,i 是感染者的比例,$e(t)$ 是潜伏者的比例.而种群被划分为易感者、潜伏者和感染者三部分,因此有 $s(t)+e(t)+i(t)\equiv 1$.设 $T=\max\{\omega,\tau\}$,并设

$$D \triangleq \{(\phi_1,\phi_2) \mid 0 \leqslant \phi_i(\theta) \leqslant 1, \theta\in[-T,0], i=1,2\}.$$

利用 $s(t)+e(t)+i(t)\equiv 1$,我们容易知道 D 对(4.1.9) 来说是正不变的.

现在考虑无病平衡点(1,0) 的全局稳定性.记 $R_0 = \lambda\alpha/(\gamma+b)$.文献[47]得到了下面的结果

定理 4.1.3 如果 $R_0 \leqslant 1$,则无病平衡点(1,0) 是全局稳定的.

证明 注意到(4.1.9) 的第二个方程可以写为

$$
\begin{aligned}
i' &= \lambda\alpha s(t)i(t) - (\gamma+b)i(t) + \lambda\alpha[s(t-\omega)i(t-\omega) - s(t)i(t)] \\
&= i(t)[\lambda\alpha s(t) - (\gamma+b)] - \lambda\alpha \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{t-\omega}^{t} s(u)i(u)\mathrm{d}u.
\end{aligned}
\tag{4.1.10}
$$

设 $x_t = (s(t+\theta), i(t+\theta)), \theta\in[-T,0]$.定义

$$V_0(x_t) = i(t) + \lambda\alpha\int_{t-\omega}^{t} s(\theta)i(\theta)\mathrm{d}\theta.$$

计算 V_0 沿(4.1.9)解的导数,得

$$V'_0(x_t) = i(t)[\lambda\alpha s(t) - (\gamma+b)] = (\gamma+b)i(t)[R_0 s(t) - 1].$$

定义 $K = \{\phi\in D \mid \dot V_0(\phi) = 0\}$.设 M 是K 中的最大不变集.如果 $R_0 < 1$,由于 $s(t)\leqslant 1$,我们有

$$V'_0(x_t) \leqslant (\gamma+b)(R_0-1)i(t) \leqslant 0.$$

由(4.1.9)得 $M=(1,0)$. 如果 $R_0=1$,我们有

$$V'_0(x_t)=(\gamma+b)i(t)[s(t)-1].$$

再由 $s(t)+e(t)+i(t)\equiv 1$ 得知 $M=(1,0)$. 从而由[21]中的定理 3.1(143 页)或[27]的定理 5.3(30 页)知无病平衡点在 D 中是全局稳定的. ▌

现在考虑 $R_0>1$ 的情形.

定理 4.1.4　设 $R_0>1$. 则存在一个正常数 ε,使得当 t 充分大时,(4.1.9)的正解$(s(t),i(t))$满足 $i(t)\geqslant\varepsilon$.

证明　考虑(4.1.9)的正解$(s(t),i(t))$. 定义

$$V_1(t)=i(t)+\lambda\alpha\int_{t-\omega}^{t}s(\theta)i(\theta)\mathrm{d}\theta.$$

计算 V_1 沿(4.1.9)解的导数,得

$$V'_1(t)=i(t)[\lambda\alpha s(t)-(\gamma+b)]=(\gamma+b)i(t)(R_0s(t)-1).\tag{4.1.11}$$

由于 $R_0>1$,我们有 $I_1\equiv\frac{bR_0}{\lambda}(1-\frac{1}{R_0})>0$. 我们断言对任给的 $t_0>0$,不可能有 $i(t)\leqslant I_1/2,\forall t\geqslant t_0$. 如果此断言不成立. 则存在一个 $t_0>0$,使得 $i(t)\leqslant I_1/2,\forall t\geqslant t_0$. 由(4.1.9)第一个方程知当 $t\geqslant t_0$ 时,

$$s'(t)>b-(\lambda I_1/2+b)s(t).$$

因此

$$\begin{aligned}s(t)&>\mathrm{e}^{-(\lambda I_1/2+b)(t-t_0)}[s(t_0)+b\int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{(\lambda I_1/2+b)(\theta-t_0)}\mathrm{d}\theta]\\&>\frac{b}{\lambda I_1/2+b}(1-\mathrm{e}^{-(\lambda I_1/2+b)(t-t_0)}),\end{aligned}\tag{4.1.12}$$

其中 $0<s(t_0)$ 被用到. 由于$\frac{b}{\lambda I_1/2+b}=\frac{2}{R_0+1}$,我们有

$$s(t)>\frac{2}{R_0+1}(1-\mathrm{e}^{-(\lambda I_1/2+b)(t-t_0)}).\tag{4.1.13}$$

选择 $T_1>0$ 使得

$$\frac{1}{4}(1-\frac{1}{R_0})=\mathrm{e}^{-(\lambda I_1/2+b)T_1},\tag{4.1.14}$$

则(4.1.13)蕴涵着

$$s(t)>\frac{3R_0+1}{2R_0(R_0+1)}\triangleq\overline{R},\qquad 对于\ t\geqslant t_0+T_1.\tag{4.1.15}$$

容易推出 $\overline{R}>\frac{1}{R_0}$. 因此由(4.1.11)得

$$V'_1(t)>(\gamma+b)i(t)(\overline{R}R_0-1),\qquad 对于\ t\geqslant t_0+T_1.\tag{4.1.16}$$

设

$$\underline{i} = \min_{\theta \in [-\omega, 0]} i(t_0 + T_1 + \omega + \theta).$$

我们要证明 $i(t) \geqslant \underline{i}, \forall t \geqslant t_0 + T_1$. 若不成立,则存在一个 $T_2 \geqslant 0$,使得 $i(t) \geqslant \underline{i}$,对于 $t_0 + T_1 \leqslant t \leqslant t_0 + T_1 + \omega + T_2$;并且有

$$i(t_0 + T_1 + \omega + T_2) = \underline{i},$$

$$i'(t_0 + T_1 + \omega + T_2) \leqslant 0.$$

然而,(4.1.9)的第二个方程和(4.1.15)蕴涵着当 $t = t_0 + T_1 + \omega + T_2$ 时,

$$\begin{aligned} i'(t) &\geqslant [\lambda \alpha s(t - \omega) - (\gamma + b)] \underline{i} \\ &> (\gamma + b)[R_0 \overline{R} - 1] \underline{i} > 0. \end{aligned}$$

这是一个矛盾. 因此, $i(t) \geqslant \underline{i}, \forall t \geqslant t_0 + T_1$. 结合(4.1.16)可得

$$V'_1(t) > (\gamma + b) \underline{i}(R_0 \overline{R} - 1), \quad 对于 t \geqslant t_0 + T_1.$$

由此知当 $t \to \infty$ 时, $V_1(t) \to \infty$. 这和 $V_1(t) \leqslant 1 + \lambda \alpha \omega$ 相矛盾. 断言得证.

根据这个断言,我们只需考虑两种情形. 第一,对于所有充分大的 t, $i(t) \geqslant I_1/2$. 第二,当 t 充分大时, $i(t)$ 关于 $I_1/2$ 振动. 定义

$$I_2 = \frac{I_1}{2} e^{-(\gamma + b)(T_1 + \omega)}. \tag{4.1.17}$$

我们希望证明对所有充分的大 t, $i(t) \geqslant I_2$. 对第一种情形,这个结论是显然的. 对第二种情形,让 t_1 和 t_2 满足

$$i(t_1) = i(t_2) = I_1/2,$$

$$i(t) < I_1/2 \quad 对于 \quad t_1 < t < t_2.$$

如果 $t_2 - t_1 \leqslant T_1 + \omega$,由于 $i'(t) > -(\gamma + b) i(t)$ 和 $i(t_1) = I_1/2$,显然有 $i(t) \geqslant I_2$,对于 $t_1 < t < t_2$. 如果 $t_2 - t_1 \geqslant T_1 + \omega$,由(4.1.9)的第二个方程得 $i(t) \geqslant I_2, \forall t \in [t_1, t_1 + T_1 + \omega]$. 再使用断言的证明方法可以得出 $i(t) \geqslant I_2$,对于 $t_1 + T_1 + \omega \leqslant t \leqslant t_2$. 从而 $i(t) \geqslant I_2$,对于 $t \in [t_1, t_2]$. 由于这种区间是以任意方式选出的(我们只需 t_1 和 t_2 足够大),我们断言对第二种情形,只要 t 充分大,就有 $i(t) \geqslant I_2$. 从上面的讨论可知, T_1 和 I_2 与正解的选择无关. 因此,我们证明了对(4.1.9)的任何一个正解,当 t 充分大时,有 $i(t) \geqslant I_2$. ▮

定理4.1.3和定理4.1.4表明 R_0 是阈值. 如果 $R_0 \leqslant 1$,疾病将会消失. 如果 $R_0 > 1$,疾病将是一致持续生存的. 从定理4.1.4的证明知,我们实际上还得到了估计感染者比例的最终下界的计算公式.

例 如果 $b = 0.2, \gamma = 0.4, \lambda = 8, \omega = 1$,则 $\alpha = \exp(-b\omega) = 0.8187307531, R_0 = 10.91641004$,由(4.1.14)得 $T_1 = 1.243974114$,再由(4.1.17)得 $I_2 = 0.03225055142$,因此当 t 充分大时,感染者的比例至少是

0.03225055142.

注意到较大的 γ,或较大的 b,或较大的 ω 蕴涵着 $R_0<1$.因此当 γ,b,ω 有一个较大时疾病将消失.这意味着只有当 γ,b,ω 都较小时,疾病才可能一致持续生存.

从定理4.1.3和定理4.1.4知道,$R_0=1$ 是区分疾病是否流行的阈值.由于 $R_0=\lambda\alpha/(\gamma+b)$,我们看到种群出生率系数和死亡率系数 b 降低了疾病流行的阈值.

§4.2 种群规模变动的传染病模型

当疾病的流行期较长时,或者疾病有着较强的因病死亡时,种群的规模会发生较大的变化,而种群规模的变动对疾病的传播会带来深刻的影响.这时,疾病流行的阈值可能会由一个变成多个,疾病传播的过程与种群繁衍过程的相互作用也会产生新的动力学性态.

Hethcote 和 van den Driessche 在文献[25]提出了两个种群规模变动的带时滞的传染病模型,下面分别介绍.

4.2.1 具有因病死亡率的 SIS 模型

考虑 *SIS* 类型的传染病模型,种群在时刻 t 的规模用 N(t)表示,设新生的成员均为易感者,种群的输入速率为常数 A,自然死亡率为常数 d,因病死亡率为 ε,不考虑因病死亡率时种群的动力学方程为 $N'=A-dN$.我们采用标准疾病发生率,并用 P(t)表示感染者受感染后经 t 单位时间仍是易感者的比例.

设 P(t)是非负的、非增的、分段连续的,并满足

$$P(0+)=1,\ \int_0^\infty P(u)du=\omega.$$

又设平均感染期满足 $0<\omega<\infty$.则模型的转移框图为4.1.

当 $t\geqslant 0$ 时,感染者的数量 I(t)满足积分方程

$$I(t)=I_0(t)+\int_0^t\lambda\left[(N(u)-I(u))\frac{I(u)}{N(u)}\right]P(t-u)e^{-(d+\varepsilon)(t-u)}du, \tag{4.2.1}$$

A
S
λSI/N
P(t)
I
dS
(d+ε)I

图4.1 疾病转移过程图

这里用到了 $S = N - I$,而 $I_0(t)$ 是 $t = 0$ 时的感染者在时刻 t 仍是感染者的数量. 根据上面的假设和转移框图可以知道种群规模 N 满足

$$N'(t) = A - dN(t) - \varepsilon I(t). \tag{4.2.2}$$

分布函数 P 有两种重要的特殊情形:指数分布和阶梯分布. 如果是指数分布,则模型可以转化成常微分方程组. 下面着重考虑阶梯分布. 设每个易感者具有感染期 ω;$P(t) = 1, t \in [0,\omega]$;并且 $P(t) = 0, t \in (\omega,\infty)$. 注意到易感者经过时间 ω 后已经变成恢复者,因而当 $t \geqslant \omega$ 时 $I_0(t) = 0$. 在这种情形下,积分方程(4.2.1) 变为

$$I(t) = \int_{t-\omega}^{t} \lambda\left[(N(u) - I(u))\frac{I(u)}{N(u)}\right]e^{-(d+\varepsilon)(t-u)}du, \qquad t \geqslant \omega. \tag{4.2.3}$$

容易知道(4.2.3)和(4.2.2)等价于下面的时滞微分方程模型

$$\begin{aligned} I'(t) &= \lambda\left(1 - \frac{I(t)}{N(t)}\right)I(t) - \lambda\alpha\left(1 - \frac{I(t-\omega)}{N(t-\omega)}\right)I(t-\omega) \\ &\quad - (d+\varepsilon)I(t), \\ N'(t) &= A - dN(t) - \varepsilon I(t), \end{aligned} \tag{4.2.4}$$

其中 $\alpha = \exp(-(d+\varepsilon)\omega)$.

定义

$$R_0 = \lambda\frac{1-\alpha}{d+\varepsilon}.$$

如果 $R_0 \leqslant 1$,则(4.2.4) 只有无病平衡点$(0, A/d)$. 文献[25]进一步证明了此时无病平衡点是全局稳定的. 当 $R_0 > 1$ 时,则(4.2.4) 还存在惟一的地方病平衡点. 下面证明 $R_0 > 1$ 蕴涵着疾病是一致持续生存的. 由于生物背景,下面我们只考虑(4.2.4) 的正解. 设 $M_1 = A/d, M_2 = A/(d+\varepsilon)$. 注意到 $0 < I(t) \leqslant N(t)$, 我们有

$$A - (d+\varepsilon)N \leqslant N' < A - dN,$$

由此得, $M_2 \leqslant \liminf\limits_{t\to\infty} N(t) \leqslant \limsup\limits_{t\to\infty} N(t) \leqslant M_1$.

设 $I_1 = (1 - 1/R_0)M_2$. 固定 $0 < \eta < I_1$,易知 $R_0\left(1 - \frac{I_1 - \eta/2}{M_2}\right) > 1$. 又设 $(I(t), N(t))$ 是(4.2.4) 的一个正解. 则有下面的结果.

引理4.2.1[48] 设 $R_0 > 1$,则对任意的 $t_0 > 0$,不可能对所有的 $t \geqslant t_0$,始终有 $I(t) < I_1 - \eta$.

证明 设引理4.2.1的结论不成立,则存在一个 $t_0 > 0$ 和一个 $t_1 \geqslant t_0 + \omega$,使得当 $t \geqslant t_1 - \omega$ 时,有

$$I(t) < I_1 - \eta, \qquad 并且 \frac{I(t)}{N(t)} \leqslant \frac{I_1 - \eta/2}{M_2}.$$

再由(4.2.3)知道对所有的 $t \geqslant t_1$,有

$$I(t) \geqslant \lambda \int_{t-\omega}^{t} \left(1 - \frac{I_1 - \eta/2}{M_2}\right) I(u) e^{-(d+\varepsilon)(t-u)} du.$$

设 $I_l = \min_{t \in [t_1, t_1+\omega]} I(t)$. 我们断言 $I(t) \geqslant I_l, \forall t \geqslant t_1$. 如果断言不成立,则存在一个 $t_2 \geqslant t_1 + \omega$,使得对 $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$,我们有 $I(t_2) = I_l$ 且 $I(t) \geqslant I(t_2)$. 由此得

$$I(t_2) > \lambda \left(1 - \frac{I_1 - \eta/2}{M_2}\right) I(t_2)(1 - \alpha)/(d + \varepsilon) = R_0 \left(1 - \frac{I_1 - \eta/2}{M_2}\right) I(t_2).$$

从而 $R_0\left(1 - \frac{I_1 - \eta/2}{M_2}\right) < 1$. 这与 $R_0\left(1 - \frac{I_1 - \eta/2}{M_2}\right) > 1$ 相矛盾. 上面的断言得证.

选择常数 R_1 使得 $1 < R_1 < R_0\left(1 - \frac{I_1 - \eta/2}{M_2}\right)$. 现在我们断言 $I(t) > I_l R_1, \forall t \geqslant t_1 + \omega$. 注意

$$I(t_1 + \omega) \geqslant \lambda \left(1 - \frac{I_1 - \eta/2}{M_2}\right) \int_{t_1}^{t_1+\omega} I_l e^{-(d+\varepsilon)(t_1+\omega-u)} du > I_l R_1.$$

如果断言不成立,则存在一个 $t_3 > t_1 + \omega$,使得当 $t_1 + \omega \leqslant t \leqslant t_3$ 时,我们有 $I(t_3) = I_l R_1$,并且 $I(t) \geqslant I_l R_1$. 另一方面,当 $t_1 + \omega \leqslant t \leqslant t_3$ 时,

$$I(t) \geqslant \lambda \left(1 - \frac{I_1 - \eta/2}{M_2}\right) \int_{t-\omega}^{t} I_l e^{-(d+\varepsilon)(t-u)} du = R_0 I_l \left(1 - \frac{I_1 - \eta/2}{M_2}\right) > I_l R_1,$$

因此 $I(t_3) > I_l R_1$,我们得到一个矛盾. 这就证明了断言. 然后用归纳法知 $I(t) \geqslant I_l R_1^k, \forall t \geqslant t_1 + k\omega$. 由此知 t 充分大时, $I(t) \geqslant I_1 - \eta$. 这与 $I(t) \leqslant I_1 - \eta$, $\forall t \geqslant t_1$,相矛盾. ▌

定理 4.2.1[48]　设 $R_0 > 1$. 则存在一个正常数 p,使得(4.2.4)的任何一个正解满足 $\liminf_{t\to\infty} I(t) > p$.

证明　设 $I(t^*) = I(t^* + q) = I_1 - \eta$. 当 $t^* \leqslant t \leqslant t^* + q$ 时,我们有 $I(t) \leqslant I_1 - \eta$,其中 t^* 充分大使得

$$\frac{I(t)}{N(t)} \leqslant \frac{I_1 - \eta/2}{M_2}, \qquad \text{对于} \quad t^* \leqslant t \leqslant t^* + q.$$

由于(4.2.4)的正解是最终有界的,容易得知 $I(t)$ 是一致连续的. 因而存在一个 $0 < \tau < \omega$(与 t^* 的选择无关),使得对所有的 $t^* < t \leqslant t^* + \tau$,有 $I(t) \geqslant (I_1 - \eta)/2$. 如果 $q \leqslant \tau$,这是我们所希望的. 现在考虑 $\tau < q \leqslant \omega$. 对于 $t^* + \tau < t \leqslant t^* + q$,我们有

$$
\begin{aligned}
I(t) &= \lambda \int_{t-\omega}^{t} (1 - I(u)/N(u)) I(u) e^{-(d+\varepsilon)(t-u)} du \\
&\geqslant \lambda \int_{t^*}^{t^*+\tau} (1 - I(u)/N(u)) I(u) e^{-(d+\varepsilon)(t-u)} du \\
&> \lambda \left(1 - \frac{I_1 - \eta/2}{M_2}\right) \frac{I_1 - \eta}{2} \alpha\tau \triangleq p_1.
\end{aligned}
$$

定义 $p = \min((I_1 - \eta)/2, p_1)$. 易知对 $t^* \leqslant t \leqslant t^* + q, I(t) \geqslant p$. 如果 $q > \omega$,通过类似于引理 4.2.1 的证明可得知,当 $t^* \leqslant t \leqslant t^* + q$ 时,$I(t) \geqslant p$.

根据引理 4.2.1,对于(4.2.4) 的正解$(I(t), N(t))$,我们应该考虑两种情形. 第一,当 t 充分大时,始终有 $I(t) \geqslant I_1 - \eta$. 第二,当 t 充分大时$I(t)$ 关于 $I_1 - \eta$ 振动. 对第一种情形,有$\liminf\limits_{t\to\infty} I(t) > p$. 这是我们希望的. 对第二种情形,上面的论证表明当 t 充分大时$I(t)$ 的极小值比 p 大. 由于 p 与正解的选择无关,定理 4.2.1 得证. ▌

4.2.2　具有因病死亡率和一般种群动力方程的传染病模型

现在假设没有因病死亡率时种群规模服从下面的动力学方程

$$N' = [B(N) - D(N)]N,$$

这里 $B(N)$ 是种群的出生率,$D(N)$ 是种群的死亡率,它们都与种群的规模有关. 我们设 $B(N) - D(N)$ 在$[0,K]$上是严格减函数,$B(K) - D(K) = 0$,并且当 $N > K$ 时$B(N) - D(N) < 0$.

和上一小节的讨论相类似,可以得知在一些基本假设之下,感染者 $I(t)$ 和种群规模 $N(t)$ 满足

$$
\begin{aligned}
&I(t) = I_0(t) + \int_0^t \lambda \left[(N(u) - I(u)) \frac{I(u)}{N(u)} \right] P(t-u) e^{-\int_u^t [\varepsilon + D(N(p))] dp} du, \\
&N'(t) = [B(N) - D(N)]N - \varepsilon I(t).
\end{aligned}
$$

为讨论方便,我们考虑易感者和感染者的比例函数 $s(t) = S(t)/N(t), i(t) = I(t)/N(t)$. 在这些记号下,上面的模型变为

$$
\begin{aligned}
i(t) &= i_0(t) + \int_0^t \lambda [1 - i(u)] i(u) P(t-u) \\
&\quad \cdot \exp\left[-\int_u^t [\varepsilon(1 - i(p)) + B(N(p))] dp \right] du, \qquad (4.2.5) \\
N'(t) &= [B(N(t)) - D(N(t)) - \varepsilon i(t)] N(t).
\end{aligned}
$$

现在把分布函数 P 取为阶梯函数. 当 $t \geqslant \omega$ 时,则有

$$i(t) = \int_{t-\omega}^t \lambda [1 - i(u)] i(u)$$

$$\cdot \exp\left[-\int_u^t [\varepsilon(1-i(p)) + B(N(p))] dp \right] du, \tag{4.2.6}$$

$$N'(t) = [B(N(t)) - D(N(t)) - \varepsilon i(t)] N(t).$$

定义

$$R_{0N} = \lambda \frac{1 - e^{-(\varepsilon + D(N))\omega}}{\varepsilon + D(N)},$$

$$\widetilde{R}_{0N} = \lambda \frac{1 - e^{-(\varepsilon + B(N))\omega}}{\varepsilon + B(N)},$$

$$\psi_0 = \frac{B(0) - D(0)}{\varepsilon} + \frac{1}{R_{00}}.$$

容易知道 $P_1 = (0,0)$ 和 $P_2 = (0,K)$ 是系统(4.2.6)的平衡点. 除此之外，系统(4.2.6)还可能有绝灭平衡点和地方病平衡点.

定理 4.2.2[11]　系统(4.2.6)有绝灭平衡点 $P_3 = (i_3, 0), i_3 > 0$ 的充要条件是 $\widetilde{R}_{00} > 1$. 系统(4.2.6)有地方病平衡点的充要条件是 $\widetilde{R}_{0K} > 1$ 和 $\psi_0 > 1$.

对模型(4.2.6)来说，有趣的是因病死亡可能导致种群走向绝灭. 但模型的其它动力学性态我们知道的还很少，甚至无病平衡点的全局稳定条件都不完全清楚.

§4.3　带时滞的肺结核模型

肺结核是由结核分枝杆菌引起的慢性传染病，结核菌侵入人体后长期潜伏，细菌与人体抵抗力之间的较量互有消长，在机体抵抗力降低时或二次感染时发病. 因此，肺结核的潜伏期特征较为明显. Feng, Huang 和 Castillo-Chavez[16] 把分布时滞引入到带治疗的肺结核模型. 首先考虑不带时滞的模型

$$\frac{dS}{dt} = \Lambda - \beta c S \frac{I}{N} - \mu S + r_1 E + r_2 I,$$

$$\frac{dE}{dt} = \beta c S \frac{I}{N} - (\mu + k + r_1) E,$$

$$\frac{dI}{dt} = kE - (\mu + d + r_2) I,$$

$$N = S + E + I,$$

这里 S, E, I 分别代表易感者、处于潜伏期者、感染者的数量，Λ 是种群的补充率，c 是接触率，β 是每个感染者对易感者的接触效率，μ 是自然死亡率，d 是因病死亡率，k 是由潜伏类到感染类的转移速率，r_1 是潜伏者离开潜伏类返回到易感类的速率，r_2 是感染类的治愈率，设患者治愈后进入易感类.

现在把从 E 类到 I 类的转移速率 k 修改为可变函数. 用 $p(s)$ 表示在忽略潜

伏者的死亡和恢复的前提下,在时刻 t 进入潜伏类的个体经过 s 时间单位后仍在潜伏类的概率.则 $-p'(\tau)$ 是潜伏者进入 E 类 τ 时间单位后从 E 类向 I 类的转移率.

设

$$p(s)\geqslant 0,\quad p'(s)\leqslant 0,\quad p(0)=1$$

以及

$$\int_0^{\infty} p(s)\mathrm{d}s<\infty,\qquad -p'(s)\ \text{连续有上界}.$$

记 $\sigma=\beta c$.则在0到 t 时间段内进入潜伏类且在时刻 t 仍在潜伏类的成员的数量为

$$\int_0^t \sigma S(s)\frac{I(s)}{N(s)}p(t-s)\mathrm{e}^{-(\mu+r_1)(t-s)}\mathrm{d}s.$$

在0到 t 时间段内进入 I 类的个体在时刻 t 仍在 I 类的总数量为

$$I_e(t)=\int_0^t\int_0^{\tau}\sigma S(s)\frac{I(s)}{N(s)}\mathrm{e}^{-(\mu+r_1)(\tau-s)}[-p'(\tau-s)\mathrm{e}^{-(\mu+r_2+d)(t-\tau)}]\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau.$$

于是,得到下面的模型

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=\Lambda-\sigma S\frac{I}{N}-\mu S+r_1E+r_2I,\\
&E(t)=E_0(t)+\int_0^t\sigma S(s)\frac{I(s)}{N(s)}p(t-s)\mathrm{e}^{-(\mu+r_1)(t-s)}\mathrm{d}s,\\
&I(t)=I_0\mathrm{e}^{-(\mu+r_2+d)t}+I_e(t),\\
&N=S+E+I,
\end{aligned}\tag{4.3.1}$$

这里 $I_0=I(0)$,$E_0(t)$ 表示这样一些潜伏者的数量,他们在 $t=0$ 时在 E 类,并且在时刻 t 还在 E 类.设 $E_0(t)$ 具有紧支撑,即当 t 较大时 $E_0(t)=0$.

通过交换积分次序可以得到

$$I_e(t)=\int_0^t\int_s^t\sigma S(s)\frac{I(s)}{N(s)}\mathrm{e}^{-(\mu+r_1)(\tau-s)}[-p'(\tau-s)\mathrm{e}^{-(\mu+r_2+d)(t-\tau)}]\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s.$$

注意到

$$\begin{aligned}
&\int_s^t\mathrm{e}^{-(\mu+r_1)(\tau-s)}[-p'(\tau-s)\mathrm{e}^{-(\mu+r_2+d)(t-\tau)}]\mathrm{d}\tau\\
&=-\mathrm{e}^{-(\mu+r_2+d)(t-s)}\int_0^{t-s}p'(u)\mathrm{e}^{(r_2+d-r_1)u}\mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

我们可以把上式右边用函数 $a(t-s)$ 来表示.又记 $B(t)=\sigma S(t)I(t)/N(t)$.从而(4.3.1)可以重写为

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \Lambda - B(t) - \mu S + r_1 E + r_2 I,$$

$$E(t) = E_0(t) + \int_0^t B(s)p(t-s)\mathrm{e}^{-(\mu+r_1)(t-s)}\mathrm{d}s, \tag{4.3.2}$$

$$I(t) = I_0\mathrm{e}^{-(\mu+r_2+d)t} + \int_0^t a(t-s)B(s)\mathrm{d}s.$$

利用 *Miller*[32] 的结果可以讨论模型(4.3.2)解的存在性、惟一性和解对参数的连续依赖性.

定义

$$R_0 = \sigma\int_0^\infty a(\tau)\mathrm{d}\tau \triangleq \sigma D_I,$$

$$D_E = \int_0^\infty p(s)\mathrm{e}^{-(\mu+r_1)s}\mathrm{d}s,$$

D_E 表示考虑死亡因素后的平均潜伏期.由定义容易推出 D_I 和D_E 满足下面的关系式

$$D_I = \frac{1}{\mu+r_2+d}(1-(\mu+r_1)D_E). \tag{4.3.3}$$

记 $E_0=(S_0,E_0,I_0)=(\Lambda/\mu,0,0)$.下面证明 $R_0<1$ 时 E_0 吸引(4.3.2)的每一个正解,即疾病将消失.首先介绍很有用的波动引理.

设 f 是一个有界实函数,记

$$f_\infty = \liminf_{t\to\infty} f(t),\quad f^\infty = \limsup_{t\to\infty} f(t).$$

引理 4.3.1[44]　设 $f:[0,\infty)\to R$ 是一个有界函数,并且具有有界的二阶导数.又设 $n\to\infty$ 时 $t_n\to\infty$.如果当 $n\to\infty$ 时,$f(t_n)\to f_\infty$ 或者 $f(t_n)\to f^\infty$,则有

$$f'(t_n)\to 0,\quad n\to\infty.$$

有了波动引理,我们就可以证明下面的定理.

定理 4.3.1　设 $R_0<1$,则(4.3.2)的每一个正解$(S(t),E(t),I(t))$满足

$$\lim_{t\to\infty}(S(t),E(t),I(t)) = E_0.$$

证明　对模型(4.3.2)关于 E 和 I 的方程求导,注意到 $E_0(t)$ 有紧的支撑,对充分大的 t,我们有

$$E'(t) = B(t) + \int_0^t B(s)p'(t-s)\mathrm{e}^{-(\mu+r_1)(t-s)}\mathrm{d}s - (\mu+r_1)E(t) \tag{4.3.4}$$

和

$$I'(t) = -(\mu+r_2+d)I(t) - \int_0^t B(s)p'(t-s)\mathrm{e}^{-(\mu+r_1)(t-s)}\mathrm{d}s$$
$$-(\mu+r_2+d)I_0\mathrm{e}^{-(\mu+r_2+d)t}. \tag{4.3.5}$$

于是有

$$N'(t) = \Lambda - \mu N(t) - dI(t) - (\mu + r_2 + d) I_0 e^{-(\mu + r_2 + d)t}$$
$$\leqslant \Lambda - \mu N(t). \tag{4.3.6}$$

由此得

$$N(t) \leqslant N(0) e^{-\mu t} + \frac{\Lambda}{\mu}(1 - e^{-\mu t}).$$

因而

$$N^{\infty} \leqslant \frac{\Lambda}{\mu}.$$

从而 $B(t) = \sigma S(t) I(t)/N(t)$ 在$[0,\infty)$上一致有界.

现在我们断言 $I^{\infty} = 0$. 反之,设 $I^{\infty} > 0$,则存在一个序列 t_n,当 $n \to \infty$ 时,$t_n \to \infty$,使得 $I(t_n) \to I^{\infty}$. 不失一般性,我们设

$$t_{n+1} - t_n \to \infty, \qquad 当 n \to \infty 时. \tag{4.3.7}$$

否则,只需重新挑选 t_n 的子序列使得上面的性质成立. 设 $\tilde{I}(t) = \sup_{s \geqslant t}\{I(s)\}$,显然有

$$I^{\infty} = \lim_{t \to \infty} \tilde{I}(t). \tag{4.3.8}$$

由(4.3.2)知

$$I(t_{n+1}) = I_0 e^{-(\mu + r_2 + d)t_{n+1}} + \int_0^{t_n} B(s) a(t_{n+1} - s) ds$$
$$+ \int_{t_n}^{t_n + 1} B(s) a(t_{n+1} - s) ds. \tag{4.3.9}$$

由于 $B(s)$ 在$[0,\infty)$上有界,存在一个正常数 M 使得

$$B(s) \leqslant M, \qquad 对所有的 s \in [0,\infty).$$

再由 $\int_0^{\infty} a(s) ds$ 的收敛性和(4.3.7)得知

$$\begin{aligned}\int_0^{t_n} B(s) a(t_{n+1} - s) ds &\leqslant M \int_{t_{n+1} - t_n}^{t_{n+1}} a(s) ds \\ &\leqslant M \int_{t_{n+1} - t_n}^{\infty} a(s) ds \to 0, 当 n \to \infty.\end{aligned} \tag{4.3.10}$$

进而,由 R_0 的定义和(4.3.9)知

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} B(s) a(t_{n+1} - s) ds \leqslant \sigma \tilde{I}(t_n) \int_{t_n}^{\infty} a(s) ds \leqslant R_0 \tilde{I}(t_n). \tag{4.3.11}$$

由(4.3.9)~(4.3.11)得

$$I^{\infty} \leqslant R_0 I^{\infty},$$

这说明 $R_0 \geqslant 1$,与我们的假设 $R_0 < 1$ 矛盾,因而有

$$\lim_{t \to \infty} I(t) = 0. \tag{4.3.12}$$

再从(4.3.2)关于 E 的方程容易得到$\lim\limits_{t\to\infty}E(t)=0$. 最后,从$\lim\limits_{t\to\infty}I(t)=0$ 知 $\lim\limits_{t\to\infty}B(t)=0$. 再由(4.3.2) 关于 S 的方程可知

$$S(t)=\frac{\Lambda}{\mu}(1-\mathrm{e}^{-\mu t})+S(0)\mathrm{e}^{-\mu t}+\int_0^t \mathrm{e}^{-\mu(t-s)}(r_1E(s)+r_2I(s)-B(s))\mathrm{d}s\to\frac{\Lambda}{\mu}, \text{当 } t\to\infty \text{ 时}.$$

这就完成了定理的证明. ∎

当 $R_0>1$ 时,文献[16] 还利用波动引理证明了疾病是弱持续生存的. 为了研究地方病平衡点,根据 Miller 的结果[32],我们应该考虑(4.3.2)的极限系统

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}&=\Lambda-\beta cS\frac{I}{N}-\mu S+r_1E+r_2I,\\
E(t)&=\int_{-\infty}^t B(s)p(t-s)\mathrm{e}^{-(\mu+r_1)(t-s)}\mathrm{d}s,\\
I(t)&=\int_{-\infty}^t a(t-s)B(s)\mathrm{d}s,\\
B(t)&=\sigma S(t)\frac{I(t)}{N(t)}.
\end{aligned}\tag{4.3.13}$$

现在简要说明这个极限系统是如何获得的,为简单起见,只考虑第三个方程. 注意到

$$\begin{aligned}
\int_0^t a(t-s)B(s)\mathrm{d}s&=\int_{-\infty}^t a(t-s)B(s)\mathrm{d}s-\int_{-\infty}^0 a(t-s)B(s)\mathrm{d}s\\
&=\int_{-\infty}^t a(t-s)B(s)\mathrm{d}s+\int_t^\infty a(s)B(t-s)\mathrm{d}s,
\end{aligned}$$

由函数 a 和 B 的定义容易知道,

$$\int_t^\infty a(s)B(t-s)\mathrm{d}s\to 0,\qquad \text{当 } t\to\infty \text{ 时}.$$

因此容易看出,(4.3.2)第三个方程的极限方程为(4.3.13)的第三个方程.

设 (S^*,E^*,I^*) 是(4.3.13) 的正平衡点. 记 $B^*=\sigma S^*I^*/N^*$,则有

$$\begin{aligned}
I^*&=B^*\left(\int_{-\infty}^0 a(t-s)\mathrm{d}s+\int_0^t a(t-s)\mathrm{d}s\right)\\
&=B^*\left(\int_t^\infty a(s)\mathrm{d}s+\int_0^t a(s)\mathrm{d}s\right)\\
&=B^*D_I,\\
E^*&=B^*D_E.
\end{aligned}\tag{4.3.14}$$

由此得

$$\frac{S^*}{N^*}=\frac{1}{\sigma D_I}=\frac{1}{R_0}.\tag{4.3.15}$$

注意到 $S^* + E^* + I^* = N^*$，由(4.3.14)的第二个等式和(4.3.15)得

$$\frac{I^*}{N^*} = \left(1 - \frac{1}{R_0}\right)\frac{D_I}{D_I + D_E},$$
$$\frac{E^*}{N^*} = \left(1 - \frac{1}{R_0}\right)\frac{D_E}{D_I + D_E}. \tag{4.3.16}$$

又注意到

$$\Lambda = B^* + \mu S^* - r_1 E^* - r_2 I^*,$$

两边同除以 N^* 后再利用(4.3.14)～(4.3.16)可得

$$N^* = \Lambda R_0 \Big/ \left[\mu + (R_0 - 1)\frac{1 - r_1 D_E - r_2 D_I}{D_I + D_E}\right]. \tag{4.3.17}$$

注意到

$$r_1 D_E + r_2 D_I < r_1 D_E + (r_2 + \mu + d) D_I$$
$$= r_1 D_E + 1 - (\mu + r_1) D_E = 1 - \mu D_E < 1.$$

因此，当 $R_0 > 1$ 时，极限系统(4.3.13)具有惟一的正平衡点(S^*, E^*, I^*)这个平衡点由(4.3.15)～(4.3.17)来计算.其稳定性由下面的定理所给出.

定理 4.3.2　设 $R_0 > 1$，则极限系统(4.3.13)的正平衡点是渐近稳定的.

为了证明这个定理，我们需要考虑 Volterra 积分方程

$$X(t) = F(t) + \int_0^t A(t-s) G(X(s)) \mathrm{d}s \tag{4.3.18}$$

的平凡解 $X = 0$ 的稳定性，这里 $x \in R^n$，$G(0) = 0$，$G \in C^1(R^n \to R^n)$，$F \in C([0,\infty) \to R^n)$，$A$ 是一个 $n \times n$ 矩阵且满足 $A(t) \in L^1[0,t]$，$\forall t > 0$.

定理 4.3.3[32]　设下列条件成立：

1) Jacobian 矩阵 $DG(0)$ 非奇异，

2) 只要 $\mathrm{Re}\lambda \geqslant 0$，就有 $\det\left(I_n - \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda\tau} A(\tau) DG(0) \mathrm{d}\tau\right) \neq 0$，这里 I_n 表示 $n \times n$ 单位矩阵，

3) 存在一个充分小的 $\varepsilon_0 > 0$，使得 $\sup\{|F(t)| : 0 \leqslant t < \infty\} < \varepsilon_0$，并且当 $t \to \infty$ 时，$F(t) \to 0$.

则当 $t \to \infty$ 时，$X(t) \to 0$.

定理 4.3.2 的证明　令 $\hat{S} = S - S^*$，$\hat{E} = E - E^*$，$\hat{I} = I - I^*$，$\hat{N} = N - N^*$.用这个变换把正平衡点平移到原点.然后需要把(4.3.13)的第一个方程从微分方程改写成积分方程.为此目的，把(4.3.13)的第一个方程改写为

$$S(t) = \frac{\Lambda}{\mu}(1 - \mathrm{e}^{-\mu t}) + S(0)\mathrm{e}^{-\mu t}$$
$$+ \int_0^t (r_1 E(s) + r_2 I(s) - B(s)) \mathrm{e}^{-\mu(t-s)} \mathrm{d}s. \tag{4.3.19}$$

由于 (S^*,E^*,I^*) 是平衡点,因此有

$$S^* = \frac{\Lambda}{\mu}(1-\mathrm{e}^{-\mu t}) + S^*\mathrm{e}^{-\mu t} + \int_0^t (r_1E^* + r_2I^* - B^*)\mathrm{e}^{-\mu(t-s)}\mathrm{d}s, \tag{4.3.20}$$

这里 $B^* = \sigma S^*I^*/N^*$. 把(4.3.19) 和(4.3.20) 相减得

$$\hat{S}(t) = S_0(t) + \int_0^t \Big(r_1\hat{E}(s) + r_2\hat{I}(s) - (\hat{B}(s) - B^*)\Big)\mathrm{e}^{-\mu(t-s)}\mathrm{d}s, \tag{4.3.21}$$

这里

$$S_0(t) = \hat{S}(0)\mathrm{e}^{-\mu t}, \qquad \hat{B}(t) = \sigma(\hat{S}(t) + S^*)\frac{\hat{I}(t) + I^*}{\hat{N}(t) + N^*}.$$

类似地,从(4.3.13)的第二个方程和第三个方程得

$$\hat{E}(t) = \int_{-\infty}^0 p(t-s)\mathrm{e}^{-(\mu+r_1)(t-s)}(\hat{B}(s) - B^*)\mathrm{d}s + \int_0^t p(t-s)\mathrm{e}^{-(\mu+r_1)(t-s)}(\hat{B}(s) - B^*)\mathrm{d}s, \tag{4.3.22}$$

$$\hat{I}(t) = \int_{-\infty}^0 a(t-s)(\hat{B}(s) - B^*)\mathrm{d}s + \int_0^t a(t-s)(\hat{B}(s) - B^*)\mathrm{d}s. \tag{4.3.23}$$

为了把(4.3.21)～(4.3.23)写成(4.3.18)形式,令

$$X = \begin{pmatrix} \hat{S} \\ \hat{E} \\ \hat{I} \end{pmatrix},$$

$$F(t) = \begin{pmatrix} S_0(t) \\ \int_{-\infty}^0 p(t-s)\mathrm{e}^{-(\mu+r_1)(t-s)}(\hat{B}(s) - B^*)\mathrm{d}s \\ \int_{-\infty}^0 a(t-s)(\hat{B}(s) - B^*)\mathrm{d}s \end{pmatrix},$$

$$A(\tau) = \begin{pmatrix} 0 & -\mu\mathrm{e}^{-\mu\tau} & \mathrm{e}^{-\mu\tau} \\ 0 & p(\tau)\mathrm{e}^{-(\mu+r_1)\tau} & 0 \\ 0 & a(\tau) & 0 \end{pmatrix},$$

$$G(X) = \begin{pmatrix} \hat{S} \\ \hat{B} - B^* \\ r_1\hat{E} + r_2\hat{I} \end{pmatrix}.$$

下面验证定理 4.3.3 的条件都成立. 为简化表达式,令

$$x=\frac{S^*}{N^*},\quad y=\frac{E^*}{N^*},\quad z=\frac{I^*}{N^*}.$$

注意到

$$DG(0)=\begin{pmatrix}1&0&0\\ \sigma z(y+z)&-\sigma xz&\sigma x(x+y)\\ 0&r_1&r_2\end{pmatrix},\tag{4.3.24}$$

计算得 $\det DG(0)=-r_2\sigma xz\neq 0$. 因此定理 4.3.3 的条件 1) 成立.

接着验证条件 2). 直接计算 $A(\tau)DG(0)$ 得

$$\begin{pmatrix}-\mathrm{e}^{-\mu\tau}m_3&\mathrm{e}^{-\mu\tau}(m_2+r_1)&\mathrm{e}^{-\mu\tau}(r_2-m_1)\\ p(\tau)\mathrm{e}^{-(\mu+r_1)\tau}m_3&-p(\tau)\mathrm{e}^{-(\mu+r_1)\tau}m_2&p(\tau)\mathrm{e}^{-(\mu+r_1)\tau}m_1\\ a(\tau)m_3&-a(\tau)m_2&a(\tau)m_1\end{pmatrix},$$

其中

$$m_1=\sigma x(x+y),\qquad m_2=\sigma xz,\qquad m_3=\sigma z(y+z).$$

于是

$$\begin{aligned}H(\lambda)&=\det\left(I_n-\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda\tau}A(\tau)DG(0)\mathrm{d}\tau\right)\\ &=\det\begin{pmatrix}1+\dfrac{m_3}{\mu+\lambda}&-\dfrac{m_2+r_1}{\mu+\lambda}&\dfrac{m_1-r_2}{\mu+\lambda}\\ -m_3P(\lambda)&1+m_2P(\lambda)&-m_1P(\lambda)\\ -m_3Q(\lambda)&m_2Q(\lambda)&1-m_1Q(\lambda)\end{pmatrix},\end{aligned}$$

其中

$$P(\lambda)=\int_0^\infty p(\tau)\mathrm{e}^{-(\mu+r_1+\lambda)\tau}\mathrm{d}\tau,Q(\lambda)=\int_0^\infty a(\tau)\mathrm{e}^{-\lambda\tau}\mathrm{d}\tau.$$

简化得

$$\begin{aligned}H(\lambda)=&1+\frac{m_3}{\mu+\lambda}+\frac{m_2}{\mu+r_1+\lambda}-\left(m_1+\frac{r_2m_3}{\mu+\lambda}\right)\int_0^\infty a(\tau)\mathrm{e}^{-\lambda\tau}\mathrm{d}\tau\\ &+\frac{m_2}{\mu+r_1+\lambda}\int_0^\infty p'(\tau)\mathrm{e}^{-(\mu+r_1+\lambda)\tau}\mathrm{d}\tau.\end{aligned}$$

为了容易估计 $|H(\lambda)|$,我们把积分 $\int_0^\infty p'(\tau)\mathrm{e}^{-(\mu+r_1+\lambda)\tau}\mathrm{d}\tau$ 用 $\int_0^\infty a(\tau)\mathrm{e}^{-\lambda\tau}\mathrm{d}\tau$ 来表示. 由 $a(t)$ 的定义得

$$\int_0^\infty p'(\tau)\mathrm{e}^{-(\mu+r_1+\lambda)\tau}\mathrm{d}\tau=-(\mu+r_2+d+\lambda)\int_0^\infty a(\tau)\mathrm{e}^{-\lambda\tau}\mathrm{d}\tau,$$

于是有

$$|H(\lambda)| \geqslant \left|1 + \frac{m_3}{\mu+\lambda} + \frac{m_2}{\mu+r_1+\lambda}\right| - \left|\left(m_1 + m_2 + \frac{r_2 m_3}{\mu+\lambda} + \frac{m_2(r_2+d_1-r_1)}{\mu+r_1+\lambda}\right)\int_0^\infty a(\tau)\mathrm{e}^{-\lambda\tau}\mathrm{d}\tau\right|.$$

注意到当 $\mathrm{Re}\lambda \geqslant 0$ 时,

$$\left|\int_0^\infty a(\tau)\mathrm{e}^{-\lambda\tau}\mathrm{d}\tau\right| \leqslant D_I.$$

又注意到

$$x = \frac{S^*}{N^*} = \frac{1}{R_0},$$

$$\sigma D_I = R_0,$$

$$(m_1+m_2)D_I = \sigma x(x+y+z)D_I = 1,$$

$$\max\{r_2 D_I, (r_2+d-r_1)D_I\} < (r_2+d+\mu)D_I = 1-(\mu+r_1)D_E < 1.$$

从而,当 $\mathrm{Re}\lambda \geqslant 0$ 时,

$$|H(\lambda)| \geqslant \left|1 + \frac{m_3}{\mu+\lambda} + \frac{m_2}{\mu+r_1+\lambda}\right| - \left|(m_1+m_2)D_I + \frac{r_2 m_3}{\mu+\lambda}D_I + \frac{m_2(r_2+d_1-r_1)}{\mu+r_1+\lambda}D_I\right| > 0.$$

容易知道,对任给的 $\varepsilon_0 > 0$,存在 $\delta > 0$,使得当 $|\hat{S}(\tau)| \leqslant \delta_0$, $|\hat{E}(\tau)| \leqslant \delta_0$, $|\hat{I}(\tau)| \leqslant \delta_0$ 时,就有 $\sup\{|F(t)|: 0 \leqslant t < \infty\} < \varepsilon_0$,并且当 $t \to \infty$ 时,$F(t) \to 0$. 因此,定理 4.3.3 的条件 3) 成立. ∎

Feng 和 Thieme 还把感染者分成 n 个阶段,然后引入阶段时滞,建立了感染者带阶段结构的传染病模型,进一步地学习可阅读文献[19,20].

§4.4　含隔离时滞的传染病模型

Feng 和 Thieme 在文献[18]中提出了有隔离影响的传染病模型

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} &= \Lambda - \mu S - \sigma S\frac{I}{A}, \\
\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} &= -(\mu+r)I + \sigma S\frac{I}{A}, \\
\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} &= -(\mu+\zeta)Q + rI, \\
\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} &= -\mu R + \zeta Q, \\
A &= S + I + R,
\end{aligned} \tag{4.4.1}$$

这里 S 是易感者的数量,I 是已经染病但尚未隔离的感染者的数量,Q 是感染者被隔离的数量,R 是恢复者的数量,A 是未被隔离的成员的数量.这里的基本观点是,一些患者由于呆在家里,或者在医院里接受治疗而对易感者没有传染性.Feng 和 Thieme[18],Hethcote,马知恩和廖盛斌[52] 均证明了隔离会引起传染病出现周期波动,使得模型的动力学性态有较大变化.原三领[53] 把隔离时滞引入到模型(4.4.1),用 τ 表示隔离时间,则模型(4.4.1)修改为

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} &= \Lambda - \mu S - \sigma S\frac{I}{A}, \\ \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} &= -(\mu + r)I + \sigma S\frac{I}{A}, \\ \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} &= -\mu Q + rI - rI(t-\tau)\mathrm{e}^{-\mu\tau}, \\ \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} &= -\mu R + rI(t-\tau)\mathrm{e}^{-\mu\tau}, \\ A &= S + I + R. \end{aligned} \tag{4.4.2}$$

当 $t \to \infty$ 时,种群规模 $N(t) \to \Lambda/\mu$.为研究方便起见,现在设种群规模已经达到了它的极限值,即 $N(t) \equiv \Lambda/\mu \triangleq N^*$.因此,可以把模型(4.4.2)简化为

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} &= -(\mu + r)I + \sigma\left(1 - \frac{I+R}{N^* - Q}\right)I, \\ \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} &= -\mu Q + rI - rI(t-\tau)\mathrm{e}^{-\mu\tau}, \\ \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} &= -\mu R + rI(t-\tau)\mathrm{e}^{-\mu\tau}. \end{aligned} \tag{4.4.3}$$

模型(4.4.3)的再生数为 $R_0 = \sigma/(\mu + r)$.文献[50]证明了下面的结论:当 $R_0 \leqslant 1$ 时,无病平衡点 $E_0 = (0,0,0)$ 是全局稳定的;当 $R_0 > 1$ 时,模型(4.4.3)还存在惟一的地方病平衡点 $E^* = (I^*, Q^*, R^*)$,其中

$$\begin{aligned} I^* &= [(R_0 - 1)N^*]\Big/\left[R_0 + \frac{r}{\mu}(R_0 + \mathrm{e}^{-\mu\tau} - 1)\right], \\ Q^* &= \frac{r}{\mu}(1 - \mathrm{e}^{-\mu\tau})I^*, \\ R^* &= \frac{r}{\mu}\mathrm{e}^{-\mu\tau}I^*. \end{aligned}$$

地方病平衡点 $E^* = (I^*, Q^*, R^*)$ 全局稳定的研究十分困难,目前只能用 Liapunov 泛函方法得到局部稳定的充分条件.

定理 4.4.1 如果有

$$r\mathrm{e}^{-\mu\tau} < 2\mu, \quad 1 < R_0 \leqslant \sqrt{r/(2\mu\mathrm{e}^{\mu\tau} - r)},$$

则地方病平衡点 $E^* = (I^*, Q^*, R^*)$ 是渐近稳定的.

证明　令 $x = I - I^*, y = Q - Q^*, z = R - R^*$. 对模型(4.4.3)做变换、然后再线性化,得

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= -\frac{\sigma I^*}{N^* - Q^*}x - \sigma\frac{(I^* + R^*)I^*}{(N^* - Q^*)^2}y - \frac{\sigma I^*}{N^* - Q^*}z,\\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= -\mu y + rx - rx(t-\tau)\mathrm{e}^{-\mu\tau},\\
\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} &= -\mu z + rx(t-\tau)\mathrm{e}^{-\mu\tau}.
\end{aligned}
\tag{4.4.4}
$$

又令 $J = y + z$. 则系统(4.4.4)变为

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= -\frac{\sigma I^*}{N^* - Q^*}x - \sigma\frac{(I^* + R^*)I^*}{(N^* - Q^*)^2}(J - z) - \frac{\sigma I^*}{N^* - Q^*}z,\\
\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t} &= -\mu J + rx,\\
\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} &= -\mu z + rx(t-\tau)\mathrm{e}^{-\mu\tau}.
\end{aligned}
\tag{4.4.5}
$$

经过变换以后,时滞 τ 在第二个方程中没有出现,这使得 Liapunov 泛函的构造相对容易一些. 令

$$
V_{11} = \frac{N^* - Q^*}{2\sigma I^*}x^2, \qquad V_{12} = \frac{I^* + R^*}{2r(N^* - Q^*)}J^2.
$$

沿着系统(4.4.5)的解求导得

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}V_{11}}{\mathrm{d}t} &= -x^2 - \frac{I^* + R^*}{N^* - Q^*}xJ + \left(\frac{I^* + R^*}{N^* - Q^*} - 1\right)xz,\\
\frac{\mathrm{d}V_{12}}{\mathrm{d}t} &= \frac{I^* + R^*}{N^* - Q^*}xJ - \frac{\mu(I^* + R^*)}{r(N^* - Q^*)}J^2.
\end{aligned}
$$

再令 $V_1 = V_{11} + V_{12}$, 则有

$$
\frac{\mathrm{d}V_1}{\mathrm{d}t} = -x^2 - \frac{\mu}{r}\left(1 - \frac{1}{R_0}\right)J^2 - \frac{1}{R_0}xz.
$$

现在构造

$$
V = V_1 + \frac{1}{2}wz^2 + \frac{1}{2}wr\,\mathrm{e}^{-\mu\tau}\int_{t-\tau}^{t} x^2(u)\mathrm{d}u,
$$

这里 $w > 0$ 是一个待定常数. 利用上面几个计算结果容易得到

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} &= -x^2 - \frac{\mu}{r}\left(1 - \frac{1}{R_0}\right)J^2 - \frac{1}{R_0}xz + w(-\mu z^2 + rx(t-\tau)\mathrm{e}^{-\mu\tau}z)\\
&\quad + \frac{1}{2}rw\,\mathrm{e}^{-\mu\tau}(x^2(t) - x^2(t-\tau))\\
&\leqslant -x^2 - \frac{\mu}{r}\left(1 - \frac{1}{R_0}\right)J^2 - \frac{1}{R_0}xz + \frac{1}{2}rw\,\mathrm{e}^{-\mu\tau}x^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ w\left(\frac{1}{2} r\, \mathrm{e}^{-\mu\tau} - \mu\right) z^2 \\
&= - \left[\left(1 - \frac{1}{2} r\, w\, \mathrm{e}^{-\mu\tau}\right) x^2 - \frac{1}{R_0} x\, z + w\left(\frac{1}{2} r\, \mathrm{e}^{-\mu\tau} - \mu\right) z^2 \right] \\
&\quad - \frac{\mu}{r}\left(1 - \frac{1}{R_0}\right) J^2 .
\end{aligned}
$$

在定理的条件下,容易知道$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V \leqslant 0$,并且等号成立的条件为$J$,$x$ 和z 同时为零.从而,地方病平衡点是渐近稳定的. ▌

§4.5 依靠媒介传染的 SIR 模型

依靠媒介传染的传染病是非常多的,如疟疾是通过蚊子来传播的.Cooke 在文献[10]中提出了一个通过媒介传播疾病的数学模型.建模的思想为,不带病的媒介在与感染者接触时,感染者把病毒传给媒介,而带病的媒介在与易感者接触时又把疾病传给易感者.假设不带病毒的媒介被感染后经过时间 τ 才有传染力,又假设媒介种群的数量足够大,使得具有传染力的媒介在时刻 t 的数量与感染者在时刻 $t-\tau$ 的数量成比例.因此,在时刻 t 的疾病发生率为$\beta S(t) I(t-\tau)$.Beretta 和 Takeuchi[7] 对此作了改进.他们把疾病的潜伏期从离散时滞改为连续时滞,把疾病发生率用下面的表达式来表示

$$
\beta S(t) \int_0^{+\infty} f(\tau) I(t-\tau) \mathrm{d}\tau, \tag{4.5.1}
$$

这里积分核 $f(\tau)$ 表示潜伏期长度为 τ 的媒介在整个媒介种群中所占的比例.进而,我们设 $f(\tau)$ 是非负的,在 $R_{+0} = [0,\infty)$ 上平方可积,并满足

$$
\int_0^{\infty} f(\tau) \mathrm{d}\tau = 1, \quad \int_0^{\infty} \tau f(\tau) \mathrm{d}\tau < \infty. \tag{4.5.2}
$$

根据这些理由,把文献[10]的模型修改为

$$
\begin{aligned}
S'(t) &= \mu - \mu S(t) - \beta \int_0^{\infty} f(s) I(t-s) \mathrm{d}s, \\
I'(t) &= \beta S(t) \int_0^{\infty} f(s) I(t-s) \mathrm{d}s - \mu I(t) - \lambda I(t), \\
R'(t) &= \lambda I(t) - \mu R(t),
\end{aligned} \tag{4.5.3}
$$

这里 μ 是种群的出生率和死亡率,β 是有效接触系数,λ 是感染者的恢复率.由于种群的总规模 N 趋向于一个常数,为方便起见,我们设 $N(t) = S(t) + I(t) + R(t) \equiv 1$.

显而易见,我们只需考虑(4.5.3)的前两个方程,即模型

$$
\begin{aligned}
S'(t) &= \mu - \mu S(t) - \beta\int_0^\infty f(s)I(t-s)\mathrm{d}s,\\
I'(t) &= \beta S(t)\int_0^\infty f(s)I(t-s)\mathrm{d}s - \mu I(t) - \lambda I(t).
\end{aligned}
\tag{4.5.4}
$$

我们将在区域

$$\Omega = \{(S,I) \in R_{+0}^2 \mid S + I \leqslant 1\}$$

上考虑模型(4.5.4).

无病平衡点为 $E_0 = (1,0)$. 当 $\beta > \mu + \lambda$ 时,模型(4.5.4)有惟一的地方病平衡点 $E_+ = (S^*, I^*) = ((\mu+\lambda)/\beta, \mu(1-S^*)/\beta S^*)$. 下面分别讨论这些平衡点的局部稳定性和全局稳定性. 首先介绍所需要的基本定理. 考虑自治泛函微分方程

$$x'(t) = f(x_t). \tag{4.5.5}$$

设 $x = 0$ 是(4.5.5)的平衡点. 为了给出(4.5.5)的初值函数空间. 设 $g:(-\infty, 0] \to [1,\infty)$ 满足:

1) g 是连续的非增函数, $g(0) = 1$,

2) 当 $u \to 0^-$ 时, $g(s+u)/g(s)$ 在 $(-\infty,0]$ 上一致地趋向于 1,

3) 当 $s \to -\infty$ 时, $g(s) \to \infty$.

例如 $g(s) = \mathrm{e}^{-\alpha s}, \alpha > 0$, 就满足这些要求.

我们根据函数 g 来定义

$$UC_g = \left\{\phi \in C((-\infty,0], R_+^n) \,\middle|\, \sup_{s\leqslant 0}\frac{|\phi(s)|}{g(s)} < \infty, \right.$$
$$\left. \frac{\phi(s)}{g(s)} \text{在}(-\infty,0]\text{上一致连续}\right\}.$$

设 $\phi \in UC_g$. 定义

$$\|\phi\| = \sup_{s\leqslant 0}\frac{|\phi(s)|}{g(s)}.$$

我们把 UC_g 空间作为系统(4.5.5)的初值函数空间. 设在 UC_g 空间上泛函 f 满足 Lipschitz 条件. 由 Kuang 的专著[27]知,系统(4.5.5)初值问题的解是存在惟一的,并且还有下面的稳定性定理

定理 4.5.1　设 ω_1 和 ω_2 是定义在 R_+ 上的非负、连续函数,满足 $\omega_1(0) = \omega_2(0) = 0, \lim\limits_{r\to\infty}\omega_1(r) = +\infty$. 如果存在连续泛函 $V: C \to R$, 满足

$$V(\phi) \geqslant \omega_1(|\phi(0)|), \quad V'(\phi)|_{(4.5.5)} \leqslant -\omega_2(|\phi(0)|), \tag{4.5.6}$$

则(4.5.5)的解 $x = 0$ 是渐近稳定的,并且每一个解是有界的;如果当 $r > 0$ 时,还有 $\omega_2(r) > 0$, 则 $x = 0$ 是全局渐近稳定的.

对于模型(4.5.4)来说,我们把初值函数空间取为 $UC_g(n = 2)$. 则初值问

题的解是存在惟一的. 下面讨论平衡点的稳定性.

4.5.1 局部稳定性

定理 4.5.2 只要地方病平衡点 E_+ 存在,它就是局部渐近稳定的.

证明 对(4.5.4)作变换 $u_1 = S - S^*, u_2 = I - I^*$,然后线性化得

$$\begin{aligned} u'_1(t) &= -(\beta I^* + \mu)u_1 - \beta S^* \int_0^\infty f(s)u_2(t-s)\mathrm{d}s, \\ u'_2(t) &= \beta I^* u_1 - (\lambda + \mu)u_2 + \beta S^* \int_0^\infty f(s)u_2(t-s)\mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{4.5.7}$$

构造 Liapunov 泛函

$$V(u_t) = \frac{1}{2}u_2^2(t) + \frac{1}{2}w(u_1(t) + u_2(t))^2 + \frac{1}{2}\beta S^* \int_0^\infty f(s)\int_{t-s}^\infty u_2^2(v)\mathrm{d}v\mathrm{d}s,$$

这里 $w > 0$ 是一个待定常数. 注意到

$$V(u_t) \geqslant \omega_1(|u(t)|) = \frac{1}{2}u_2^2(t) + \frac{1}{2}w(u_1(t) + u_2(t))^2.$$

由于 $w > 0$, ω_1 是 u_1 和 u_2 的正定二次型. 因此, $\omega_1 \geqslant 0$ 且 $\omega_1 = 0$ 的充要条件是 $|u(t)| = 0$. 另外容易看到 $\lim\limits_{|u|\to\infty} \omega_1(|u(t)|) = \infty$.

计算 $V(u_t)$ 沿模型(4.5.7)解的导数得

$$\begin{aligned} V'(u_t)|_{(4.5.7)} = &-\mu w u_1^2 - (\lambda + \mu)(1 + w)u_2^2 + \frac{1}{2}\beta S^* u_2^2 \\ &+ \beta S^* u_2 \int_0^\infty f(s)u_2(t-s)\mathrm{d}s + [\beta I^* - w(2\mu + \lambda)]u_1 u_2 \\ &- \frac{1}{2}\beta S^* \int_0^\infty f(s)u_2^2(t-s)\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

现在取 $w = \beta I^*/(2\mu + \lambda)$. 注意到

$$\beta S^* u_2 \int_0^\infty f(s)u_2(t-s)\mathrm{d}s \leqslant \frac{1}{2}\beta S^* u_2^2 + \frac{1}{2}\beta s^* \int_0^\infty f(s)u_2^2(t-s)\mathrm{d}s.$$

如果记 $w_2(|u(t)|) = \mu w(u_1^2 + u_2^2) = \mu w |u(t)|^2$, 则有

$$\begin{aligned} V'(u_t)|_{(4.5.7)} &\leqslant -\mu w u_1^2 - (\lambda + \mu)(1 + w)u_2^2 + \beta S^* u_2^2 \\ &\leqslant -w_2(|u(t)|). \end{aligned}$$

由定理 4.5.1 知,(4.5.7)的平凡解 $u = 0$ 是渐近稳定的. ▌

现在考虑无病平衡点 E_0 的渐近稳定性. 为讨论方便,我们考虑变量 (I, R),而不是 (S, I). 利用 $S + I + R = 1$,我们有

$$\begin{aligned} I'(t) &= \beta(1 - I(t) - R(t))\int_0^\infty f(s)I(t-s)\mathrm{d}s - \mu I(t) - \lambda I(t), \\ R'(t) &= \lambda I(t) - \mu R(t). \end{aligned} \tag{4.5.8}$$

围绕 $I=0$ 和 $R=0$ 线性化得

$$
\begin{aligned}
I'(t) &= -(\mu+\lambda)I(t)+\beta\int_0^\infty f(s)I(t-s)\mathrm{d}s,\\
R'(t) &= \lambda I(t)-\mu R(t).
\end{aligned}
\tag{4.5.9}
$$

对这个系统来说,我们有下面的特征方程

$$(\Lambda+\mu)(\Lambda+\mu+\lambda-\beta F(\Lambda))=0,$$

其中 $F(\Lambda)$ 是 $f(s)$ 的 Laplace 变换. 由于一个特征根 $\Lambda=-\mu<0$, 我们只需考虑方程

$$\Lambda+\mu+\lambda-\beta F(\Lambda)=0. \tag{4.5.10}$$

注意到(4.5.10)正好是(4.5.9)第一个方程的特征方程,因此只需考虑方程

$$I'(t)=-(\mu+\lambda)I(t)+\beta\int_0^\infty f(s)I(t-s)\mathrm{d}s \tag{4.5.11}$$

的平凡解 $I=0$ 的稳定性.

定理 4.5.3　E_0 渐近稳定的充要条件是

$$\beta<\mu+\lambda. \tag{4.5.12}$$

证明　定义 Liapunov 泛函

$$V(I_t)=I(t)+\beta\int_0^\infty f(s)\int_{t-s}^t I(v)\mathrm{d}v\mathrm{d}s.$$

计算 V 沿(4.5.11)解的导数得

$$V'(I_t)=(\beta-\mu-\lambda)I(t). \tag{4.5.13}$$

因此,当(4.5.12)成立时, E_0 是渐近稳定的.

接着我们证明必要性部分. 首先考虑 $\beta>\mu+\lambda$ 的情形. 利用反证法,假设(4.5.11) 的解 $I=0$ 是稳定的,则对任给的 $\varepsilon>0$,存在一个 $\delta>0,\delta\leqslant\varepsilon$,当初值函数 ϕ 是连续的并满足 $0\leqslant\phi(\theta)\leqslant\delta,\theta\in(-\infty,0]$ 时,我们有 $I(t)<\varepsilon,t\in[0,\infty)$. 现在我们进一步要求初值函数 ϕ 不在 $(-\infty,0]$ 恒等于0. 则由 V 的定义知 $V(I_0)=\alpha>0$ 以及

$$V(I_t)\leqslant I(t)+\beta T\max\{\varepsilon,\delta\}=I(t)+\beta T\varepsilon,\qquad t>0,$$

其中 $0<T=\int_0^\infty f(s)s\mathrm{d}s<\infty$. 利用这个不等式和(4.5.13)得

$$V'(I_t)\geqslant(\beta-\mu-\lambda)V(I_t)-(\beta-\mu-\lambda)\beta T\varepsilon,\qquad V(I_0)=\alpha.$$

由此得

$$V(I_t)\geqslant\beta T\varepsilon+(\alpha-\beta T\varepsilon)\exp\{(\beta-\mu-\lambda)t\},$$

因此,

$$I(t)\geqslant V(I_t)-\beta T\varepsilon\geqslant(\alpha-\beta T\varepsilon)\exp\{(\beta-\mu-\lambda)t\}.$$

这说明,如果我们取 $0<\varepsilon<\alpha/(\beta T)$,则有 $\lim\limits_{t\to\infty}I(t)=\infty$,这与 $I=0$ 的稳定性

矛盾.

当 $\beta = \mu + \lambda$ 时, (4.5.13) 表明 $V(I_t) \equiv C$, 这里 C 是一个常数. 再由 $V(I_t)$ 的定义知 E_0 不是渐近稳定的. ▌

4.5.2 全局稳定性

现在考虑平衡点的全局稳定性

定理 4.5.4 正平衡点 E_+ 关于集合 $\tilde{\Omega} = \{(S,I) \in \Omega : S < S^* + I^*\}$ 是全局稳定的.

证明 为了证明方便起见, 我们采用变量 (I,R), 这样我们只涉及到一个微分积分方程. 考虑

$$
\begin{aligned}
I'(t) &= \beta(1 - I(t) - R(t))\int_0^\infty f(s)I(t-s)\mathrm{d}s - \beta S^* I(t), \\
R'(t) &= \lambda I(t) - \mu R(t),
\end{aligned} \tag{4.5.14}
$$

这里 $(I,R) \in \Omega_1 = \{(I,R) \in R_+^2 \mid I + R \leqslant 1\}$. 作变换 $u_1 = I - I^*$, $u_2 = R - R^*$, 得

$$
\begin{aligned}
u'_1(t) &= \beta(S^* - u_1(t) - u_2(t))\int_0^\infty f(s)u_1(t-s)\mathrm{d}s \\
&\quad - \beta(S^* + I^*)u_1(t) - \beta I^* u_2(t), \\
u'_2(t) &= \lambda u_1(t) - \mu u_2(t).
\end{aligned} \tag{4.5.15}
$$

我们将在区域

$$
\Omega^* = \{(u_1, u_2) \in R^2 \mid -I^* \leqslant u_1, -R^* \leqslant u_2, u_1 + u_2 \leqslant S^*\}
$$

上来考虑(4.5.15). 考虑 Liapunov 泛函

$$
V(u_t) = \frac{w_1}{2}u_1^2 + \frac{w_2}{2}u_2^2 + \frac{1}{2}w_1\beta(I^* + S^*)\int_0^\infty f(s)\int_{t-s}^t u_1^2(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s,
$$

这里 w_i 是待定的正常数. 如果 $k = \min\{w_1, w_2\}$, 则有

$$
V(u_t) \geqslant k(u_1^2(t) + u_2^2(t))/2.
$$

选取 w_1 和 w_2 使得 $-w_1\beta I^* + w_2\lambda = 0$. 计算 $V(u_t)$ 沿(4.5.15)解的导数得

$$
\begin{aligned}
V'(u_t)\mid_{(4.5.15)} &= -w_2\mu u_2^2 - \frac{1}{2}w_1\beta(I^* + S^*)u_1^2 \\
&\quad + w_1\beta(S^* - u_1 - u_2)u_1\int_0^\infty f(s)u_1(t-s)\mathrm{d}s \\
&\quad - \frac{1}{2}w_1\beta(I^* + S^*)\int_0^\infty f(s)u_1^2(t-s)\mathrm{d}s \\
&= -w_2\mu u_2^2 - \frac{1}{2}w_1\beta\int_0^\infty f(s)[v^{\mathrm{T}}(t,s)\cdot \mathbf{A}(t)v(t,s)]\mathrm{d}s,
\end{aligned}
$$

这里 $v(t,s) = \mathrm{col}(u_1(t), u_1(t-s))$, T 表示向量的转置,

$$A(t)=\begin{pmatrix} I^*+S^* & -(S^*-u_1-u_2) \\ -(S^*-u_1-u_2) & I^*+S^* \end{pmatrix}.$$

矩阵 A 正定的条件为

$$-I^*<u_1+u_2<I^*+2S^*. \tag{4.5.16}$$

由于在区域 Ω^* 上 $u_1+u_2\leqslant S^*$,因此(4.5.16)的第二个不等式显然成立.现在,对任给的 $\varepsilon>0$,考虑区域 $\Omega_\varepsilon=\{u\in\Omega^*\mid u_1+u_2\geqslant -I^*+\varepsilon\}$.对任给的 $u\in\Omega_\varepsilon$,用 $\bar{\lambda}_\varepsilon$ 表示 $\mathbf{A}$ 的最小特征值,则有 $\bar{\lambda}_\varepsilon>0$. 于是

$$v^{\mathrm{T}}(t,s)\mathbf{A}(t)v(t,s)\geqslant\bar{\lambda}_\varepsilon(u_1^2(t)+u_1^2(t-s)).$$

从而,

$$\begin{aligned} V'(u_t)\mid_{(4.5.15)} &\leqslant -w_2\mu u_2^2-\frac{1}{2}w_1\beta\bar{\lambda}_\varepsilon\left[u_1^2+\int_0^\infty f(s)u_1^2(t-s)\mathrm{d}s\right] \\ &\leqslant -\delta(u_1^2+u_2^2), \end{aligned}$$

这里 $\delta=\min\{w_2\mu,w_1\beta\bar{\lambda}_\varepsilon/2\}$.这说明(4.5.15)的解 $u=0$ 关于 Ω_ε 是全局稳定的.注意到 $u_1+u_2>-I^*$ 等价于 $I+R>R^*$,而这又等价于 $S<S^*+I^*$.这就完成了定理的证明. ▌

文献[7]还证明了:

定理 4.5.5　当 $\beta<\mu+\lambda$ 时,E_0 是全局稳定的.

Berreta 和 Takeuchi[8] 还考虑了模型

$$\begin{aligned} S'(t) &= b-\mu_1S(t)-\beta\int_0^h f(s)I(t-s)\mathrm{d}s, \\ I'(t) &= \beta S(t)\int_0^\infty f(s)I(t-s)\mathrm{d}s-\mu_2I(t)-\lambda I(t), \\ R'(t) &= \lambda I(t)-\mu_3R(t). \end{aligned} \tag{4.5.17}$$

与模型(4.5.3)相比,这个模型准许易感者、感染者和恢复者有不同的死亡率,并且准许种群的输入率与死亡率不同.他们得到了与文献[7]相类似的结果.文献[3]进一步考虑了模型

$$\begin{aligned} S'(t) &= b-\mu_1S(t)-\beta\int_0^h I(t-s)\mathrm{d}\eta(s), \\ I'(t) &= \beta S(t)\int_0^\infty I(t-s)\mathrm{d}\eta(s)-\mu_2I(t)-\lambda I(t), \\ R'(t) &= \lambda I(t)-\mu_3R(t), \end{aligned} \tag{4.5.18}$$

这里假设 $\mu_1\leqslant\min\{\mu_2,\mu_3\}$,函数 $\eta:[0,h]\to R=(-\infty,\infty)$ 是非减的、具有有界变分,并满足

$$\int_0^h \mathrm{d}\eta(s)=\eta(h)-\eta(0)=1.$$

模型(4.5.18)的无病平衡点是 $E_0 = (S_0, 0, 0)$,这里 $S_0 = b/\mu_1$. 当

$$\frac{b}{\mu_1} > \frac{\mu_2 + \lambda}{\beta} \tag{4.5.19}$$

时,模型(4.5.18)有惟一的地方病平衡点 $E_+ = (S^*, I^*, R^*)$,其中

$$S^* = \frac{\mu_2 + \lambda}{\beta}, \quad I^* = \frac{b - \mu_1 S^*}{\beta S^*}, \quad R^* = \frac{\lambda(b - \mu_1 S^*)}{\mu_3 \beta S^*}.$$

当 $b/\mu_1 < S^*$ 时,文献[3] 证明了 E_0 是全局稳定的,并且研究了地方病平衡点的全局稳定性.

希望进一步了解这一方面工作的读者可参阅马万彪,Tacheuchi 和 Beretta 的论文[52,53].

§4.6 依靠媒介传染的 SIRS 模型

靳祯[26] 考虑了依靠媒介传染的 SIRS 模型,并且从建模方法上也对文献[8] 作了改进. 下面介绍文献[26] 的工作.

4.6.1 模型的建立

做下面的假设:

(H_1) 所考虑的疾病用 SIRS 模型刻画. 设各类人群(易感者 X、染病者 Y、移出者 Z)的自然死亡率 $\tilde{\mu}$ 是相等的. 新生儿是易感者,$\tilde{b}$ 是出生率. 染病者个体有因病死亡,因病死亡率为 $\tilde{c}$,总人口 N 不是常数;

(H_2) 媒介(如蚊子等)被分为易感者类 V_s 和染病者类 V_i. 易感媒介仅被染病人群传染,当易感者媒介 V_s 被染病者传染后,经过时间"τ",$\tau > 0$,才变为染病者媒介 V_i;

(H_3) 假设易感者人群仅仅被媒介染病者所感染,媒介和人群充分混合;

(H_4) 媒介的总数是常数且其数量是很大,远远超过人群总数,即 $\varepsilon = \dfrac{N}{V_T} \ll 1$. 媒介的出生率和死亡率是相等的,用"$\delta$"代表,这里 $V_T = V_s + V_i$.

根据假设 $(\mathrm{H}_1) \sim (\mathrm{H}_4)$,对人群可建立下列 SIRS 流行病动力学模型

$$\begin{cases} X'(t) = -\tilde{\beta}X(t)V_i(t) - \tilde{\mu}X(t) + \tilde{b}N_0 + \tilde{\alpha}Z(t), \\ Y'(t) = \tilde{\beta}X(t)V_i(t) - (\tilde{\mu} + \tilde{\lambda} + \tilde{c})Y(t), \\ Z'(t) = \tilde{\lambda}Y(t) - (\tilde{\mu} + \tilde{\alpha})Z(t), \end{cases} \tag{4.6.1}$$

这里 $\tilde{\beta}$ 是易感者人群和染病者媒介的有效接触系数,$\tilde{\mu}$ 和 $\tilde{b}$ 分别代表人群的自然死亡率和出生率,N_0 代表人群的环境容纳量,$\tilde{\lambda}$ 代表人群染病者的恢复率,$\tilde{c}$ 是

因病死亡率，$\tilde{\alpha}$ 是失去免疫率，这里，$\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{b}, \tilde{\mu}, \tilde{c}, \tilde{\lambda} \in R_+$.

下面考虑媒介种群模型，把媒介分为易感者 V_s 和染病者 V_i 两类，用“δ”代表媒介的出生和死亡率，假设新出生的是易感者. K 代表易感者媒介和染病者人群的有效接触系数，则媒介满足的方程为

$$\begin{cases} V'_s(t) = -K\mathrm{e}^{-\delta\tau}Y(t-\tau)V_s(t-\tau) - \delta V_s(t) + \delta(V_s(t) + V_i(t)), \\ V'_i(t) = K\mathrm{e}^{-\delta\tau}Y(t-\tau)V_s(t-\tau) - \delta V_i(t). \end{cases} \tag{4.6.2}$$

由方程(4.6.2)可看到：对 $t \geqslant t_0$, $V_T(t) = V_s(t) + V_i(t) = V_T(t_0)$成立，即媒介总数量是常数. 由假设($H_4$)可得

$$\varepsilon = \frac{N}{V_T} \ll 1.$$

下面给出两个无量纲时间纯量

$$\sigma = KN_0 t, \qquad \rho = KV_T t.$$

设

$$S(t) = \frac{X(t)}{N_0}, \qquad I(t) = \frac{Y(t)}{N_0}, \qquad R(t) = \frac{Z(t)}{N_0}.$$

这些是各类无量纲种群变量. 而

$$v_i(t) = \frac{V_i(t)}{V_T}, \qquad v_s(t) = \frac{V_s(t)}{V_T} \tag{4.6.3}$$

是无量纲媒介变量.

据此，可得无量纲媒介方程为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}\rho} = \varepsilon\left(\mathrm{e}^{-\delta\tau}I(t-\tau)v_s(t-\tau) - \dfrac{\delta}{KN_0}v_i(t)\right), \\ \dfrac{\mathrm{d}v_s}{\mathrm{d}\rho} = -\dfrac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}\rho}. \end{cases} \tag{4.6.4}$$

注意到 $0 \leqslant v_i(t), v_s(t), I(t) \leqslant 1$, 由(4.6.4)易得

$$-\frac{\varepsilon\delta}{KN_0} \leqslant \frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}\rho} \leqslant \varepsilon\mathrm{e}^{-\delta\tau}, \qquad \varepsilon = \frac{N_0}{V_T}. \tag{4.6.5}$$

由于 $\varepsilon = \dfrac{N}{V_T} \ll 1$, 由(4.6.4)及(4.6.5)可得

$$\frac{\mathrm{d}v_i}{\mathrm{d}\rho} = -\frac{\mathrm{d}v_s}{\mathrm{d}\rho} \simeq 0,$$

即 v_i, v_s 近似于停留在平衡点. 因此，有

$$\begin{aligned} &v_i(t) = \frac{\mathrm{e}^{-\delta\tau}}{\delta}KN_0 I(t-\tau)v_s(t-\tau), \\ &v_i(t) + v_s(t) = 1, \\ &v_s(t-\tau) = v_s(t). \end{aligned} \tag{4.6.6}$$

由上式可得

$$v_s(t) = \frac{1}{1 + \frac{KN_0}{\delta}e^{-\delta\tau}I(t-\tau)}. \tag{4.6.7}$$

假设媒介的出生和死亡率“δ”是充分大,使得$\frac{e^{-\delta\tau}}{\delta}KN_0 \ll 1$ 成立,即有

$$\delta e^{\delta\tau} \gg KN_0.$$

从而由(4.6.7)可得: $v_s(t) \simeq 1$,即有 $V_s(t) \simeq V_T$.因此,由(4.6.6)式可得

$$v_i(t) \simeq \frac{KN_0}{\delta}e^{-\delta\tau}I(t-\tau).$$

这等价于

$$V_i(t) \simeq \frac{KV_T}{\delta}e^{-\delta\tau}Y(t-\tau). \tag{4.6.8}$$

对方程(4.6.1),采用无量纲时间变换,并由(4.6.3)和(4.6.8)式得到

$$\begin{cases} \dfrac{dS(\sigma)}{d\sigma} = -\beta S(\sigma)I(\sigma-\tau_\sigma) - \mu S(\sigma) + b + \alpha R(\sigma), \\ \dfrac{dI(\sigma)}{d\sigma} = \beta S(\sigma)I(\sigma-\tau_\sigma) - (\mu+\lambda+c)I(\sigma), \\ \dfrac{dR(\sigma)}{d\sigma} = \lambda I(\sigma) - (\mu+\alpha)R(\sigma), \end{cases} \tag{4.6.9}$$

这里

$$\beta_1 = \frac{\tilde{\beta}V_T e^{-\delta\tau}}{\delta}, \qquad \mu = \frac{\tilde{\mu}}{KN_0}, \qquad \lambda = \frac{\tilde{\lambda}}{KN_0},$$

$$b = \frac{\tilde{b}}{KN_0}, \qquad c = \frac{\tilde{c}}{KN_0}, \qquad \alpha = \frac{\tilde{\alpha}}{KN_0}.$$

为方便,仍然用“t”代替 σ,τ 代替 τ_σ,因此,系统(4.6.9)可写为

$$\begin{cases} S'(t) = -\beta_1 S(t)I(t-\tau) - \mu S(t) + b + \alpha R(t), \\ I'(t) = \beta_1 S(t)I(t-\tau) - (\mu+\lambda+c)I(t), \\ R'(t) = \lambda I(t) - (\mu+\alpha)R(t). \end{cases} \tag{4.6.10}$$

这是一个靠媒介传染且具有潜伏时滞“τ”的 SIRS 流行病模型.

为了把模型(4.6.10)修改的更加符合实际,假设媒介种群的潜伏期不是相同的“τ”,而是在区间$[0,h]$上的一个分布参数,这里“h”($h \in R_+$)是潜伏时间“τ”的上界,因此,把模型(4.6.10)中的传染力

$$\beta_1 S(t)I(t-\tau),$$

用

$$\beta S(t)\int_0^h f(\tau)I(t-\tau)d\tau$$

来替代,这里 $\beta=\tilde{\beta}V_T/\delta$,"$f$"是关于一个潜伏时间"$\tau$"的非负连续分布函数.为了方便起见,我们设

$$\int_0^h f(\tau)\mathrm{d}\tau = 1.$$

在这些假设下,系统(4.6.10)成为

$$\begin{cases} S'(t) = -\beta S(t)\int_0^h f(s)I(t-s)\mathrm{d}s - \mu S(t) + b + \alpha R(t), \\ I'(t) = \beta S(t)\int_0^h f(s)I(t-s)\mathrm{d}s - (\mu+\lambda+c)I(t), \\ R'(t) = \lambda I(t) - (\mu+\alpha)R(t). \end{cases} \tag{4.6.11}$$

4.6.2　模型的稳定性分析

考虑系统(4.6.11).首先,容易证明 $n=S+I+R$ 是有界的,事实上,

$$n'(t) = S'(t)+I'(t)+R'(t) = b-\mu n(t) - cI(t) \leqslant b-\mu n(t).$$

因此,对充分小的 $\varepsilon>0$,一定存在 $T=T(\varepsilon,n(0))>0$ 使得

$$n(t)\leqslant \varepsilon+\frac{b}{\mu},\qquad 对\ t>T \tag{4.6.12}$$

成立.

令

$$\Omega_\varepsilon = \{(S,I,R)\in R_+^3 \mid 0<n=S+I+R\leqslant \varepsilon+\frac{b}{\mu}\}.$$

由(4.6.12)式可得:方程(4.6.11)的任何非负轨线最终都进入区域 Ω_ε.因此,关于方程(4.6.11)平衡点的稳定性分析,我们仅限制在区域 Ω_ε 上.

通过计算,易得下面两个结论

1) 当

$$\frac{b}{\mu}>\frac{\mu+\lambda+c}{\beta} \tag{4.6.13}$$

成立时,方程(4.6.11)存在地方性平衡点 $E_+=(S^*,I^*,R^*)$,这里

$$E_+=\left(\frac{\mu+\lambda+c}{\beta},\frac{(\mu+\alpha)(b-\mu S^*)}{\mu(\lambda+\mu+c)+\alpha(c+\mu)},\frac{\lambda(b-\mu S^*)}{\mu(\lambda+\mu+c)+\alpha(c+\mu)}\right).$$

2) 方程(4.6.11)总存在无病平衡点 $E_0=(S^*,I^*,R^*)=\left(\frac{b}{\mu},0,0\right)$.

下面研究无病平衡点的稳定性.

定理 4.6.1　当

$$\frac{b}{\mu}<\frac{\mu+\lambda+c}{\beta}$$

成立时,方程(4.6.11)的无病平衡点 E_0 在 $\Omega_\varepsilon\left(0<\varepsilon<\dfrac{\mu(\mu+\lambda+c)-b\beta}{\beta\mu}\right)$ 内全局渐近稳定.

限于篇幅,我们略去这个定理的证明.

下面考虑方程(4.6.11)的地方病平衡点 E_+ 的稳定性.对方程(4.6.11)做变量变换 $u_1=S(t)-S^*, u_2=I-I^*, u_3=R-R^*$,可得

$$\begin{cases} u'_1=-(\beta I^*+\mu)u_1-\beta S\displaystyle\int_0^h f(s)u_2(t-s)\mathrm{d}s+\alpha u_3, \\ u'_2=\beta I^* u_1+\beta S\displaystyle\int_0^h f(s)u_2(t-s)\mathrm{d}s-(\mu+\lambda+c)u_2, \\ u'_3=\lambda u_2-(\mu+\alpha)u_3. \end{cases} \tag{4.6.14}$$

方程(4.6.14)的初值属于 Banach 空间

$$\begin{aligned} C=\{\phi=(\phi_1,\phi_2,\phi_3)\mid &\phi_1(\theta)=\phi_1(0),\phi_3(\theta)=\phi_3(0), \\ &\theta\in[-h,0],\phi_2\in C([-h,0],R), \\ &(\phi_1(0),\phi_2(0),\phi_3(0))\in\Omega'_\varepsilon\}, \end{aligned} \tag{4.6.15}$$

这里

$$\begin{aligned} \Omega'_\varepsilon=\{(u_1,u_2,u_3)\in R_+^3\mid &-(S^*+I^*+R^*) \\ &\leqslant u_1+u_2+u_3\leqslant\varepsilon+\frac{b}{\mu}-(S^*+I^*+R^*)\}. \end{aligned}$$

下面来研究地方病平衡点 E_+ 的全局渐近稳定性.定义

$$T=\int_0^h \tau f(\tau)\mathrm{d}\tau.$$

定理 4.6.2　设 $x=\dfrac{\lambda\alpha}{\mu(\mu+\alpha)}<1$,若存在 $\tilde S$ 满足

$$S^*<\tilde S<\frac{b(1-x)}{\mu+\lambda+c-\dfrac{\lambda\alpha}{\mu+\alpha}}=\Delta,$$

并且使下列条件成立

1) $h<\min\left\{(2\beta\tilde S)^{-1},\dfrac{\tilde S-S^*}{b(1+x)-\mu S^*}\right\}$,

2) $b(1+x)\leqslant\tilde S[\beta(\Delta-\tilde S)+\mu]$,

则方程(4.6.11)的地方病平衡点 E_+ 是全局渐近稳定的.

证明　对任意满足 $S^*<\tilde S<\Delta$ 的正常数,定义

$$\Omega_{\varepsilon,\tilde S}\equiv\{(S,I,R)\in\Omega_\varepsilon\mid S\leqslant\tilde S\}.$$

我们将证明下列两个命题是真的,

命题 4.6.1　对满足 $S^*<\tilde S<\Delta$ 的任意正常数 $\tilde S$,如果 $h<(2\beta\tilde S)^{-1}$ 成立,

则方程(4.6.11)的任一非负解最终将不会停留在区域 $\Omega_\varepsilon \setminus \Omega_{\varepsilon,\tilde{S}}$ 内.

命题4.6.2 如果条件1)和2)成立,则方程(4.6.11)的任一非负解最终将停留在区域 $\Omega_{\varepsilon,\tilde{S}}$ 内.

命题4.6.1的证明类似于文献[8],在此略去其证明.下面我们给出命题4.6.2的证明.用反证法,若不然,则由命题4.6.1可知,对满足 $S^* < \tilde{S}_1 < \tilde{S} < \Delta$ 的任意正常数$\tilde{S}_1$,一定存在两个时间序列$\{t_n\}$和$\{t'_n\}$,满足 $t_n < t'_n < t_{n+1} < t'_{n+1}$,当 $n \to \infty$ 时,$t_n \to +\infty$,使得对满足方程(4.6.11)的解$(S(t),I(t),R(t))$,有

$$S(t_n) = \tilde{S}_1, S(t'_n) = \tilde{S}, \tilde{S}_1 \leqslant S(t) \leqslant \tilde{S}, \quad 对\ t_n \leqslant t \leqslant t'_n, \tag{4.6.16}$$

并且 $\dot{S}(t'_n) \geqslant 0$ 成立.由(4.6.11),可得

$$\begin{aligned}\tilde{S} - \tilde{S}_1 &= S(t'_n) - S(t_n)\\ &= -\beta\int_{t_n}^{t'_n} S(v)\int_0^h f(\tau)I(v-\tau)\mathrm{d}v\mathrm{d}\tau - \mu\int_{t_n}^{t'_n} S(v)\mathrm{d}v\\ &\quad + b(t'_n - t_n) + \alpha\int_{t_n}^{t'_n} R(v)\mathrm{d}v,\end{aligned} \tag{4.6.17}$$

由文献[44]中的波动引理,从(4.6.11)得

$$R^\infty \leqslant \frac{\lambda}{\mu+\alpha} I^\infty, \qquad R_\infty \geqslant \frac{\lambda}{\mu+\alpha} I_\infty. \tag{4.6.18}$$

又因为 $I^\infty < \dfrac{b}{\mu}$,从而上式变为

$$R^\infty \leqslant \frac{\lambda}{\mu+\alpha} I^\infty < \frac{\lambda b}{\mu(\mu u+\alpha)}. \tag{4.6.19}$$

因此,

$$\psi = \tilde{S} - \tilde{S}_1 + \beta\int_{t_n}^{t'_n} S(v)\int_0^h f(\tau)I(v-\tau)\mathrm{d}v\mathrm{d}\tau + \mu\int_{t_n}^{t'_n} S(v)\mathrm{d}v,$$

对充分大的 t_n,由(4.6.16),(4.6.17)和(4.6.19),并由条件1)和2)得

$$b(1+x)(t'_n - t_n) \geqslant \psi \geqslant \tilde{S} - \tilde{S}_1 + \mu\tilde{S}_1(t'_n - t_n).$$

由上式可得

$$t'_n - t_n \geqslant \frac{\tilde{S} - \tilde{S}_1}{b(1+x) - \mu\tilde{S}_1} \tag{4.6.20}$$

和

$$\frac{\tilde{S} - \tilde{S}_1}{b(1+x) - \mu\tilde{S}_1} \to \frac{\tilde{S} - S^*}{b(1+x) - \mu S^*} > h, \qquad 当\ \tilde{S}_1 \to S^*. \tag{4.6.21}$$

由(4.6.11)也可得

$$(S(t)+I(t))' = -\left(\mu+\lambda+c-\frac{\lambda\alpha}{\mu+\alpha}\right)(S(t)+I(t)) + \frac{\lambda\mu+c(\mu+\alpha)}{\mu+\alpha}S(t) - \frac{\lambda\alpha}{\mu u+\alpha}I(t) + \alpha R(t) + b.$$

又由波动引理4.3.1和 $I^{\infty} < \frac{b}{\mu}$, 有

$$\begin{aligned}&\left(\mu+\lambda+c-\frac{\lambda\alpha}{\mu+\alpha}\right)(S(t)+I(t))_{\infty}\\ &\geqslant \frac{\lambda\mu+c(\mu+\alpha)}{\mu+\alpha}S_{\infty} - \frac{\lambda\alpha}{\mu+\alpha}I^{\infty} + \alpha R_{\infty} + b\\ &\geqslant b - \frac{\lambda\alpha}{\mu+\alpha}I^{\infty} \geqslant b(1-x).\end{aligned}$$

由上式可得

$$(S(t)+I(t))_{\infty} \geqslant \Delta.$$

注意到 $\tilde{S} < \Delta$ 成立,则上式隐含着:对充分小的正常数 η,一定存在充分大的 $T_1 > 0$,使得对 $t \geqslant T_1$,有

$$S(t)+I(t) \geqslant \Delta - \eta \equiv H(\eta) > \tilde{S}. \tag{4.6.22}$$

因此,对充分大的 t'_n 和充分接近于 S^* 的 $\tilde{S}_1$,由(4.6.21)式可得

$$I(t'_n-\tau) \geqslant H(\eta) - S(t'_n-\tau). \tag{4.6.23}$$

由(4.6.20)和(4.6.21)式可得

$$t_n \leqslant t'_n - \tau \leqslant t'_n, \qquad 0 \leqslant \tau \leqslant h. \tag{4.6.24}$$

从而,根据(4.6.19)和(4.6.23)得

$$I(t'_n-\tau) \geqslant H(\eta) - \tilde{S} > 0, \qquad 0 \leqslant \tau \leqslant h. \tag{4.6.25}$$

由上式和已知条件 1) 和 2) 可证明 $\dot{S}(t'_n) < 0$. 事实上,由(4.6.11)、(4.6.25)和(4.6.19) 式可得

$$\begin{aligned}S'(t'_n) &= -\beta S(t'_n)\int_0^h f(\tau)I(t'_n-\tau)\mathrm{d}\tau - \mu S(t'_n) + b + \alpha R(t'_n)\\ &= -\beta\tilde{S}\int_0^h f(\tau)I(t'_n-\tau)\mathrm{d}\tau - \mu\tilde{S} + b + \alpha R(t'_n)\\ &\leqslant -\beta\tilde{S}\int_0^h f(\tau)I(t'_n-\tau)\mathrm{d}\tau - \mu\tilde{S} + b + \alpha R^{\infty}\\ &\leqslant -\beta\tilde{S}[H(\eta)-\tilde{S}] - \mu\tilde{S} + b(1+x)\\ &\equiv G(\tilde{S},\eta).\end{aligned} \tag{4.6.26}$$

根据条件 2),得

$$G(\tilde{S},0) = -\tilde{S}[\beta(\Delta-\tilde{S})+\mu] + b(1+x) < 0. \tag{4.6.27}$$

因此,由(4.6.26),(4.6.27)以及 $G(\tilde{S},\eta)$ 对 η 的连续性可得:对充分小的 $\eta > 0$,有 $S'(t'_n) \leqslant G(\tilde{S},\eta) < 0$. 而该式与 $\dot{S}(t'_n) \geqslant 0$ 相矛盾. 这就完成了命题

4.6.2 的证明.

下面用命题 4.6.1 和命题 4.6.2 来完成定理 4.6.2 的证明. 构造下面的 Liapunov 泛函

$$V(t,S,I_t,R) = S - S^*\ln\frac{S}{S^*} + \frac{1}{2}w_1(S - S^* + I - I^* + R - R^*)^2 + \frac{1}{2}w_2\int_0^h f(\tau)\int_{t-\tau}^t (I(u) - I^*)^2\mathrm{d}u\mathrm{d}\tau + \frac{1}{2}w_3(R - R^*)^2,$$

这里 w_1, w_2 和 w_3 是一些正常数,将在后面做出选择. 由命题4.6.2,对满足 $S^* < \tilde{S} < \Delta$ 的 $\tilde{S}$,一定存在充分大的 $T_2 > t_0$,使得对 $t > T_2$,有 $S(t) \leqslant \tilde{S}$. 对 $t \geqslant T_2$, $V(t,S,I_t,R)$ 沿着方程(4.6.11)解的导数为

$$\dot{V}(t,S,I_t,R) = -\delta[(S - S^*)^2 + (I - I^*)^2] - \frac{1}{2}\int_0^h f(\tau)[Q(t,\tau)B(t,S)Q^T(t,\tau)]\mathrm{d}\tau, \tag{4.6.28}$$

这里 δ 是正常数,稍后做出选择,矩阵 $B(t)$ 为

$$\begin{pmatrix} 2(w_1\mu - \delta + \frac{\beta I^* + \mu}{S}) & (2\mu + c)w_1 & 2\mu a w_1 - \alpha & \beta \\ (2\mu + c)w_1 & 2[w_1(\mu + c) - w_2 - \delta] & w_1(2\mu + c) - \lambda w_3 & 0 \\ 2\mu a w_1 - \alpha & w_1(2\mu + c) - \lambda w_3 & 2[w_1\mu + w_3(\mu + \alpha)] & 0 \\ \beta & 0 & 0 & 2w_2 \end{pmatrix},$$

而

$$Q(t,\tau) = (S(t) - S^*, I(t) - I^*, R(t) - R^*, I(t - \tau)).$$

让 w_1 和 w_3 满足

$$w_1(2\mu + c) = \lambda w_3,$$

则 $B(S(t))$ 成为

$$\begin{pmatrix} 2\left(w_1\mu - \delta + \frac{\beta I^* + \mu}{S}\right) & (2\mu + c)w_1 & 2\mu a w_1 - \alpha & \beta \\ (2\mu + c)w_1 & 2[w_1(\mu + c) - w_2 - \delta] & 0 & 0 \\ 2\mu a w_1 - \alpha & 0 & 2w_1\left[\mu + \frac{(2\mu + c)(\mu + \alpha)}{\lambda}\right] & 0 \\ \beta & 0 & 0 & 2w_2 \end{pmatrix}.$$

对 $t \geqslant T_2$,若下面的式子

$$\frac{2(\beta I^* + \mu)}{S} - 4\delta - \beta > |\alpha - 2w_1\beta| + cw_1 - 2\delta > cw_1 - 2\delta > 2w_2 > \beta \tag{4.6.29}$$

成立,则易知对称矩阵 $B(S(t))$ 是正对角占优的. 为此,选择充分小的 δ 使得

$$0<\delta<\frac{\beta}{2S}(\Delta-\tilde{S}),$$

则对 $t\geqslant T_2$,有

$$\frac{2(\beta I^*+\mu)}{S}-4\delta-\beta>\frac{2(\beta I^*+\mu)}{\tilde{S}}-\frac{2\beta\Delta}{\tilde{S}}+\beta$$

$$=\frac{2\beta}{\tilde{S}}\left(\frac{\beta I^*+\mu}{\beta}-\Delta\right)+\beta.$$

因为

$$\frac{\beta I^*+\mu}{\beta}=\frac{b-\dfrac{\lambda\alpha\mu}{\beta(\mu+\alpha)}}{\mu+\lambda+c-\dfrac{\lambda\alpha}{\mu+\alpha}},\qquad \frac{\mu}{\beta}<\frac{b}{\mu},$$

所以有

$$\frac{\beta I^*+\mu}{\beta}-\Delta>0,\quad \frac{2(\beta I^*+\mu)}{S}-4\delta+\beta>\beta.$$

因此,容易选择正常数 w_1,w_2 及 δ 满足(4.6.29).对 $t>T_2$,由(4.6.28)可得

$$\dot{V}(t,S,I_t,R)\leqslant-\delta[(S-S^*)^2+(I-I^*)^2].$$

由上式可得

$$V(t,S,I_t,R)\leqslant V(T_2,S(T_2),I(T_2),R(T_2))$$
$$-\delta\int_{T_2}^{t}[(S(u)-S^*)^2+(I(u)-I^*)^2]\mathrm{d}u.$$

因此,有

$$\int_{t_0}^{\infty}(S(u)-S^*)^2\mathrm{d}u<+\infty,\qquad \int_{t_0}^{\infty}(I(u)-I^*)^2\mathrm{d}u<+\infty.$$

根据(4.6.11),我们看到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(S(t)-S^*)^2\qquad 和\qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(I(t)-I^*)^2$$

对 $t\geqslant t_0$ 是一致有界的,因此,根据著名的 Barbalat 引理可得

$$(S(t)-S^*)^2+(I(t)-I^*)^2\to 0,\quad 当\ t\to+\infty\ 时.\tag{4.6.30}$$

因此,当 $t\to+\infty$,由(4.6.30)和(4.6.11)的第三个方程可得 $\lim\limits_{t\to+\infty}R(t)=R^*$.
这就完成了该定理的证明. ▌

下面给出比定理 4.6.2 的条件更加简单的一个结论.

由(4.6.26)可得

$$G(\tilde{S},0)\equiv\beta\tilde{S}^2-\left[\frac{b\beta(1-x)}{\beta S^*-\mu x}+\mu u\right]\tilde{S}+b(1+x).$$

记

$$g = 2(1+x)\left(1-\frac{\mu}{S^*\beta}x\right)\left(1+\sqrt{1-\frac{1-x}{1+x}\times\frac{\mu}{\beta S^*-\mu x}}\right).$$

当

$$\beta b > \frac{\beta S^*(\beta S^*-\mu x)}{1-x}\times\frac{g-(1-x)\times\frac{\mu}{\beta S^*}}{1-x} \tag{4.6.31}$$

时,容易看到:方程 $G(\tilde{S},0)=0$ 有两个不同的正实根 r_1 和 $r_2(r_1<r_2)$

$$r_{1,2} = \frac{1}{2\beta}\left[\frac{b\beta(1-x)}{\beta S^*-\mu x}+\mu\mp\sqrt{\left(\frac{b\beta(1-x)}{\beta S^*-\mu x}+\mu\right)^2-4\beta b(1+x)}\right].$$

由 $\mu+\lambda+c=\beta S^*$,可获得 $\mu+\lambda+c-\frac{\lambda\alpha}{\mu+\alpha}=\beta S^*-\mu x$. 因此,根据(4.6.30),我们有

$$3)\ \Delta > S^*\left[2(1+x)\frac{\left(1-\frac{\mu}{S^*\beta}x\right)}{1-x}\left(1+\sqrt{1-\frac{1-x}{1+x}\times\frac{\mu}{\beta S^*-\mu x}}\right)-\frac{\mu}{\beta S^*}\right].$$

容易看到,条件 3) 比地方病平衡点存在的条件(4.6.13)更强. 因为$\frac{\mu}{\beta S^*-\mu x}<1$,因此有 $\mu(1+x)<\beta S^*$. 据此式和条件 3) 我们能得到 $S^*<\Delta$.

推论 4.6.1　设 $x<1$. 若条件 3) 和

$$h<\min\left\{(2\beta r_2)^{-1},\frac{r_2-S^*}{b(1+x)-\mu S^*}\right\}$$

成立,则方程(4.6.11)的地方病平衡点 E_+ 是全局渐近稳定的.

证明　令 $\beta S^*=\lambda+\mu+c$,则有

$$\begin{aligned}G(S^*,0) &= \beta S^{*2}-\left[\frac{b\beta(1-x)}{\beta S^*-\mu x}+\mu\right]S^{*2}+b(1+x)\\ &= \frac{y^2}{\beta}-\frac{by}{y-\mu x}+\frac{bxy}{y-\mu x}-\frac{\mu y}{\beta}+b(1+x)\\ &= \frac{y^2(y-\mu)+y(b\beta+\mu^2-\mu y)+b\beta x(y-\mu-\mu x)}{\beta(y-\mu x)}.\end{aligned} \tag{4.6.32}$$

因为 $y-\mu=\lambda+c>0, y-\mu-\mu x=\lambda+c-\frac{\lambda\alpha}{\mu u+\alpha}>0$,由(4.6.13)可得:$b\beta-\mu y+\mu^2>0$. 因此,由(4.6.32),我们能看到 $G(S^*,0)>0$. 由条件 3) 也可得

$$\begin{aligned}\Delta &> S^*\left[2(1+x)\times\frac{\left(1-\frac{\mu}{S^*\beta}x\right)}{1-x}\times\left(1+\sqrt{1-\frac{1-x}{1+x}\times\frac{\mu}{\beta S^*-\mu x}}\right)-\frac{\mu}{\beta S^*}\right]\\ &> S^*\left[2(1+x)\times\frac{\left(1-\frac{\mu}{S^*\beta}x\right)}{1-x}-\frac{\mu}{\beta S^*}\right]\end{aligned}$$

$> 2S^* - \frac{\mu}{\beta}$, 即

$$S^* < \frac{1}{2\beta}\left[\frac{b\beta(1-x)}{\beta S^* - \mu x} + \mu\right]. \tag{4.6.33}$$

由 $G(S^*,0) > 0$ 和(4.6.33)可得 $S^* < r_1$,也容易看到 $r_2 < \Delta$.因此,有 $S^* < r_1 < r_2 < \Delta$.选择 $\tilde{S}$ 满足 $S^* < r_1 < \tilde{S} < r_2$.则有 $G(\tilde{S},0) < G(r_2,0) = 0$,结合推论的条件易得:当 $\tilde{S}$ 充分靠近 r_2 时,(4.6.27) 自然满足,因此推论 4.6.5 给出的结论成立. ▌

§4.7 循环结构模型的稳定性

本节研究两个 SIRS 传染病模型的稳定性.与上一节不同的是,这两个模型都没有涉及传染媒介,但研究地方病平衡点全局稳定的方法是利用非线性 Volterra 微分积分方程解的性质,而不是构造 Liapunov 泛函,这与上一节不同.首先介绍 Stech 和 Willams[42] 对经典的 SIRS 模型的研究结果.

4.7.1 经典的 SIRS 模型

用 S,I,R 分别表示易感者、感染者、移出者的数量,用 N 表示种群的总数量.假设疾病发生率是双线性的,有效接触系数为 β,从 I 类向 R 类转移的速率与 I 成比例,比例常数为 γ,用 $P(t)$ 表示一个在时刻 0 进入 R 类的个体在时刻 t 仍在 R 类的概率.又设

$$P(0+) = P(0) = 1, \qquad P(\infty) = 0, \qquad \omega = \int_0^\infty P(t)\mathrm{d}t < \infty.$$

在以上假设下,就可以给出要研究的模型

$$I(t) = I_0 e^{-\gamma t} + \beta\int_0^t S(x)I(x)e^{-\gamma(t-x)}\mathrm{d}x, \tag{4.7.1}$$

$$R(t) = R_0(t) + \gamma\int_0^t I(x)P(t-x)\mathrm{d}x, \tag{4.7.2}$$

$$S(t) + I(t) + R(t) \equiv 1, \tag{4.7.3}$$

其中 $t \geqslant 0, I(0) = I_0 > 0$ 表示 0 时刻感染者所占的比例,$R_0(t)$ 表示在 0 时刻进入 R 类的个体经过 t 时间单位后仍在 R 类的比例.显然有,$R_0(t) \leqslant 1$,$R_0(t)$ 是非增的.我们又设当 $t \to \infty$ 时,$R_0(t) \to 0$.记 $\sigma = \beta/\gamma$.文献[24]证明了无病平衡点(1,0,0)是全局稳定的.

把(4.7.2)和(4.7.3)代入(4.7.1),然后求导得

$$I'(t) = -\gamma I + \beta I\left[1 - I - R_0(t) - \gamma\int_0^t I(t-u)P(u)\mathrm{d}u\right], \tag{4.7.4}$$

以及 $I(0)=I_0>0$. 如果 $R_0(t)=\gamma\int_t^{\infty}I_eP(u)\mathrm{d}u$,则当 $\sigma>1$ 时,(4.7.4)有惟一的地方病平衡点 $I_e=(1-1/\sigma)/(1+\omega\gamma)$. 下面讨论地方病平衡点的全局稳定性.

定理 4.7.1　假设

$$\int_0^{\infty}\int_s^{\infty}P(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}s<\infty, \tag{4.7.5}$$

$$1+\gamma\int_0^{\infty}\cos(vs)P(s)\mathrm{d}s>0,\quad \text{对所有的 } v\in R, \tag{4.7.6}$$

则(4.7.1)~(4.7.3)的任何一个解满足

$$\lim_{t\to+\infty}(S(t),I(t),R(t))=\left(\frac{1}{\sigma},I_e,\omega\gamma I_e\right).$$

证明　一旦确定了 $I(t)$ 的极限值, $S(t)$ 和 $R(t)$ 的极限值从(4.7.2)和(4.7.3)立即可以得到. 因此只需考虑(4.7.4).

作变换

$$z(t)=\ln(I(t)/I_e). \tag{4.7.7}$$

(4.7.4)变成

$$z'(t)=-\int_0^t g(z(t-u))\mathrm{d}\mu(u)+f(t), \tag{4.7.8}$$

这里,

$$z(0)=\ln(I_0/I_e),$$

$$g(z)=e^z-1,\qquad \mu(0)=0,$$

$$\mu(u)=\beta I_e+\gamma\beta I_e\int_0^u P(v)\mathrm{d}v,\qquad \text{对所有的 } u>0,$$

$$f(t)=-\beta R_0(t)+\gamma\beta I_e\int_t^{\infty}p(u)\mathrm{d}u,\qquad \text{对所有的 } t\geqslant 0.$$

容易看出, $t\to\infty$ 时 $f(t)\to 0$, 且测度 μ 在 $0\leqslant u<\infty$ 上的全变分等于 $\gamma(\sigma-1)$.

方程(4.7.8)已经被 Londen[30] 所研究. 根据文献[30]的结果, 我们需要验证2个条件: 1)(4.7.8)的解是有界的, 2) $\mathrm{Re}\hat{\mu}(v)>0$, 这里 $\hat{\mu}$ 是测度 μ 的 Fourier 变换. 用反证法很容易验证1). 注意到对任给的 v,

$$\mathrm{Re}\hat{\mu}(v)=\beta I_e\left[1+\gamma\int_0^{\infty}\cos(vs)P(s)\mathrm{d}s\right].$$

因此条件2)成立. 再由文献[30]中的定理3, 当 $t\to\infty$ 时 $g(z(t))\to 0$. ▌

例 4.7.1　考虑一个 SIRS 模型, 这里我们把移出者分为两个阶段, 第一阶段是刚从 I 类转移过来的移出者(例如, 可以是被隔离的感染者, 他们不再有传染性), 用 $R_1(t)$ 表示这一部分的数量. 设位于第一阶段的移出者按比例进入第二阶段, 用 $R_2(t)$ 表示位于第二个阶段的移出者的数量. 又设第二阶段的移出

者按比例进入 S 类. 因此,我们的模型实际上是 $S \to I \to R_1 \to R_2 \to S$ 类型. 模型的具体表示式是

$$I' = -\gamma I + \beta SI, \qquad I(0) = I_0 > 0, \tag{4.7.9}$$

$$R'_1 = -\varepsilon_1 R_1 + \gamma I, \qquad R_1(0) = R_{10} \geqslant 0, \tag{4.7.10}$$

$$R'_2 = -\varepsilon_2 R_2 + \varepsilon_1 R_1, \qquad R_2(0) = R_{20} \geqslant 0, \tag{4.7.11}$$

$$S(t) + I(t) + R(t) \equiv 1, \tag{4.7.12}$$

其中 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 是正的比例常数. 把 I 看作为一个 t 的函数,从(4.7.10) 和(4.7.11) 所组成的系统中把 $R_1(t)$ 和 $R_2(t)$ 解出来,然后再相加得

$$R(t) = R_1(t) + R_2(t) = R_0(t) + \gamma \int_0^t I(t-s)P(s)\mathrm{d}s, \tag{4.7.13}$$

这里

$$R_0(t) = R_1(0)\mathrm{e}^{-\varepsilon_1 t} + R_2(0)\mathrm{e}^{-\varepsilon_2 t} + R_1(0)\varepsilon_1 \mathrm{e}^{-\varepsilon_2 t}\int_0^t \mathrm{e}^{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)u}\mathrm{d}u,$$

$$P(t) = \mathrm{e}^{-\varepsilon_1 t} + \varepsilon_1 \mathrm{e}^{-\varepsilon_2 t}\int_0^t \mathrm{e}^{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)u}\mathrm{d}u. \tag{4.7.14}$$

把(4.7.9), (4.7.12) 和 (4.7.13) 组成一个系统, 然后把它对应到系统 (4.7.1)~(4.7.3). 由于 $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0$, 从(4.7.14)容易知道(4.7.5)成立. 经计算得

$$1 + \gamma \int_0^\infty \cos(\nu s)P(s)\mathrm{d}s = 1 + \gamma \frac{\varepsilon_1\varepsilon_2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{(\varepsilon_1^2 + \nu^2)(\varepsilon_2^2 + \nu^2)} > 0, \qquad \text{对所有的 } \nu.$$

因此,(4.7.6)也成立. 由定理 4.7.1,(4.7.9)~(4.7.12)的所有解满足

$$(S(t), I(t), R_1(t), R_2(t)) \to \left(\frac{1}{\sigma}, I_e, \frac{\gamma}{\varepsilon_1}I_e, \frac{\gamma}{\varepsilon_2}I_e\right),$$

这里

$$I_e = \left(1 - \frac{1}{\sigma}\right) \Big/ \left(1 + \frac{\gamma}{\varepsilon_1} + \frac{\gamma}{\varepsilon_2}\right).$$

定理 4.7.2 设(4.7.5)成立. 又设存在 $\nu, \gamma > 0$ 使得

$$1 + \gamma \int_0^\infty \cos(\nu s)P(s)\mathrm{d}s < 0, \tag{4.7.15}$$

则存在 $\sigma > 1$,使得(4.7.4) 的地方病平衡解 I_e 是不稳定的. 即存在 $\delta > 0$,序列 $\{I_m(0)\}, \{R_{0m}(\cdot)\}$ 和序列 $\{t_m\}$, 使得 $t_m > 0$, 当 $m \to \infty$ 时, $I_m(0) \to I_e$, $\| R_0(t) - \gamma I_e \int_t^\infty P(u)\mathrm{d}u \|_\infty \to 0$, 但是 $| I(t, I_m(0), R_{0m}) - I_e | \geqslant \delta$, 这里 $\| \cdot \|_\infty$ 表示通常的 L^∞ 模.

证明 经变量变换(4.7.7),我们有(4.7.8). 对(4.7.8) 求极限方程(可参阅 4.3 节的有关方法) 后,再求极限方程在 $x = 0$ 的特征方程,得

$$\Delta(\lambda)=\Delta(\lambda,\sigma,\gamma)\equiv\lambda+\frac{(\sigma-1)\gamma}{1+\omega\gamma}\left[1+\int_0^\infty e^{-\lambda s}P(s)ds\right]=0. \tag{4.7.16}$$

由文献[34],只需证明这个方程存在正实部的特征根.把 $\lambda=\mu+i\upsilon$ 代入特征方程后分离实部和虚部得

$$\mu+\frac{(\sigma-1)\gamma}{1+\omega\gamma}\left[1+\int_0^\infty\cos(\nu s)e^{-\mu s}P(s)ds\right]=0, \tag{4.7.17}$$

$$\nu-\frac{(\sigma-1)\gamma^2}{1+\omega\gamma}\int_0^\infty\sin(\nu s)e^{-\mu s}P(s)ds=0. \tag{4.7.18}$$

由 Riemann-Lebesgue 引理,(4.7.5) 保证了 $\nu\to\int_0^\infty\cos(\nu s)P(s)ds$ 是连续可微的,并且不是常数.因而,由(4.7.5),我们可以找出 $\nu_0>0$ 使得

$$\int_0^\infty\cos(\nu_0 s)P(s)ds<0$$

成立,并且

$$\beta\equiv\frac{d}{d\nu}\int_0^\infty\cos(\nu s)P(s)ds\mid_{\nu=\nu_0}=-\int_0^\infty\sin(\nu_0 s)P(s)ds\neq 0.$$

记 $\gamma_0^{-1}=-\int_0^\infty\cos(\nu_0 s)P(s)ds$. 取 $\sigma_0>1$ 使得当 $\mu=0,\nu=\nu_0,\gamma=\gamma_0$ 时(4.7.18)成立.

定义 $F:R^+\times R^2\to R^2$ 为

$$F(\mu,\nu,\sigma)=\begin{bmatrix}\mathrm{Re}\Delta(\mu+i\nu,\sigma,\gamma_0)\\ \mathrm{Im}\Delta(\mu+i\nu,\sigma,\gamma_0)\end{bmatrix}.$$

根据 γ_0,σ_0 和 ν_0 的选择,有 $F(0,\nu_0,\sigma_0)=(0,0)$. 由(4.7.5),当 $\mu\geqslant0$ 时,F 关于变量 ν,σ 在 (ν_0,σ_0) 的一个邻域内连续可微.又

$$\det D_{(\nu,\sigma)}F(0,\nu_0,\sigma_0)=-\frac{\gamma_0^2\beta\nu_0}{1+\omega\gamma_0}\neq0.$$

因而由隐函数存在定理知系统(4.7.17)和(4.7.18)存在连续解 $\nu=\nu(\mu),\sigma=\sigma(\mu),\mu>0$. 这就说明了具正实部特征根的存在性. ▎

4.7.2　种群规模变动的 SIRS 模型

Anderson 和 May[1] 在分析巴氏杆菌在老鼠中传播时提出了一个SIRS模型,该模型根据实验数据采用了常数种群输入率和双线性疾病发生率,并引入了因病死亡率.文献[1,31]对该模型的地方病平衡点作了研究.最近,Thieme 和 van den Driessche[45] 在移出类中引入了阶段结构,并采用文献[42]的方法研究了地方病平衡点的收敛性.由于因病死亡率的出现,种群规模不再是一个常数,把

SIRS模型转化成标量微分积分方程具有较高的技巧性.下面就介绍文献[45]的工作.

把老鼠种群划分为易感者、感染者和移出者三类,用 S,I,R 和 N 分别表示易感者、感染者、移出者和老鼠的总数量.采用双线性疾病发生率,则 I 满足

$$I'(t) = \kappa S(t)I(t) - (\mu + \varepsilon + \gamma)I(t), \tag{4.7.19}$$

这里 κ 是传染系数,μ 是自然死亡率系数,ε 是因病死亡率系数,γ 是感染者的移出率系数.

利用 $N(t) = S(t) + I(t) + R(t)$ 得,

$$\begin{aligned} I'(t) = {} & \kappa(N(t) - I(t) - R(t))I(t) \\ & - (\mu + \varepsilon + \gamma)I(t). \end{aligned} \tag{4.7.20}$$

为了处理 N ,我们提出下面方程

$$N'(t) = \Lambda - \mu N(t) - \varepsilon I(t) - M_R(t), \tag{4.7.21}$$

这里 Λ 是种群的常数输入率(实际上我们忽略了垂直传染,假设新生的个体进入易感类),μN 是自然原因引起的死亡率,εI 是疾病对感染者产生的额外死亡率,$M_R(t)$ 是疾病对移出者产生的额外死亡率(例如,被隔离的感染者属于移出类,但这些成员仍有因病死亡率).

下面我们希望把 R 和M_R 用I 来表示,用 a 表示一个移出者自恢复之日起的阶段年龄,用 $\rho(t,\cdot)$ 表示时刻 t 的阶段年龄密度,则有

$$R(t) = \int_0^\infty \rho(t,a)\mathrm{d}a. \tag{4.7.22}$$

移出者的阶段年龄密度 ρ 依赖于阶段输入速率 γI. 如果初始密度为 ρ_0,而 $\mathscr{F}(a)$ 是一个移出者进入移出类 a 时间单位后仍在移出类中的概率,则有

$$\rho(t,a) = \begin{cases} \gamma I(t-a)\mathscr{F}(a), & t > a, \\ \rho_0(a-t)\dfrac{\mathscr{F}(a)}{\mathscr{F}(a-t)}, & t < a. \end{cases} \tag{4.7.23}$$

概率 $\mathscr{F}(a)$ 可以分解为三部分

$$\mathscr{F}(a) = \mathrm{e}^{-\mu a}\mathscr{F}_R(a)Q(a), \tag{4.7.24}$$

这里 $\mathrm{e}^{-\mu a}$ 是一个移出者在时间段$[0,a]$上没有因自然原因而死亡的概率,$\mathscr{F}_R$ 是一个移出者在时间段$[0,a]$上没有因疾病原因而死亡的概率,$Q(a)$ 是一个移出者在时间段$[0,a]$上没有因丧失免疫力而返回到易感类的概率.如果免疫期具有最大长度 L,则当 $a > L$ 时 $Q(a) = 0$. 如果移出者具有永久免疫时,则 $Q(a) \equiv 1$.

从对 $\mathscr{F}_R$ 和Q 的解释中可以看出,$\mathscr{F}_R$ 和Q 都是$[0,\infty)$上非负的和非增的函数,并且当 $a = 0$ 时值为 1.

另一个自然假设是初始密度 ρ_0 是非负的,并且初始总数量是有限的,即

$$\int_0^\infty \rho_0(a)\mathrm{d}a < \infty.$$

关于 $M_R(t)$，我们有

$$M_R(t) = -\int_0^\infty \frac{\rho(t,a)}{\mathscr{F}_R(a)}d\mathscr{F}_R(a). \tag{4.7.25}$$

注意上面的积分是Stieltjes积分.为容易理解这个Stieltjes积分，暂时设 $\mathscr{F}_R$ 可微，则

$$\delta(a) = -\frac{\mathscr{F}'_R(a)}{\mathscr{F}_R(a)}$$

是每个阶段年龄为 a 的移出者的因病死亡率，因此，积分

$$\int_0^\infty \rho(t,a)\delta(a)\mathrm{d}a$$

是移出类在时刻 t 的因病死亡率.

把(4.7.23)和(4.7.24)代入(4.7.22)得

$$R(t) = \gamma\int_0^t I(t-a)\mathrm{e}^{-\mu a}g(a)\mathrm{d}a + \mathrm{e}^{-\mu t}u(t),$$

这里

$$g(a) = \mathscr{F}_R(a)Q(a),$$

$$u(t) = \int_t^\infty \rho_0(a-t)\frac{\mathscr{F}_R(a)Q(a)}{\mathscr{F}_R(a-t)Q(a-t)}\mathrm{d}a.$$

容易知道，

$$g(0) = 1,\quad u(t) \leqslant \int_0^\infty \rho_0(a)\mathrm{d}a = u_0 < \infty.$$

把(4.7.23)和(4.7.24)代入(4.7.25)得

$$M_R(t) = \gamma\int_0^t I(t-a)\mathrm{e}^{-\mu a}\mathrm{d}f(a) + \mathrm{e}^{-\mu t}V(t),$$

这里

$$f(a) = -\int_0^a Q(r)\mathrm{d}\mathscr{F}_R(a),\quad a > 0,$$

$$V(t) = -\int_t^\infty \rho_0(a-t)\frac{Q(a)}{\mathscr{F}_R(a-t)Q(a-t)}\mathrm{d}\mathscr{F}_R(a).$$

我们断言 $V \in L^1[0,\infty)$.事实上，

$$\begin{aligned}\int_0^t V(s)\mathrm{d}s &\leqslant -\int_0^t\int_s^\infty \rho_0(a-s)\frac{1}{\mathscr{F}_R(a-s)}\mathrm{d}\mathscr{F}_R(a)\mathrm{d}s\\ &\leqslant -\int_0^t\int_0^a \rho_0(a-s)\frac{1}{\mathscr{F}_R(a-s)}\mathrm{d}s\mathrm{d}\mathscr{F}_R(a)\\ &\leqslant -\int_0^t\int_0^a \rho_0(s)\frac{1}{\mathscr{F}_R(s)}\mathrm{d}s\mathrm{d}\mathscr{F}_R(a)\end{aligned}$$

$$\leqslant \int_0^t \rho_0(a)\mathrm{d}a.$$

在最后一步里,我们用到了 Stieltjes 积分的分步积分法.

总结上面的讨论过程就得模型

$$\begin{aligned}
I'(t) &= \kappa(N(t) - I(t) - R(t))I(t) - (\mu + \varepsilon + \gamma)I(t),\\
N'(t) &= \Lambda - \mu N(t) - \varepsilon I(t) - M_R(t),\\
R(t) &= \gamma \int_0^t I(t-a)\mathrm{e}^{-\mu a}g(a)\mathrm{d}a + \mathrm{e}^{-\mu t}u(t),\\
M_R(t) &= \gamma \int_0^t I(t-a)\mathrm{e}^{-\mu a}\mathrm{d}f(a) + \mathrm{e}^{-\mu t}V(t).
\end{aligned} \tag{4.7.26}$$

根据上面的讨论,我们作如下假设

(HT) $\mu > 0$,(4.7.26) 中的其它参数是非负的,并且有

$g:[0,\infty) \to [0,1]$ 是非增的,

$f:[0,\infty) \to [0,1]$ 是非减的,并且 $f(0) = 0$,

$u:[0,\infty) \to [0,\infty)$ 是连续有界的,

$V:[0,\infty) \to [0,\infty), V \in L^1[0,\infty)$.

在这个基本假设之下,(4.7.26) 满足非负初始条件的解保持非负,当 $S(0) \geqslant 0$ 时,$S = N - I - R$ 也保持非负.

(4.7.26) 始终有无病平衡点. 在无病平衡点,$N = S = \Gamma/\mu, I = R = 0$. 这个模型的再生数为

$$R_0 = \frac{\Lambda\kappa}{\mu(\mu + \varepsilon + \gamma)}. \tag{4.7.27}$$

当 $R_0 \leqslant 1$ 时,利用文献[44] 中的定理 2.2 可以得知无病平衡点是全局稳定的. 当 $R_0 > 1$ 时,模型(4.7.26) 有惟一的地方病平衡点(I_e, N_e, R_e). 由(4.7.26) 的第一个方程 可知,$S_e = N_e - I_e - R_e = \Lambda/(\mu R_0)$. 再利用(4.7.26) 的第二个方程和 $N_e = S_e + I_e + R_e$,可以推出 I_e 满足

$$I_e\left[\mu + \varepsilon + \gamma\mu \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\mu a}g(a)\mathrm{d}a + \gamma \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\mu a}\mathrm{d}f(a)\right] = \Lambda(R_0 - 1)/R_0.$$

我们将集中讨论地方病平衡点,目的是得到充分条件以保证地方病平衡点是全局稳定的. 手段是把(4.7.26)变换成一个标量方程. 为此目的,对(4.7.26) 的第二个方程做积分得

$$N(t) = N_0\mathrm{e}^{-\mu t} + \frac{\Lambda}{\mu}(1 - \mathrm{e}^{-\mu t}) - \varepsilon\int_0^t I(t-s)\mathrm{e}^{-\mu s}\mathrm{d}s - \int_0^t M_R(s)\mathrm{e}^{-\mu(t-s)}\mathrm{d}s.$$

由(4.7.26)的最后一个方程得

$$\int_0^t M_R(s)\mathrm{e}^{-\mu(t-s)}\mathrm{d}s$$

$$= \gamma \int_0^t \int_0^s I(t-s) e^{-\mu a} df(a) e^{-\mu(t-s)} ds + e^{-\mu t} \int_0^t V(s) ds.$$

通过交换积分次序得

$$\begin{aligned}
\int_0^t M_R(s) e^{-\mu(t-s)} ds - e^{-\mu t} \int_0^t V(s) ds &= \gamma \int_0^t \int_a^t I(s-a) e^{-\mu(t+a-s)} ds df(a) \\
&= \gamma \int_0^t \int_0^{t-a} I(s) e^{-\mu(t-s)} ds df(a) \\
&= \gamma \int_0^t I(t-a) e^{-\mu a} f(a) da.
\end{aligned}$$

于是有

$$N(t) = \frac{\Lambda}{\mu} - \int_0^t I(t-s) e^{-\mu s} (\varepsilon + f(s)) ds - e^{-\mu t} v(t),$$

其中 $v(t)$ 是一个有界连续函数. 把这个方程和(4.7.26)的第三个方程代入到(4.7.26)的第一个方程得

$$I'(t) = -(\mu + \varepsilon + \gamma) I(t) + \kappa I(t) \left(\frac{\Lambda}{\mu} - I(t) - e^{-\mu t} w(t) - \int_0^t I(t-s) P(s) ds \right),$$

其中 $w = v + u$,

$$P(s) = e^{-\mu s} (\varepsilon + \gamma f(s) + \gamma g(s)). \tag{4.7.28}$$

最后再作一次变换

$$I(t) = \frac{\Lambda}{\mu} x(t),$$

就得方程

$$\begin{aligned}
x'(t) = &-(\mu + \varepsilon + \gamma) x(t) \\
&+ \beta x(t) \left(1 - x(t) - e^{-\mu t} z(t) - \int_0^t x(t-s) P(s) ds \right),
\end{aligned} \tag{4.7.29}$$

其中 $z(t)$ 是一个连续有界函数,而 $\beta = \kappa \dfrac{\Lambda}{\mu}$.

记

$$\hat{P}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda s} P(s) ds.$$

由定理 4.7.1,就有

定理 4.7.3　设基本假设(HT)成立. 又设

1)　$-\hat{P}'(0) < \infty$,

2)　$1 + \mathrm{Re}\hat{P}(i\nu) > 0, \quad \forall \nu > 0$,

则只要(4.7.29)的地方病平衡点存在,它就是全局渐近稳定的.

由(4.7.28),

$$\hat{P}(\lambda) = \frac{\varepsilon}{\lambda + \mu} + \gamma \int_0^\infty e^{-(\lambda+\mu)a} (f(a) + g(a)) da.$$

因此,

$$-\hat{P}'(0)=\frac{\varepsilon}{\mu^2}+\gamma\int_0^\infty a\mathrm{e}^{-\mu a}(f(a)+g(a))\mathrm{d}a.$$

由于 f 和 g 在 0 到 1 之间取值, $-\hat{P}'(0)<\infty$ 自然成立. 因此, 定理 4.7.3 就转化为

定理 4.7.4 设基本假设(HT)成立. 又设

$$1+\frac{\varepsilon\mu}{\mu^2+\nu^2}+\gamma\mathrm{Re}\widehat{(f+g)}(\mu+i\nu)>0,\quad \forall\,\nu>0,$$

则只要(4.7.29)的地方病平衡点存在,它就是全局渐近稳定的.

为了应用方便起见,文献[45]还给出了下面的推论

推论 4.7.1 设基本假设(HT)成立. 又设

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\mu a}(f(a)+g(a))\mathrm{d}a\leqslant\frac{1}{\gamma},$$

则只要(4.7.29)的地方病平衡点存在,它就是全局渐近稳定的.

推论 4.7.2 设基本假设(HT)成立. 又设函数 $f+g$ 在 $[0,\infty)$ 上是非增的和凸的,则只要(4.7.29) 的地方病平衡点存在,它就是全局渐近稳定的.

证明

$$\mathrm{Re}\widehat{(f+g)}(\mu+i\nu)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\mu s}(f(s)+g(s))\cos(\nu s)\mathrm{d}s.$$

由于两个非负、非增的凸函数的乘积保持这些性质,函数

$$h(s)=\mathrm{e}^{-\mu s}(f(s)+g(s))$$

是非增的和凸的. 不失一般性,设函数 h 是可微的,否则,我们可以找出可微的非增凸函数序列 h_j 使得

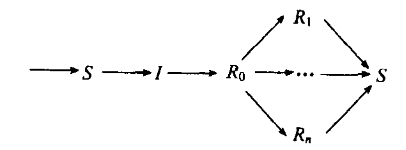
$$\int_0^\infty |h_j(s)-h(s)|\,\mathrm{d}s\to 0,\, j\to\infty.$$

由分步积分得

$$\mathrm{Re}\widehat{(f+g)}(\mu+i\nu)=-\frac{1}{\nu}\int_0^\infty \sin(\nu s)h'(s)\mathrm{d}s.$$

由于 $-h'$ 是非负的和非增的,把上面的积分分解后再比较,就容易得知积分值非负. ▌

例 4.7.2 考虑下面这样一类循环模型(见下图):移出者首先进入 R_0 仓室,在这里仍然有因病死亡率, 经过进一步的恢复后, R_0 仓室中的个体向 $R_1,\cdots,R_n$ 中的某一个转移,在 $R_1,\cdots,R_n$ 这些仓室中,移出者没有因病死亡率,但恢复者在不同的仓室中停留的时间会不同,并且个别仓室具有永久免疫的特性,移出者在其它仓室中将失去免疫力而返回到 S 类, R_0 仓室可以理解为一个隔离室,其中的个体仍然是患者,具有因病死亡率,但不具有传染力.



把种群规模 N 分解为

$$N = S + I + R, \quad R = R_0 + R_1 + \cdots + R_n,$$

这里 $R_0, R_1, \cdots, R_n$ 是移出者在不同阶段的数量，它们满足下面的微分方程组

$$\begin{aligned} S' &= \Lambda - \mu S - \kappa SI + \sigma_1 R_1 + \cdots + \sigma_n R_n, \\ I' &= \kappa SI - (\mu + \varepsilon + \gamma) I, \\ R'_0 &= \gamma I - (\mu + \delta + \rho) R_0, \qquad \rho = \rho_1 + \cdots + \rho_n, \\ R'_j &= \rho_j R_0 - (\mu + \sigma_j) R_j, \qquad j = 1, \cdots, n, \end{aligned} \tag{4.7.30}$$

这里 δ 是移出者在R_0 仓室中的因病死亡率，$1/\rho$ 是移出者在这个仓室里的平均停留时间，$1/\rho_j$ 是移出者在仓室 R_j 里的平均停留时间.

下面我们把(4.7.30)转化成(4.7.26)的形式. 首先把(4.7.30)中的方程相加得

$$N' = \Lambda - \mu N - \varepsilon I - \delta R_0. \tag{4.7.31}$$

记

$$g_0(a) = e^{-(\delta+\rho)a}.$$

则有

$$R_0(t) = R_0(0) e^{-\mu t} g_0(t) + \gamma \int_0^t I(t-s) e^{-\mu s} g_0(s) ds.$$

如果令

$$f(a) = \frac{\delta}{\delta + \rho}(1 - g_0(a)), \tag{4.7.32}$$

则可以把 $R_0(t)$ 转化成(4.7.26)最后一个方所需要的那种形式.

为了应用定理 4.7.4 得到平衡点的全局稳定性，记

$$g_j(t) = \rho_j e^{-\sigma_j t}, \quad j = 1, \cdots, n. \tag{4.7.33}$$

注意卷积的定义

$$(g_0 * g_j)(t) = \int_0^t g_0(s) g_j(t-s) ds.$$

从(4.7.30)把 $R_j, j = 1, \cdots, n$, 形式上解出来，得

$$\begin{aligned} R_j(t) = {} & \frac{R_j(0)}{\rho_j} g_j(t) + R_0(0) e^{-\mu t} (g_0 * g_j)(t) \\ & + \gamma \int_0^t I(t-s) e^{-\mu s} (g_0 * g_j)(s) ds. \end{aligned}$$

由于 $R = R_0 + \cdots + R_n$,我们把(4.7.26)第三个方程中的 g 取为

$$g(a) = (g_0 + g_0 * (g_1 + \cdots + g_n))(a).$$

由(4.7.32),得

$$\begin{aligned} f(a) + g(a) &= \frac{\delta}{\delta+\rho}(1 - g_0(a)) + g_0(a) + \Big(g_0 * \big(\sum_{j=1}^{n} g_j\big)\Big)(a) \\ &= \frac{\delta}{\delta+\rho} + \frac{\rho}{\delta+\rho}g_0(a) + \Big(g_0 * \big(\sum_{j=1}^{n} g_j\big)\Big)(a). \end{aligned}$$

由(4.7.33)和卷积的性质得

$$\begin{aligned} \widetilde{(f+g)}(\mu+i\nu) &= \frac{\delta}{\delta+\rho}\frac{1}{\mu+i\nu} + \frac{\rho}{\delta+\rho}\frac{1}{\mu+i\nu+\delta+\rho} \\ &\quad + \frac{1}{\mu+i\nu+\delta+\rho}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\rho_j}{\mu+i\nu+\sigma_j}\right). \end{aligned}$$

利用共轭变形得

$$\begin{aligned} \widetilde{(f+g)}(\mu+i\nu) &= \frac{\delta}{\delta+\rho}\frac{\mu-i\nu}{\mu^2+\nu^2} + \frac{\rho}{\delta+\rho}\frac{\mu+\delta+\rho-i\nu}{(\mu+\delta+\rho)^2+\nu^2} \\ &\quad + \frac{\mu+\delta+\rho-i\nu}{(\mu+\delta+\rho)^2+\nu^2}\left(\sum_{j=1}^{n}\rho_j\frac{\mu+\sigma_j-i\nu}{(\mu+\sigma_j)^2+\nu^2}\right). \end{aligned}$$

取实部得

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\widetilde{(f+g)}(\mu+i\nu) &= \frac{\delta}{\delta+\rho}\frac{\mu}{\mu^2+\nu^2} + \frac{\rho}{\delta+\rho}\frac{\mu+\delta+\rho}{(\mu+\delta+\rho)^2+\nu^2} \\ &\quad + \frac{\mu+\delta+\rho}{(\mu+\delta+\rho)^2+\nu^2}\left(\sum_{j=1}^{n}\rho_j\frac{\mu+\sigma_j}{(\mu+\sigma_j)^2+\nu^2}\right) \\ &\quad - \frac{\nu}{(\mu+\delta+\rho)^2+\nu^2}\left(\sum_{j=1}^{n}\rho_j\frac{\nu}{(\mu+\sigma_j)^2+\nu^2}\right) \\ &\geqslant \frac{1}{(\mu+\delta+\rho)^2+\nu^2}\left(\rho\frac{\mu+\delta+\rho}{\delta+\rho} - \sum_{j=1}^{n}\rho_j\frac{\nu^2}{(\mu+\sigma_j)^2+\nu^2}\right). \end{aligned}$$

由于 $\rho = \rho_1 + \cdots + \rho_n$,我们立即有 $\mathrm{Re}\widetilde{(f+g)}(\mu+i\nu) \geqslant 0$.于是由定理4.7.4得下面的定理.

定理4.7.5 模型(4.7.30)的地方病平衡点只要存在,它就是全局稳定的.

§4.8 HIV感染模型

HIV感染的机理是医学界致力于解决的大问题.目前人们已认识到 $CD4^+$ T细胞是免疫系统最丰富的白血细胞,是HIV感染的主要目标(target cells),这些细胞感染后结构受到破坏,降低了人体抵御感染的能力.因此,掌握病毒和 $CD4^+$ T

细胞的变化规律是很重要的.

4.8.1 不含治疗的 HIV 感染模型

下面介绍 Perelson 等人[38] 所提出的数学模型以及对这些模型的研究.

最简单的 HIV 动力学模型为

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = P(t) - \mu_v V, \tag{4.8.1}$$

这里 $P(t)$ 是病毒产生的速率,μ_v 是病毒清除的速率,V 是病毒的浓度.这个模型简单实用,但病毒产生的速率 P 是未知的,为了解决这个问题以及与医学实际更加符合,需要考虑病毒产生的过程:HIV 病毒感染 $CD4^+$ T 细胞,$CD4^+$ T 细胞受感染后会分解出新的 HIV 病毒.为了用数学方法描述这一过程,我们引入健康的 $CD4^+$ T 细胞变量 T,受感染的 $CD4^+$ T 细胞变量 I.假设没有 HIV 病毒时,T 服从下面的微分方程

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = s - \mu_T T + rT\left(1 - \frac{T}{T_{\max}}\right), \tag{4.8.2}$$

这里 T 是健康的 $CD4^+$ T细胞的浓度,s 是由人体内的资源(如胸腺)所产生的健康 $CD4^+$ T细胞的速率,μ_T 是健康 $CD4^+$ T细胞的自然死亡率,r 是老细胞的内禀增长率,$T_{\max}$ 是容纳量.

当 HIV 病毒活动时,我们设细胞的感染率服从双线性函数,感染细胞的死亡率为 μ_1 .于是有模型

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} &= s - \mu_T T + rT\left(1 - \frac{T+I}{T_{\max}}\right) - \kappa_1 VT, \\
\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} &= \kappa'_1 VT - \mu_I I, \\
\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} &= N\mu_b I - \kappa_1 VT - \mu_V V,
\end{aligned} \tag{4.8.3}$$

这里 κ_1 是健康 T 细胞和自由病毒的结合率,κ'_1 表示病毒和 T 细胞结合后转化成感染 T 细胞的速率,μ_I 是感染细胞的死亡率,μ_b 是溶解性感染 T 细胞的死亡率,N 是每个溶解性感染 T 细胞产生病毒的数量.由于健康 T 细胞和自由病毒在结合时两者都在减少,因此(4.8.3) 的第一个方程和第三个方程出现了 $-\kappa_1 VT$ 项.

下面介绍文献[14] 对模型(4.8.3) 的分析.当没有病毒时,T 细胞种群有平衡状态

$$T_0 = \frac{r - \mu_T + [(r-\mu_T)^2 + 4rsT_{\max}^{-1}]^{\frac{1}{2}}}{2rT_{\max}^{-1}}.$$

系统(4.8.3)的未感染平衡点 $E_0 = (T_0, 0, 0)$. 定义

$$N_{crit} = \frac{\mu_I(\mu_V + \kappa_1 T_0)}{\kappa'_1 \mu_b T_0}.$$

如果 $N < N_{crit}$,系统(4.8.3) 只有未感染平衡点 E_0,并且 E_0 是稳定的. 如果 $N > N_{crit}$, E_0 变成不稳定,系统(4.8.3) 还有感染平衡点 $\bar{E} = (\bar{T}, \bar{I}, \bar{V})$,其中

$$\begin{aligned}
\bar{T} &= \frac{\mu_V \mu_I}{\kappa'_1 N \mu_b - \kappa_1 \mu_I}, \\
\bar{I} &= \frac{\kappa'_1 \bar{T}\,\bar{V}}{\mu_I}, \\
\bar{V} &= \frac{\mu_I[(s + (r - \mu_T)\bar{T})T_{max} - r\bar{T}^2]}{\bar{T}[\kappa'_1 r\bar{T} + \kappa_1 \mu_I T_{max}]}.
\end{aligned}$$

为考虑感染平衡点的稳定性,把系统(4.8.3)在 $\bar{E}$ 线性化,就得到在 $\bar{E}$ 的 Jacobian 矩阵

$$A = \begin{bmatrix} -\left(\mu_T + \dfrac{r(2\bar{T} + \bar{I})}{T_{max}} + \kappa_1 \bar{V} - r\right) & -\dfrac{r\bar{T}}{T_{max}} & -\kappa_1 \bar{T} \\ \kappa'_1 \bar{V} & -\mu_I & \kappa'_1 \bar{T} \\ -\kappa_1 \bar{V} & N\mu_b & -(\kappa_1 \bar{T} + \mu_V) \end{bmatrix}.$$

定义

$$M = \mu_T + \frac{r(2\bar{T} + \bar{I})}{T_{max}} + \kappa_1 \bar{V} - r.$$

特征方程为

$$\lambda^3 + a_1 \lambda^2 + (a_2 + a_4)\lambda + (a_3 + a_5) = 0,$$

其中

$$\begin{aligned}
a_1 &= \mu_I + \mu_V + \kappa_1 \bar{T} + M, \\
a_2 &= M(\mu_I + \mu_V + \kappa_1 \bar{T}) + \mu_I(\mu_V + \kappa_1 \bar{T}) - \kappa_1^2 \bar{T}\bar{V}, \\
a_3 &= \kappa'_1 \bar{T}\left(\kappa_1 N \mu_b \bar{V} + \frac{r\mu_V \bar{V}}{T_{max}} - MN\mu_b\right), \\
a_4 &= \kappa'_1 \bar{T}\left(\frac{r\bar{V}}{T_{max}} - N\mu_b\right), \\
a_5 &= M\mu_I(\mu_V + \kappa_1 \bar{T}) - \mu_I \kappa_1^2 \bar{T}\bar{V}.
\end{aligned}$$

由 Routh-Hurwitz 判据,所有特征根实部为负的充要条件是

$$a_1 > 0, \quad a_3 + a_5 > 0, \quad a_1(a_2 + a_4) - (a_3 + a_5) > 0. \tag{4.8.4}$$

于是有

定理 4.8.1 $\bar{E}$ 渐近稳定的条件是(4.8.4) 成立.

文献[14] 还把从实验数据估计出的参数值代入(4.8.4),发现 $\bar{E}$ 是渐近稳

定的.

在模型(4.8.3)中,有两类时滞应该考虑.一是药物疗效起作用所需要的时间(从服药起到药物能在细胞内清除病毒所需要的时间).二是从健康 T 细胞和病毒结合到能释放出病毒之间的时滞.文献[14]把第二种时滞引入到(4.8.3)得

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} &= s - \mu_T T(t) + rT(t)\left(1 - \frac{T(t)+I(t)}{T_{\max}}\right) - \kappa_1 V(t)T(t),\\
\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} &= \kappa'_1 V(t-\tau)T(t-\tau) - \mu_I I(t),\\
\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} &= N\mu_b I(t) - \kappa_1 V(t)T(t) - \mu_V V(t).
\end{aligned} \tag{4.8.5}$$

显然,模型(4.8.5)和(4.8.3)有相同的平衡点,当 $N < N_{crit}$ 时,系统(4.8.5)只有未感染平衡点 E_0,并且 E_0 是稳定的.如果 $N > N_{crit}$,E_0 变成不稳定,系统(4.8.5)还有感染平衡点 $\bar{E} = (\bar{T}, \bar{I}, \bar{V})$.为了研究 $\bar{E}$ 的稳定性,做变换

$$x(t) = T(t) - \bar{T},\ y(t) = I(t) - \bar{I},\ z(t) = V(t) - \bar{V}.$$

变换后再对系统做线性化得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x(t)\\ y(t)\\ z(t)\end{pmatrix} = A_1\begin{pmatrix} x(t)\\ y(t)\\ z(t)\end{pmatrix} + A_2\begin{pmatrix} x(t-\tau)\\ y(t-\tau)\\ z(t-\tau)\end{pmatrix},$$

这里

$$A_1 = \begin{pmatrix} -M & -\frac{r\bar{T}}{T_{\max}} & -\kappa_1\bar{T}\\ 0 & -\mu_I & 0\\ -\kappa_1\bar{V} & N\mu_b & -(\kappa_1\bar{T} + \mu_V)\end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ \kappa'_1\bar{V} & 0 & \kappa'_1\bar{T}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

特征方程为

$$\Delta(\lambda) = |\lambda I - A_1 - \mathrm{e}^{-\lambda\tau}A_2| = 0,$$

也就是

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3\mathrm{e}^{-\lambda\tau} + a_4\lambda\mathrm{e}^{-\lambda\tau} + a_5 = 0. \tag{4.8.6}$$

现在设(4.8.4)成立,也就是当 $\tau = 0$ 时(4.8.6)特征根的实部都是负的.当 $\tau > 0$ 增加时,如果出现某一特征根的实部为正,容易说明在 τ 增加的过程中,必有一个特征根先和虚轴相遇,然后这个特征根跑到虚轴的右边,出现正实部的特征根.

设 $\lambda = i\omega$.代入(4.8.6)后分离实部和虚部得

$$a_1\omega^2 - a_5 = a_3\cos(\omega\tau) + a_4\omega\sin(\omega\tau), \tag{4.8.7}$$

$$\omega^3 - a_2\omega = -a_3\sin(\omega\tau) + a_4\omega\cos(\omega\tau). \tag{4.8.8}$$

分别对两个方程取平方,然后相加得

$$\omega^6 + (a_1^2 - 2a_2)\omega^4 + (a_2^2 - 2a_1a_5 - a_4^2)\omega^2 + a_5^2 - a_3^2 = 0. \quad (4.8.9)$$

记

$$z = \omega^2, \alpha = a_1^2 - 2a_2, \beta = a_2^2 - 2a_1a_5 - a_4^2, \gamma = a_5^2 - a_3^2.$$

(4.8.9)变为

$$h(z) = z^3 + \alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0. \quad (4.8.10)$$

现在证明下面的命题

命题 4.8.1 如果 $\gamma \geqslant 0$ 和 $\beta > 0$，则方程(4.8.10)没有正实根.

证明 注意到

$$\frac{\mathrm{d}h(z)}{\mathrm{d}z} = 3z^2 + 2\alpha z + \beta.$$

而方程

$$3z^2 + 2\alpha z + \beta = 0$$

的根为

$$z_{1,2} = \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 3\beta}}{3},$$

由 $\beta > 0$ 知，$z_1 > 0$ 或 $z_2 > 0$ 是不可能的. 因此 $\frac{\mathrm{d}h(z)}{\mathrm{d}z} > 0$. 又由于 $h(0) = \gamma \geqslant 0$，当 $z > 0$ 时有 $h(z) > 0$，即方程(4.8.10)没有正实根. ▌

根据这个命题，我们有

定理 4.8.2 设(4.8.4)成立. 则当 $\gamma \geqslant 0$ 和 $\beta > 0$ 时，(4.8.5)的感染平衡点 $\bar{E}$ 对所有的 $\tau \geqslant 0$ 是渐近稳定的.

4.8.2 有药物治疗的 HIV 模型

这一小节考虑有药物治疗时 HIV 病毒和 $CD4^+$ T 细胞的变化情况. 实验数据表明，在病人服用了抗逆转录病毒治疗后 HIV 病毒呈现不同的阶段. 如果治疗前病毒在病人体内呈平衡状态，那么服药后 6 小时到数天内病毒浓度几乎没有什么变化. 在这个时间段上，病毒的衰减曲线称为“肩”. 这种时滞产生于几个原因，一是药物时滞，也就是药物在体内运动以及在细胞内加工所需要的时间；二是使用蛋白酶抑制剂后，感染细胞继续产生病毒，但现在病毒不再有传染性；三是使用反转录抑制剂后，那些已经有病毒进入和 RNA 逆转录的细胞将继续其细胞内的活动，这将降低了产生病毒的速率.

现在我们用 T 表示健康细胞浓度，T^* 表示已经感染并能产生病毒的细胞的浓度，V 表示病毒的浓度. 在使用蛋白酶抑制剂后，病毒分为两类：一是传染性病毒 V_I，这些病毒不受蛋白酶抑制剂的影响；二是不传染性病毒 V_{NI}，这些病毒在蛋白酶抑制剂的作用下不能成熟为有传染性的离子.

下面我们先选择基本模型,然后再引入时滞.最常用的模型为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} &= s - d_T T - \kappa VT,\\ \frac{\mathrm{d}T^*}{\mathrm{d}t} &= \kappa VT - \delta T^*,\\ \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} &= N\delta T^* - cV,\end{aligned} \tag{4.8.11}$$

这里 s 是健康细胞的产生率,d_T 是健康细胞的死亡率,常数 κ 刻画病毒和健康细胞结合的强度.假设感染细胞在病毒或人体免疫系统的作用下以 δ 速率死亡,一个感染细胞在一生中产生 N 个病毒.由于感染细胞的平均寿命为 $1/\delta$,一个感染细胞产生病毒的平均速率为 $N\delta$.又假设病毒在系统内以速率 c 被清除.

把模型(4.8.11)和上一小节所研究的模型相比较,这里假设健康细胞服从

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = s - d_T T,$$

而没有考虑 Logistic 增长项,并且模型(4.8.11) 也没有考虑病毒和健康细胞结合时病毒减少的部分,这当然是一个简化的情形. Perelson[39] 在考虑药物治疗效果时对模型(4.8.11) 作了进一步的简化.他们的模型是

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}T^*}{\mathrm{d}t} &= \kappa T_0 V_I - \delta T^*,\\ \frac{\mathrm{d}V_I}{\mathrm{d}t} &= (1 - n_p)N\delta T^* - cV_I,\\ \frac{\mathrm{d}V_{NI}}{\mathrm{d}t} &= n_p N\delta T^* - cV_{NI},\end{aligned} \tag{4.8.12}$$

这里 T_0 是健康细胞的浓度,并且是一个常数,n_p 是蛋白酶抑制剂的效率,$n_p = 1$ 意味着药物把感染细胞都转化成不传染性细胞.如果还使用了反转录抑制剂,就将模型(4.8.12) 中的 κ 替换为 $\kappa(1 - n_{rt})$,这里 n_{rt} 是反转录抑制剂的效率.下面就在模型(4.8.12) 中引入从感染之初到产生病毒体之间的时滞.按照我们的定义,T^* 表示已经被感染并且能产生新病毒的细胞.用 τ 表示一个细胞从感染到产生病毒所需要的时间,随机变量 τ 的概率分布为 $f(\tau)$.则从(4.8.12) 得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}T^*}{\mathrm{d}t} &= (1 - n_{rt})\kappa T_0 \int_0^\infty f(\tau) V_I(t - \tau)\mathrm{e}^{-m\tau}\mathrm{d}\tau - \delta T^*,\\ \frac{\mathrm{d}V_I}{\mathrm{d}t} &= (1 - n_p)N\delta T^* - cV_I,\\ \frac{\mathrm{d}V_{NI}}{\mathrm{d}t} &= n_p N\delta T^* - cV_{NI},\end{aligned} \tag{4.8.13}$$

这里 $\mathrm{e}^{-m\tau}$ 表示感染细胞经过 τ 单位时间后存活的概率.在文献[35] 中,分布函数 $f(\tau)$ 取为 Γ 分布

$$f(\tau) = g_{n,b} \equiv \frac{\tau^{n-1}}{(n-1)!b^n}\mathrm{e}^{-\tau/b},$$

这里参数 n 和 b 定义了时滞的平均值 $\bar{\tau}$，方差 nb^2 和分布的峰值 $(n-1)b$. 现在我们把 n 取为正整数. 把 $b = \bar{\tau}/n$ 代入上式得

$$g_{n,\bar{\tau}} = \frac{n^n \tau^{n-1}}{(n-1)!\bar{\tau}^n}\mathrm{e}^{-n\tau/\bar{\tau}}.$$

其方差为 $\bar{\tau}^2/n$. $\bar{\tau}$ 是时滞的平均位置，当 $\bar{\tau}$ 固定后，n 就确定了分布的宽度. 这种分布足以满足实际问题的需要，并且给数学分析带来很大的方便.

对模型(4.8.13)进行分析时，从理论上讲，初值可以取为非负连续有界函数或更广泛的函数. 但实验数据表明，在用药之前，病毒在患者体内维持一个相对不变的水平. 为了反映这一事实，当 $t \leqslant 0$ 时，我们设病毒以及产生病毒的感染细胞都维持在一个常量水平，也就是，$\frac{\mathrm{d}T^*}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(V_I + V_{NI}) = 0$. 进而，我们设在治疗之前 $V_{NI} = 0$. 因此，初值条件为

$$T^*(t) \equiv T_0^*, \qquad V_I(t) \equiv V_0, \qquad V_{NI} \equiv 0, \qquad t \in (-\infty, 0].$$

为方便起见，我们让 $t = 0$ 是药物实际进入细胞的时间；而当 $t < 0$ 时，由于系统中没有药物，我们设 $n_{rt} = n_p = 0$；当 $t > 0$ 时，我们设蛋白酶抑制剂和反转录抑制剂同时都起了作用，因此有 $n_{rt} = n_p > 0$.

(4.8.13)是一个线性系统，原点是平衡点. 为了使得 $\bar{\tau} = 0$ 时平衡点的位置不变，我们需要 $\int_0^\infty f(\tau)\mathrm{e}^{-m\tau}\mathrm{d}\tau = 1$. 然而对模型(4.8.13)而言，由于 $\int_0^\infty f(\tau)\mathrm{d}\tau = 1$，显然有 $\int_0^\infty f(\tau)\mathrm{e}^{-m\tau}\mathrm{d}\tau < 1$. 为了解决这个问题，我们把(4.8.13)改写为

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}T^*}{\mathrm{d}t} &= (1 - n_{rt})\bar{\kappa}T_0\int_0^\infty g_{n,b'}(\tau)V_I(t-\tau)\mathrm{d}\tau - \delta T^*, \\
\frac{\mathrm{d}V_I}{\mathrm{d}t} &= (1 - n_p)N\delta T^* - cV_I, \\
\frac{\mathrm{d}V_{NI}}{\mathrm{d}t} &= n_p N\delta T^* - cV_{NI},
\end{aligned} \tag{4.8.14}$$

这里 $\bar{\kappa} = \frac{\kappa}{(1+mb)^n}$，$b' = \frac{b}{1+mb}$，$\int_0^\infty g_{n,b'}(\tau)\mathrm{d}\tau = 1$. 下面就研究系统(4.8.14). 它的特征方程为

$$(\lambda + c)[\lambda^2 + (\delta + c)\lambda + \delta c - (1 - \eta_c)N\delta\bar{\kappa}T_0F(\lambda)] = 0, \tag{4.8.15}$$

这里 $\eta_c = 1 - (1 - n_p)(1 - n_{rt})$ 是综合治疗的效率，而 $F(\lambda)$ 是时滞核的 Laplace 变换

$$F(\lambda)\equiv\int_0^\infty g_{n,b'}(\tau)\mathrm{e}^{-\lambda\tau}\mathrm{d}\tau=(1+b'\lambda)^{-n}.\tag{4.8.16}$$

把 $b'=\bar{\tau}'/n$ 代入,得

$$F(\lambda,\bar{\tau})\equiv F(\lambda)=\left(1+\lambda\frac{\bar{\tau}}{n}\right)^{-n},$$

这里为了记号上的方便,我们把 $\bar{\tau}'$ 仍然记为 $\bar{\tau}$.

由于 $\lambda=-c$ 是一个特根,我们只需考虑方程

$$H(\lambda,\bar{\tau})\equiv P(\lambda)-K(\lambda)F(\lambda,\bar{\tau})=0,\tag{4.8.17}$$

这里 $P(\lambda)=\lambda^2+(\delta+c)\lambda+\delta c, K(\lambda)=(1-\eta_c)N\delta\bar{\kappa}T_0$.

如果 $\bar{\tau}=0$,容易知道所有特征根的实部为负的条件为 $c>(1-\eta_c)N\bar{\kappa}T_0$. 现在设 $c>(1-\eta_c)N\bar{\kappa}T_0$ 成立. 则当 $\bar{\tau}>0$ 时,平衡点稳定性改变的必要条件是方程 $H(\lambda,\bar{\tau})=0$ 有纯虚根.

引理4.8.1[36]　设 $c>(1-\eta_c)N\bar{\kappa}T_0$. 记 $L(\lambda)=P(\lambda)/K(\lambda)$. 如果对所有的 ω 都有 $|L(i\omega)|>1$,则方程 $H(\lambda,\bar{\tau})=0$ 没有纯虚根.

证明　用反证法. 注意到 $F(i\omega)=\int_0^\infty g_{n,b'}(\tau)\mathrm{e}^{-i\omega\tau}\mathrm{d}\tau$,并且 $|F(i\omega)|\leqslant\int_0^\infty g_{n,b'}(\tau)|\mathrm{e}^{-i\omega\tau}|\mathrm{d}\tau\leqslant\int_0^\infty g_{n,b'}(\tau)\mathrm{d}\tau=1$. 我们有 $|F(i\omega)|\leqslant1$. 如果有 ω 使得 $H(i\omega,\bar{\tau})=0$,则从 $P(i\omega)-K(i\omega)F(i\omega,\bar{\tau})=0$ 得

$$\left|\frac{P(i\omega)}{K(i\omega)}\right|=|F(i\omega)|\leqslant1.$$

于是 $|P(i\omega)|-|K(i\omega)|\leqslant0$. 另一方面,直接计算得

$$|P(i\omega)|^2=\omega^4+(\delta^2+c^2)\omega^2+(\delta c)^2,$$

$$|K(i\omega)|^2=((1-\eta_c)N\bar{\kappa}T_0\delta)^2.$$

因此,

$$\omega^4+(\delta^2+c^2)\omega^2+(\delta c)^2-((1-\eta_c)N\bar{\kappa}T_0\delta)^2\leqslant0.$$

但由于 $c>(1-\eta_c)N\bar{\kappa}T_0$,这个式子不可能成立. 这就证明了方程 $H(\lambda,\bar{\tau})=0$ 没有纯虚根. ∎

在治疗期间,一般来说病人体内 $CD4^+$ T 细胞的数量随时间增加而增加,这就引起了健康细胞的增加,而这又给病毒再度繁殖提供了条件. 为了研究这一情况,我们需要考虑健康细胞 T 的变化. 为此目的. 文献[36]把变量 T 加入到模型(4.8.14),得

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} &= s - d_T T - (1 - n_{rt})\kappa V_I T, \\
\frac{\mathrm{d}T^*}{\mathrm{d}t} &= (1 - n_{rt})\bar{\kappa}\int_0^{\infty} g_{n,b'}(\tau) V_I(t-\tau) T(t-\tau)\mathrm{d}\tau - \delta T^*, \\
\frac{\mathrm{d}V_I}{\mathrm{d}t} &= (1 - n_p) N\delta T^* - cV_I, \\
\frac{\mathrm{d}V_{NI}}{\mathrm{d}t} &= n_p N\delta T^* - cV_{NI}.
\end{aligned}
\tag{4.8.18}
$$

系统(4.8.18)有两个平衡点. 无感染平衡点为 $(s/d_T, 0, 0, 0)$. 感染平衡点是$(\bar{T}, \bar{T}^*, \bar{V}_I, \bar{V}_{NI})$,其中

$$
\bar{T} = \frac{c}{(1-\eta_c)N\bar{\kappa}}, \qquad \bar{T}^* = \frac{s\bar{\kappa}}{\delta\kappa} - \frac{d_T c}{(1-\eta_c)N\bar{\kappa}\delta},
$$

$$
\bar{V}_I = \frac{sN\bar{\kappa}(1-n_p)}{c\kappa} - \frac{d_T}{(1-n_{rt})\kappa}, \qquad \bar{V}_{NI} = \frac{n_p N\delta\bar{T}^*}{c},
$$

这里 $\eta_c = 1 - (1-n_p)(1-n_{rt})$,容易得出下面的引理

引理 4.8.2 感染平衡点存在的充要条件是

$$
\eta_c < 1 - \frac{d_T C}{SNk} \equiv \eta_{\mathrm{crit}}. \tag{4.8.19}
$$

如果 $\eta_c > \eta_{\mathrm{crit}}$,系统(4.8.18) 只有无感染平衡点.

从感染平衡点的表达式可以看出,当 s 增加时,$\bar{T}^*$ 和 $\bar{V}_I$ 都是增加的,因此 s 是一个"激活因子";而当 d_T 增加时,$\bar{T}^*$ 和 $\bar{V}_I$ 都是减少的,因此 d_T 是一个"抑制因子". 下面考虑无感染平衡点的稳定性. 系统(4.8.18)在无感染平衡点的线性化系统为

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} &= -d_T T - \frac{(1-n_{rt})\kappa s}{d_T} V_I, \\
\frac{\mathrm{d}T^*}{\mathrm{d}t} &= (1 - n_{rt})\frac{\bar{\kappa}s}{d_T}\int_0^{\infty} g_{n,b'}(\tau) V_I(t-\tau)\mathrm{d}\tau - \delta T^*, \\
\frac{\mathrm{d}V_I}{\mathrm{d}t} &= (1 - n_p) N\delta T^* - cV_I, \\
\frac{\mathrm{d}V_{NI}}{\mathrm{d}t} &= n_p N\delta T^* - cV_{NI}.
\end{aligned}
\tag{4.8.20}
$$

(4.8.20)的特征方程为

$$\det\begin{pmatrix} -d_T-\lambda & 0 & -\dfrac{(1-n_{rt})\kappa s}{d_T} & 0 \\ 0 & -\delta-\lambda & (1-n_{rt})\dfrac{\kappa s}{d_T}F(\lambda,\bar{\tau}) & 0 \\ 0 & (1-n_p)N\delta & -c-\lambda & 0 \\ 0 & n_pN\delta & 0 & -c-\lambda \end{pmatrix}=0.$$

化简得

$$(\lambda+d_T)(\lambda+c)\left[\lambda^2+(\delta+c)\lambda+\delta c-(1-\eta_c)N\delta\frac{\kappa\bar{s}}{d_T}F(\lambda,\bar{\tau})\right]=0. \tag{4.8.21}$$

$\lambda_1=-d_T,\lambda_2=-c$ 是两个特征根,另外两个特征根是方程

$$\lambda^2+(\delta+c)\lambda+\delta c-(1-\eta_c)N\delta\frac{\kappa\bar{s}}{d_T}F(\lambda,\bar{\tau})=0$$

的解.如果记 $T_0=s/d_T$,这个方程就变为方程(4.8.17).因此,无感染平衡点的稳定性可以用引理 4.8.1 来解决.

文献[36]还证明了感染平衡点在时滞为 0 时是稳定的,当时滞较小或较大时也是稳定的.

4.8.3　感染细胞与健康细胞的相互作用模型

文献[15]指出,在 HIV 的实验研究中,对组织培养做实验要比血管容易些,另外,HIV 在淋巴节和脑中要活跃的多,而在这些地方,健康细胞和感染细胞之间的作用要比自由病毒重要的多.基于这些理由 ,文献[15]提出了下面的模型

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t}&=r_CC(t)\left(1-\frac{C(t)+I(t)}{C_M}\right)-\kappa_IC(t)I(t),\\ \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}&=\kappa'_I\int_{-\infty}^{t}C(u)I(u)F(t-u)\mathrm{d}u-\mu_II(t),\end{aligned} \tag{4.8.22}$$

这里 C 和 I 分别是健康细胞和感染细胞的浓度,r_C 是健康细胞再生产的速率,C_M 是系统对细胞的有效容纳量,k_I 表示感染细胞对健康细胞的传染力,时滞核 F 仍取 Γ 分布

$$F(u)=\frac{\alpha^{n+1}u^n}{n!}\mathrm{e}^{-\alpha u}.$$

对第二个方程的解释和上一小节类似.这个模型只考虑了健康细胞和感染细胞之间的作用,而忽略了自由病毒浓度的变化.

模型(4.8.22)的初值取为

$$C(s)=\phi(s)\geqslant 0,\qquad I(s)=\psi(s)\geqslant 0,\qquad s\in(-\infty,0],$$

这里 ϕ 和 ψ 都是连续有界函数.

在实际应用中,时滞核中的 n 经常取为 0 或 1,即

$$F(u)=\alpha e^{-\alpha u} \qquad 或 \qquad F(u)=\alpha^2 u e^{-\alpha u}.$$

它们分别称为弱核函数和强核函数.

系统(4.8.22)有平凡平衡点 $E_0=(0,0)$ 和健康平衡点 $E_1=(C_M,0)$. 当 $\kappa'_I>\mu_I/C_M$ 时,系统(4.8.22)还有感染平衡点 $\bar{E}=(\bar{C},\bar{I})$, 这里

$$\bar{C}=\frac{\mu_I}{\kappa'_I},\quad \bar{I}=\frac{r_C(\kappa'_I C_M-\mu_I)}{\kappa'_I(\kappa_I C_M+r_C)}.$$

下面取弱核函数来研究系统(4.8.22)在感染平衡点的稳定性. 令

$$X(t)=\int_{-\infty}^{t}\alpha e^{-\alpha(t-u)}C(u)I(u)\mathrm{d}u. \tag{4.8.23}$$

则把系统(4.8.22)转化到它的等价系统

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t}&=r_C C(t)\left(1-\frac{C(t)+I(t)}{C_M}\right)-\kappa_I C(t)I(t),\\
\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}&=\kappa'_I X(t)-\mu_I I(t),\\
\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}&=\alpha C(t)I(t)-\alpha X(t).
\end{aligned} \tag{4.8.24}$$

在 $\kappa'_I>\mu_I/C_M$ 的条件下,系统(4.8.24)有惟一的正平衡点 $\bar{E}=(\bar{C},\bar{I},\bar{X})$,这里 $\bar{X}=\mu_I\bar{I}/\kappa'_I$. 对系统(4.8.24)在正平衡点处线性化,然后求特征方程,得

$$\lambda^3+a_1(\alpha)\lambda^2+a_2(\alpha)\lambda+a_3(\alpha)=0, \tag{4.8.25}$$

这里

$$\begin{aligned}
a_1(\alpha)&=\frac{r_C}{C_M}\bar{C}+\mu_I+\alpha,\\
a_2(\alpha)&=\alpha(\frac{r_C}{C_M}\bar{C})+\frac{\mu_I r_C}{C_M}\bar{C},\\
a_3(\alpha)&=\alpha(\kappa'_I+\frac{r_C}{C_M})\mu_I\bar{I}.
\end{aligned}$$

根据霍维茨判据,正平衡点渐近稳定的充要条件为:对所有的 $\alpha>0$,

$$a_1(\alpha)>0, a_3(\alpha)>0, a_1(\alpha)a_2(\alpha)-a_3(\alpha)>0. \tag{4.8.26}$$

如果存在 $\alpha_0>0$,使得

$$a_1(\alpha_0)a_2(\alpha_0)=a_3(\alpha_0), \tag{4.8.27}$$

则特征方程(4.8.25)变为

$$[\lambda+a_1(\alpha_0)][\lambda^2+a_2(\alpha_0)]=0.$$

而这个方程的根为

$$\lambda_1 = -a_1(\alpha_0) < 0, \quad \lambda_{2,3} = \pm i\sqrt{a_2(\alpha_0)}.$$

如果横截条件

$$\left.\frac{d\mathrm{Re}\lambda_{2,3}}{d\alpha}\right|_{\alpha=\alpha_0} \neq 0,$$

则 Hopf 分枝定理表明当 α 穿越 α_0 时系统(4.8.24)有周期解.总结以上的讨论,就有

定理4.8.3　设 $\kappa'_I > \mu_I/C_M$.则当(4.8.26)成立时,$\bar{E}$ 是渐近稳定的.如果 $a_1(\alpha_0) > 0, a_3(\alpha_0) > 0$,存在 $\alpha_0 > 0$ 使得(4.8.27)成立,并且有

$$\frac{d\mathrm{Re}\lambda_{2,3}}{d\alpha}\Big|_{\alpha=\alpha_0} \neq 0,$$

则当 α 穿越 α_0 时系统(4.8.24)有周期解.

文献[15]还给出例子,说明有适当的参数满足这个定理的条件.

当分布函数 F 取强核时,通过类似的讨论可以得到正平衡点的稳定性和周期解的存在性.

§4.9　嗜菌体传染模型

Beretta 和 Kuang[4] 根据生物学家 A. Okubo 对海洋生物的观察结果提出了一类嗜菌体传染模型.所考虑的问题是一些海洋细菌被病毒(嗜菌体)所感染.感染过程为:许多病毒进攻细菌的细胞壁,但只有一个病毒的头部(核酸)能进入细胞壁的小孔,带病毒的核酸进入后将控制细胞的新陈代谢,并让其合成出更多的带病毒的核酸以及让这些核酸成熟的物质.最后一个阶段是细胞溶解,细胞壁破裂而释放出病毒颗粒,这些病毒颗粒又可以感染其它细菌.根据上面所描述的情况,我们用 N 表示细菌种群的浓度,用 P 表示病毒的浓度.我们做如下基本假设

(A1) 在没有病毒存在时,细菌种群密度的增长服从 Logistic 方程

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = \alpha N\left(1 - \frac{N}{C}\right), \tag{4.9.1}$$

这里 α 是增长率,而 C 是容纳量.

(A2) 当病毒出现时,细菌种群分为两类:易感性细菌和染毒细菌.它们的浓度分别用 S 和 I 表示.因而有 $N = S + I$.

(A3) 只有易感性细菌能够按照 Logistic 规律来再生产,染毒细菌由于细胞溶解而没有机会再生产,但染毒细菌对容纳量有作用.

(A4) 假设 K 是单位浓度的病毒对单位浓度的易感性细菌的平均攻击率.于是有

$$\frac{dS}{dt}=\alpha S\left(1-\frac{N}{C}\right)-KSP. \tag{4.9.2}$$

(A5) 染毒细菌的死亡率为 μ_i,一个染毒细菌在溶解裂变时平均产生 b 个病毒颗粒.

(A6) 病毒颗粒的死亡率为 μ_p.

在以上基本假设之下,就有模型

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt}&=\alpha S\left(1-\frac{N}{C}\right)-KSP,\\ \frac{dI}{dt}&=KSP-\mu_i I,\\ \frac{dP}{dt}&=-KSP+b\mu_i I-\mu_p P.\end{aligned} \tag{4.9.3}$$

在文献[5]中,Beretta 和 Kuang 对上面的模型作了进一步的改进,考虑了病毒感染的潜伏期.用 T 表示最大的潜伏时间.在任意时刻 t,染毒细菌的浓度 $I(t)$ 应该是

$$I(t)=\int_0^T KS(t-\tau)I(t-\tau)e^{-\mu_i\tau}d\tau, \tag{4.9.4}$$

这里 $KS(t-\tau)I(t-\tau)$ 是在时刻 $t-\tau$ 细胞被感染的速率,$e^{-\mu_i\tau}$ 表示这些细胞经过时间 τ 以后仍然存活的概率.把(4.9.4)微分得

$$\frac{dI}{dt}=KS(t)P(t)-Ke^{-\mu_i T}S(t-\tau)I(t-\tau)-\mu_i I(t). \tag{4.9.5}$$

从这个方程可以看出,$\mu_i I$ 是染毒细菌在时刻 t 死亡的速率,而溶解裂变的速率为 $Ke^{-\mu_i T}S(t-\tau)I(t-\tau)$.由于一个染毒细菌在裂变时产生 b 个病毒,我们有

$$\frac{dP}{dt}=-KS(t)P(t)+bKe^{-\mu_i T}S(t-\tau)I(t-\tau)-\mu_p P(t). \tag{4.9.6}$$

在海洋中,考虑病毒从周围区域过来的迁入显然是合理的,为讨论方便,做进一步的假设

(A7) 设嗜菌体从周围区域迁入的速率 β 是非负常数.

根据以上讨论就有模型

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt}&=\alpha S(t)\left(1-\frac{S(t)+I(t)}{C}\right)-KS(t)P(t),\\ \frac{dI}{dt}&=KS(t)P(t)-Ke^{-\mu_i T}S(t-\tau)I(t-\tau)-\mu_i I(t),\\ \frac{dP}{dt}&=\beta-KS(t)P(t)+bKe^{-\mu_i T}S(t-\tau)I(t-\tau)-\mu_p P(t),\end{aligned} \tag{4.9.7}$$

其中 $b\in[1,+\infty)$,$T\in[0,+\infty)$,$\mu_i\in[0,+\infty)$.

下面分别就 $\beta=0$ 和 $\beta>0$ 两种情况来讨论模型(4.9.7)的平衡点.

(A) 设 $\beta > 0$. 记 $C_p = \beta/\mu_p$, C_p 表示嗜菌体的容纳量. 模型(4.9.7)的平衡点是下面方程组的解

$$\begin{aligned} &S[\alpha(C-(S+I))-KCP]=0,\\ &-\mu_i I+KSP\delta(T)=0,\\ &\mu_p(C_p-P)+KSP\Delta(T)=0, \end{aligned} \tag{4.9.8}$$

这里

$$\Delta(T)=be^{-\mu_i T}-1,\qquad \delta(T)=1-e^{-\mu_i T}.$$

显然有 $\Delta(T)\in(-1,b-1)$, $\delta(T)\in(0,1)$. 当 $T=T^*\equiv(\ln b)/\mu_i$ 时, 还有 $\Delta(T)=0$.

通过直接计算可得下面三个命题

命题 4.9.1　设 $T=T^*$. 则当 $C_p<\alpha/K$ 时, (4.9.7)有惟一的正平衡点

$$E_+=\left(\frac{C(\alpha-KC_p)}{\alpha(1+\sigma C_p)},\frac{\sigma C_p C(\alpha-KC_p)}{\alpha(1+\sigma C_p)},C_p\right),$$

这里 $\sigma=K\delta(T)/\mu_i$.

命题 4.9.2　设 $T<T^*$. 则当 $C_p<\alpha/K$ 时, (4.9.7) 有惟一的正平衡点.

命题 4.9.3　设 $T>T^*$. 则当 $C_p<\alpha/K$ 时, (4.9.7) 有惟一的正平衡点 $E_+=(S^*,I^*,P^*)$, 其中 $P^*\in(0,C_p)$, $S^*\in(0,C)$.

(B) 设 $\beta=0$. 记

$$b^*=1+\mu_p/(KC),\qquad T_c=\frac{1}{\mu_i}\ln\frac{b}{b^*}.$$

容易看出, $E_0=(0,0,0)$ 和 $E_f=(C,0,0)$ 始终是(4.9.7) 的平衡点. 通过直接计算可得

命题 4.9.4　设 $0<T<T_c$ 时, (4.9.7)有惟一的正平衡点

$$E_+=(S^*,I^*,P^*)=\left(\frac{\mu_p}{K\Delta(T)},\sigma S^*T^*,\frac{\alpha(C-S^*)}{KC+\alpha\sigma S^*}\right).$$

尽管命题 4.9.2 和命题 4.9.3 都给出了正平衡点的存在惟一性, 但命题 4.9.3还进一步给出了平衡点位置的估计.

下面讨论平衡点的稳定性. 不难得到下面命题

命题 4.9.5　设 $\beta>0$. 则当 $\alpha/K<C_p$ 时, 平衡点 $E_p=(0,0,C_p)$ 是渐近稳定的. 如果 $\alpha/K>C_p$, 则这个平衡点是不稳定的.

当 $\beta=0$ 时, 我们有

命题 4.9.6　设 $\beta=0$. 则平衡点 $E_0=(0,0,0)$ 始终是不稳定的. 又当 $T>T_c$ 时, 平衡点 $E_f=(C,0,0)$ 是渐近稳定的, 而当 $T<T_c$ 时, 平衡点 $E_f=(C,0,0)$ 是不稳定的.

证明 只讨论平衡点 $E_f = (C,0,0)$ 的稳定性. 在 E_f 处，系统(4.9.7)的特征方程为

$$\begin{vmatrix} -(a+\Lambda) & -a & -KC \\ 0 & -(\mu_i+\Lambda) & KC(1-\mathrm{e}^{-(\mu_i+\Lambda)T}) \\ 0 & 0 & -(\mu_p+KC-KCb\mathrm{e}^{-(\mu_i+\Lambda)T}+\Lambda) \end{vmatrix} = 0.$$

显然，$\Lambda_1 = -\alpha, \Lambda_2 = -\mu_i$ 是两个负特征根. 其它特征根满足方程

$$g(\Lambda) \equiv \mu_p + KC - bKC\mathrm{e}^{-\mu_i T}\mathrm{e}^{-\Lambda T} + \Lambda = 0. \tag{4.9.9}$$

当 $T = T_c$ 时，我们有 $g(\Lambda) = a - a\mathrm{e}^{-\Lambda T} + \Lambda$，这里 $a = \mu_p + KC$. 此时，$\Lambda = 0$ 也是一个特征根. 如果 $\Lambda = u + iv$ 是 $g(\Lambda)$ 一个根，则必有 $u \leqslant 0$，这是因为 $(a+u)^2 + v^2 = a^2\mathrm{e}^{-2uT}$. 因而，当 $T = T_c$ 时特征方程没有正实部的特征根.

现在考虑 $T > T_c$，也就是

$$\mu_p + KC > bKC\mathrm{e}^{-\mu_i T}.$$

由 $g(\Lambda) = 0$ 得

$$\mu_p + KC + \Lambda = bKC\mathrm{e}^{-(\mu_i+\Lambda)T}\mathrm{e}^{-\Lambda T}.$$

如果 $\mathrm{Re}\Lambda \geqslant 0$，则有

$$|\mu_p + KC + \Lambda| \geqslant |\mu_p + KC| > bKC\mathrm{e}^{-(\mu_i+\Lambda)T}|\mathrm{e}^{-\Lambda T}|.$$

这说明 $g(\Lambda) = 0$ 的根都具有负实部. 因而，当 $T > T_c$ 时平衡点 E_f 是渐近稳定的.

当 $T < T_c$ 时，也就是

$$\mu_p + KC < bKC\mathrm{e}^{-\mu_i T}.$$

由于 $g(0) < 0, g(+\infty) = +\infty$，因此 $g(\Lambda) = 0$ 具有正实部的特征根. 因而平衡点 E_f 是不稳定的. ▌

地方病平衡点稳定性的分析是十分困难的. 由于这个原因，文献[5]对原问题做了简化. 在模型(4.9.7)中，通过忽略感染细菌对环境容纳量的影响并设 $\beta = 0$，则模型(4.9.7)简化为

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \alpha S(t)\left(1 - \frac{S(t)}{C}\right) - KS(t)P(t), \tag{4.9.10}$$

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = -KS(t)P(t) + bK\mathrm{e}^{-\mu_i T}S(t-\tau)I(t-\tau) - \mu_p P(t).$$

对模型(4.9.10)而言，$E_0 = (0,0)$ 和 $E_f = (C,0)$ 始终是平衡点. 如果 $\mu_i > 0$，则当 $b > b^* = 1 + \mu_p/(KC)$，并且 $T < T_c$ 时，模型(4.9.10)还有地方病平衡点 $E_+ = (S^*, P^*)$，这里

$$S^* = \frac{\mu_p}{K(be^{\mu_i T} - 1)}, \qquad P^* = \frac{\alpha}{K}\left(1 - \frac{S^*}{C}\right).$$

如果 $\mu_i = 0$,则当 $b > b^*$ 时,地方病平衡点 $E_+ = (S^*, P^*)$ 变为

$$S^* = \frac{\mu_p}{K(b-1)}, \qquad P^* = \frac{\alpha}{K}\left(1 - \frac{S^*}{C}\right).$$

现在地方病平衡点与潜伏期 T 无关.

对于 $\mu_i > 0$ 和 $\mu_i = 0$ 两种情况,均记

$$\zeta = \frac{S^*}{C} = \frac{b^* - 1}{be^{-\mu_i T} - 1}, \quad p^* = \frac{P^*}{C} = \frac{\alpha}{KC}(1 - \zeta).$$

则 $\zeta \in (0,1)$. 当 $\mu_i > 0$ 时,ζ 是 $T, T \in [0, T_c]$,的单调增函数. 当 $\mu_i = 0$ 时,ζ 是 $b, b \in (b^*, +\infty)$,的单调减函数.

在平衡点 E_+ 的特征方程为

$$\begin{vmatrix} -(\alpha\zeta + \Lambda) & -KC\zeta \\ -\dfrac{p^*}{\zeta}(KC\zeta - \beta(\zeta)e^{-\Lambda T}) & -\beta(\zeta)(1 - e^{-\Lambda T}) - \Lambda \end{vmatrix} = 0,$$

这里 $\beta(\zeta) = \mu_p + KC\zeta$. 化简得

$$\Lambda^2 + a\Lambda + b\Lambda e^{-\Lambda T} + c + de^{-\Lambda T} = 0, \tag{4.9.11}$$

这里

$$a = \alpha\zeta + \beta(\zeta), b = -\beta(\zeta), c = -d + \alpha\mu_p(1-\zeta), d = \alpha(1-2\zeta)\beta(\zeta).$$

由于 $\zeta \in (0,1)$,我们有 $c + d > 0$. 由此得知 $T = 0$ 时特征根的实部都是负的.

让 T 从 0 开始增加,有可能出现特征根从虚轴的左边穿到虚轴的右边而产生稳定性改变的情况. 为发现这种情况,把 $\Lambda = \pm i\omega, \omega > 0$,代入特征方程得

$$\omega^2 = \frac{1}{2}\{(b^2 + 2c - a^2) \pm [(b^2 + 2c - a^2)^2 - 4(c^2 - d^2)]^{\frac{1}{2}}\}.$$

容易验证

$$b^2 + 2c - a^2 < 0, \qquad \zeta \in (0,1).$$

因此 $c^2 \geqslant d^2$ 时,没有特征根 $\Lambda = \pm i\omega, \omega > 0$.

当 $c^2 < d^2$ 时,有一对纯虚根 $\Lambda = \pm i\omega_+, \omega_+ > 0$,使得

$$\frac{\mathrm{dRe}(\Lambda)}{\mathrm{d}\zeta}\Big|_{\Lambda = \pm i\omega_+} > 0. \tag{4.9.12}$$

通过分析函数

$$\phi(\zeta) \equiv d^2(\zeta) - c^2(\zeta) = (1-\zeta)[-\alpha^2\mu_p^2(1-\zeta) + 2\alpha^2\mu_p(1-2\zeta)\beta(\zeta)]$$

的性态,就可以得到下面的结论

引理 4.9.1 存在惟一的 $\zeta_1, \zeta_1 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$,使得当 $\zeta \in (0, \zeta_1)$ 时,$d^2(\zeta) >$

$c^2(\zeta)$;而当 $\zeta \in (\zeta_1, 1)$ 时,$d^2(\zeta) < c^2(\zeta)$.

利用这个引理可以证明下面的定理

定理 4.9.1 记

$$b_c = (b^* - (1 - \zeta_1))/\zeta_1.$$

1) 如果 $\mu_i > 0$,则当 $b \in (b^*, b_c)$ 时,平衡点 E_+ 的稳定性不会改变;对所有的 $T \in [0, T_c]$,这个平衡点是渐近稳定的.

2) 设 $\mu_i = 0$. 则当 $b \in (b^*, b_c)$ 时,平衡点 E_+ 的稳定性不会改变;对所有的 $T > 0$,这个平衡点是渐近稳定的. 进而,当 $b > b_c$ 时,存在 $T_0 > 0$,使得当 $T \in (0, T_0)$ 时,E_+ 是渐近稳定的,当 $T > T_0$ 时 E_+ 是不稳定的,其中

$$T_0 = \frac{\theta_1}{\omega_+}, \quad 0 \leqslant \theta_1 \leqslant 2\pi, \tag{4.9.13}$$

而 θ_1 满足

$$\sin\theta_1 = \frac{da\omega_+ - b\omega_+(c - \omega_+^2)}{b^2\omega_+^2 + d^2}, \quad \cos\theta_1 = -\frac{ab\omega_+^2 + (c - \omega_+^2)d}{b^2\omega_+^2 + d^2}. \tag{4.9.14}$$

证明 1) 注意到 $\zeta(T) = (b^* - 1)/(be^{-\mu_i T} - 1)$ 是 T 的单调增函数. 如果 $\zeta(0) > \zeta_1$(也就是 $b \in (b^*, b_c)$),则对所有的 $T \in [0, T_c]$,有 $\zeta(T) > \zeta_1$. 再由引理 4.9.1,特征方程(4.9.11) 没有 $\Lambda = \pm i\omega(\omega > 0)$ 形式的特征根.

2) 当 $\mu_i = 0$ 时,地方病平衡点与 T 无关. 因此特征方程的系数也与 T 无关. 在这种情况下,我们可以应用文献[27] 第 83 页中的定理 4.1 来讨论稳定性. 如果 $b \in (b^*, b_c]$,则有 $\zeta > \zeta_1$. 由引理 4.9.1 知 $\Lambda = \pm i\omega, \omega > 0$,这种特征根不可能出现. 因此 E_+ 的稳定性不会改变. 如果 $b > b_c$,则有 $\zeta < \zeta_1$. 于是当 T 取值为

$$T_n = \frac{\theta_1}{\omega_+} + \frac{2n\pi}{\omega_+}, n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$$

时,我们有 $\Lambda = \pm i\omega(\omega > 0)$ 这样的特征根,其中 θ_1 满足(4.9.14). 容易知道稳定开关出现在 $T = \theta_1/\omega_+$. ▌

§4.10 具有种群发育时滞的 SIS 模型

Cooke, van den Driessche 和 Zou[12] 提出了具有种群发育时滞的传染病模型. 本节介绍他们的工作. 首先取种群的动力学结构方程为

$$\frac{dN}{dt} = B(N)N - dN, \tag{4.10.1}$$

这里 N 是种群的数量,d 是种群的死亡率,$B(N)$ 是种群的出生率. 现在我们把

代表种群发育时间的时滞引入到(4.10.1). 设种群需要 $m+1$ 个阶段才能成熟,例如可以考虑一个种群的胚胎期,幼年期和成年期 3 个阶段. 用 T_1 表示胚胎期的长度, d_1 表示种群在胚胎期的死亡率,则在胚胎期时刻 t 种群的数量为

$$E(t)=\int_{t-T_1}^{t}B(N(s))N(s)e^{-d_1(t-s)}\mathrm{d}s,$$

这里 N 是成年种群的数量. 这个式子给出了种群从胚胎期进入幼年期的速率

$$B(N(t-T_1))N(t-T_1)\mathrm{e}^{-d_1T_1}.$$

类似地,种群进入成年期的速率为

$$B(N(t-T_1-T_2))N(t-T_1-T_2)\mathrm{e}^{-(d_1T_1+d_2T_2)},$$

这里 T_2 是种群在幼年期所需要的时间, d_2 是种群在幼年期的死亡率. 如果一个种群有 $m+1$ 个阶段,则进入成年阶段的速率为

$$B(N(t-T_1-\cdots-T_m))N(t-T_1-\cdots-T_m)\mathrm{e}^{-(d_1T_1+\cdots+d_mT_m)},$$

这里 T_j 是种群在第 j 个阶段所需要的时间, d_j 是种群在第 j 个阶段的死亡率. 为讨论方便起见,我们设 $d_1=d_2=\cdots=d_m$. 记 $T=T_1+\cdots+T_m$. 则成年种群满足下面方程

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=B(N(t-T))N(t-T)\mathrm{e}^{-d_1T}-dN(t). \tag{4.10.2}$$

现在以种群动力学方程 (4.10.1) 和(4.10.2) 为基础来建立 SIS 传染病模型. 由于考虑 SIS 模型,我们有 $N=S+I$. 我们只考虑水平传染,引入因病死亡率,并采用标准发生率,在不考虑发育时滞时,模型为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}&=B(N)N-\mathrm{d}S-\frac{\lambda SI}{N}+\gamma I,\\\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}&=\frac{\lambda SI}{N}-(d+\varepsilon+\gamma)I,\end{aligned} \tag{4.10.3}$$

这里 $\varepsilon\geqslant0$ 是因病死亡率, $\gamma>0$ 是感染者的恢复率, $\lambda>0$ 是有效接触系数.

为了把发育时滞引入到模型(4.10.3),我们把种群划分成两个阶段:幼年群体和成年群体. 设疾病只在成年群体中传播,不在未成年中传播;还设从幼年阶段刚进入到成年组的个体都是易感者. 从上面的讨论知,从幼年阶段进入成年阶段的速率为 $B(N(t-T))N(t-T)\mathrm{e}^{-d_1T}$. 在这些假设下,模型(4.10.3)修改为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}&=\lambda(N(t)-I(t))\frac{I(t)}{N(t)}-(d+\varepsilon+\gamma)I(t),\\\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}&=B(N(t-T))N(t-T)\mathrm{e}^{-d_1T}-dN(t)-\varepsilon I(t).\end{aligned} \tag{4.10.4}$$

对出生率函数 B 作三条基本假设:

(A1) $B(N)>0$;

(A2) $B(N)$ 是连续可微的,并且 $B'(N)<0$;

(A3) $B(0+) > (d+\varepsilon)e^{d_1 T}$，并且 $de^{d_1 T} > B(\infty)$.

假设(A1)的意义是明显的，(A2)意味着种群是密度制约的，而(A3)用来保证种群是持续生存的.

对模型(4.10.4)来说，基本再生数是

$$R_0 = \frac{\lambda}{d+\varepsilon+\gamma}.$$

当没有时滞时，文献[12]证明再生数 R_0 是划分疾病流行与消失的阈值.

定理 4.10.1　对模型(4.10.3)来说，设(A1)～(A3)成立(条件(A3)中的 $T=0$). 如果 $R_0<1$，则当 $t\to\infty$ 时，$I(t)\to 0$，并且 $N(t)\to N_e = B^{-1}(d)$，也就是疾病最后会消失；如果 $R_0>1$，则只要 $I(0)>0$，当 $t\to\infty$ 时，就有 $N(t)\to N^* = B^{-1}(d+\varepsilon(1-1/R_0))$，$I(t)\to I^* = (1-\frac{1}{R_0})N^*$，也就是疾病会流行.

证明　第一部分的证明是平凡的，只给出第二部分的证明. 模型(4.10.3)等价于

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} &= \lambda(N(t)-I(t))\frac{I(t)}{N(t)} - (d+\varepsilon+\gamma)I(t),\\ \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} &= B(N(t))N(t) - dN(t) - \varepsilon I(t).\end{aligned} \tag{4.10.5}$$

当 $R_0>1$ 时，模型(4.10.5)有地方病平衡点(I^*, N^*). 在这个地方的 Jacobian 矩阵为

$$J = \begin{pmatrix} -\lambda(1-\frac{1}{R_0}) & \lambda(1-\frac{1}{R_0})^2 \\ -\varepsilon & \varepsilon(1-\frac{1}{R_0}) + B'(N^*)N^* \end{pmatrix}.$$

由(A2)知 $N'(N^*)<0$. 又由于 $R_0>1$ 意味着 $\lambda>\varepsilon$，我们就容易得知 $\det(J)>0$，$\mathrm{tr}(J)<0$. 因而平衡点(I^*, N^*)是渐近稳定的. 如果把系统(4.10.5)的第一个方程的右端记为 P，第二个方程的右端记为 Q，则有

$$\frac{\partial}{\partial I}\left(\frac{P}{NI}\right) + \frac{\partial}{\partial N}\left(\frac{Q}{NI}\right) < 0.$$

因此，模型(4.10.5)的地方病平衡点是全局稳定的. ∎

下面考虑时滞 $T>0$ 的情形. 首先，容易得到下面两个定理

定理 4.10.2　设模型(4.10.4)满足(A1)～(A3). 如果 $R_0\leqslant 1$，则只有无病平衡点 $E_0=(0, B^{-1}(de^{d_1 T}))$. 如果 $R_0>1$，则模型还有地方病平衡点 $E_e=(I^*, N^*)$，这里

$$N^* = B^{-1}\left(\left(d+\varepsilon\left(1-\frac{1}{R_0}\right)\right)e^{d_1 T}\right),\quad I^* = \left(1-\frac{1}{R_0}\right)N^*.$$

定理 4.10.3　设模型(4.10.4)满足(A1)~(A3). 如果 $R_0 < 1$,则当 $t \to \infty$ 时,$I(t) \to 0$.

Zhao 和 Zou 在文献[51]中补充了一个条件

(A4) $(B(N)N)' > 0, \quad \forall N \in (0,\infty)$.

加了补充条件(A4)以后,他们证明了再生数 R_0 仍然是划分疾病流行与消失的阈值. 为了阅读方便,我们先介绍单调时滞微分方程的一些基本概念. 用 C 表示 $C([-T,0],R^n)$(也就是$[-T,0]$上的连续函数组成的 Banach 空间),用 C_+ 表示 $C([-T,0],R^n_+)$. 设 $\phi = (\phi_1,\cdots,\phi_n) \in C$,$\psi = (\psi_1,\cdots,\psi_n) \in C$,如果 $\phi_i(\theta) \leqslant \psi_i(\theta)$,$\theta \in [-T,0]$,$i = 1,\cdots,n$,我们就称 $\phi \leqslant \psi$. 这也等价于 $\psi - \phi \in C_+$.

考虑

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(t,x_t), \tag{4.10.6}$$

这里,$f: \Omega \to R^n$ 在Ω上连续,而 Ω 是 $R^n \times C$ 的一个开子集,f 关于第2个分量在 Ω 的每一个紧子集上满足 Lipschitz 条件. 用 $x(t,t_0,\phi,f)$ 表示系统(4.10.6)过(t_0,ϕ)的解.

考虑拟单调条件

(Q) 只要 $\phi \leqslant \psi$,并且对某一个 i,有 $\phi_i(0) = \psi_i(0)$,就有 $f_i(t,\phi) \leqslant f_i(t,\psi)$,我们就称 f 满足拟单调条件.

定理 4.10.4[41]　设泛函 $f,g: \Omega \to R^n$ 在Ω上连续,关于第2个分量在Ω的每一个紧子集上满足 Lipschitz 条件,并且 f 或 g 满足拟单调条件(Q). 进而设对所有的$(t,\phi) \in \Omega$,有 $f(t,\phi) \leqslant g(t,\phi)$. 如果$(t_0,\phi)$,$(t_0,\psi) \in \Omega$ 满足 $\phi \leqslant \psi$,则解 $x(t,t_0,\phi,f)$ 和 $x(t,t_0,\psi,g)$ 在共同存在区间上,满足

$$x(t,t_0,\phi,f) \leqslant x(t,t_0,\psi,g).$$

这个定理表明,对时滞微分系统而言,当拟单调条件成立时,比较方法仍然可以使用.

现在以定理 4.10.4 为基础来证明 再生数 R_0 是划分疾病流行与消失的阈值.

为了记号上的方便,我们把(4.10.4)改写为

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} &= \lambda F(I(t),N(t)-I(t)) - (d+\varepsilon+\gamma)I(t), \\ \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} &= G(N(t-T))\mathrm{e}^{-d_1 T} - dN(t) - \varepsilon I(t). \end{aligned} \tag{4.10.7}$$

注意到 $N = S + I$ 满足

$$\frac{dN}{dt} \leqslant G(N(t-T))e^{-d_1 T} - dN(t).$$

由于(A4)成立,方程

$$\frac{dN}{dt} = G(N(t-T))e^{-d_1 T} - dN(t) \tag{4.10.8}$$

满足拟单调条件(Q)的要求.又由(A1)知,当 A 充分大时,有 $G(A)e^{-d_1 T} - dA < 0$. 因此这个单调方程的解是最终有界的.再由定理4.10.4知 $N(t)$ 是最终有界的.

记

$$C_+^2 = C([-T,0],R_+^2),$$
$$X = \{(\phi_1,\phi_2) \in C_+^2 : \phi_2(\theta) \geqslant \phi_1(\theta), \quad \forall \theta \in [-T,0]\},$$
$$X_0 = \{(\phi_1,\phi_2) \in X : \phi_1(0) > 0\},$$
$$\partial X_0 = X \setminus X_0.$$

显然 X_0 是 X 的相对开集.

注意到(4.10.7)等价于

$$\begin{aligned}\frac{dI}{dt} &= \lambda F(I(t),N(t)-I(t)) - (d+\varepsilon+\gamma)I(t),\\ \frac{dS}{dt} &= \gamma I(t) - dS(t) - \lambda F(I(t),S(t))\\ &\quad + G(S(t-T)+I(t-T))e^{-d_1 T}.\end{aligned} \tag{4.10.9}$$

如果初值 $(\phi_1,\phi_2) \in C_+^2$,并且 $\phi_1(0) > 0$, 利用比较定理可知

$$I(t,\phi) > 0, S(t,\phi) > 0, \forall t > 0.$$

这说明对任意的 $\phi \in X$,(4.10.7)的解$(I(t,\phi),N(t,\phi))$的解满足:$I(t,\phi) \geqslant 0, N(t,\phi) \geqslant I(t,\phi), \forall t \in [0,\infty)$. 让 $\Phi(t): X \to X, t \geqslant 0$,是(4.10.7)所定义的解半流,也就是$(\Phi(t)\phi)(\theta) = (I(t+\theta,\phi),N(t+\theta,\phi)), \theta \in [-T,0]$, $t \geqslant 0$. 容易验证

$$\Phi(t): X \to X, \qquad \Phi(t): \partial X_0 \to \partial X_0, \forall t \geqslant 0.$$

下面再给出一个定义

定义 4.10.1[21] 设 X 是一个Banach空间,$P: X \to X$ 是一个连续映射.如果存在一个有界集 $B \subset X$ 使得B 吸引X 的所有点,则称 P 是点耗散的.

由于(4.10.7)的非负解是最终有界的,半流 Φ 是点耗散的.有了这些准备工作,我们就可以给出定理

定理 4.10.5 设(A1)~(A4)成立.如果 $R_0 < 1$,则(4.10.7)的任何一个正解$(I(t,\phi),N(t,\phi))$满足

$$\lim_{t\to+\infty} I(t,\phi) = 0, \qquad \lim_{t\to+\infty} N(t,\phi) = \overline{N} = B^{-1}(de^{d_1 T}).$$

如果 $R_0 > 1$,则存在一个 $\beta > 0$,使得(4.10.7) 的任何一个解$(I(t,\phi),N(t,\phi))$ 满足

$$\liminf_{t\to+\infty} N(t,\phi) \geqslant \liminf_{t\to+\infty} I(t,\phi) \geqslant \beta.$$

为了证明这个定理,我们需要下面的引理

引理 4.10.1 设(A1)~(A4)成立.则存在一个 $\delta_1 > 0$,使得(4.10.7) 的任何一个解$(I(t,\phi),N(t,\phi))$ 满足

$$\limsup_{t\to+\infty} \| \Phi(t)\phi \| \geqslant \delta_1, \qquad \forall \phi \in X_0.$$

证明 记

$$\eta_1 = \frac{1}{2}(B(0+) - (d+\varepsilon)e^{d_1 T}).$$

显然 $\delta_1 > 0$,使得当 $0 < N < \delta_1$ 时,$B(N) > B(0+) - \eta_1 > 0$.如果引理的结论不成立,则存在一个 $\phi \in X_0$,使得$\limsup_{t\to+\infty} \| \Phi(t)\phi \| < \delta_1$.于是有 $T_1 > 0$,当 $t \geqslant T_1$ 时,$\| \Phi(t)\phi \| < \delta_1$.记$(I(t),N(t)) = (\Phi(t)\phi)(0)$.由于 $N(t) \geqslant I(t)$,我们有

$$\frac{dN}{dt} \geqslant (B(0+) - \eta_1)N(t-T)e^{-d_1 T} - (d+\varepsilon)N(t), \qquad \forall t \geqslant T_1. \tag{4.10.10}$$

考虑线性时滞方程

$$\frac{dN}{dt} = (B(0+) - \eta_1)N(t-T)e^{-d_1 T} - (d+\varepsilon)N(t), \qquad \forall t \geqslant T_1. \tag{4.10.11}$$

由于 $B(0+) - \eta_1 > 0$,(4.10.11) 满足拟单调条件(Q).由[41]可知,(4.10.11) 的稳定性与下面方程的稳定性相同

$$\frac{dN}{dt} = [(B(0+) - \eta_1)e^{-d_1 T} - (d+\varepsilon)]N(t), \qquad \forall t \geqslant T_1. \tag{4.10.12}$$

根据 η_1 的选取,我们有$(B(0+) - \eta_1)e^{-d_1 T} - (d+\varepsilon) > 0$,这说明方程(4.10.11) 的稳定模 s 是正的,也就是(4.10.11) 所有特征根的实部的最大值是正的.因此,由文献[41]可知,$N^*(t) = e^{\alpha t}u$ 是(4.10.11) 的一个解,这里 $u > 0$.由于 $N(t) > 0$, $\forall t > 0$,我们可以选取 $\kappa > 0$ 使得 $N(t) > \kappa N^*(t)$, $\forall t \in [T_1 - T, T_1]$.又由比较定理 4.10.4,$N(t) \geqslant \kappa N^*(t)$, $\forall t \geqslant T_1$.因而,当 $t \to \infty$ 时,$N(t) \to \infty$.这与解$(I(t),N(t))$ 的有界性矛盾. ∎

引理 4.10.2 存在正数 δ_2,使得由(4.10.7) 定义的半流 $\Phi(t)$ 满足

$$\limsup_{t\to+\infty} \| \Phi(t)\phi - (0,\overline{N}) \| \geqslant \delta_2, \quad \forall \phi \in X_0.$$

证明 取

$$\eta_2 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{d + \varepsilon + \gamma}{\lambda}\right).$$

由于当 $I \to 0$ 时,$(N - I)/N \to 1 > \eta_2$. 存在 $\delta_2 > 0$,使得 $(N - I)/N > \eta_2, \forall 0 \leqslant I < \delta_2$. 如果存在 $\phi \in X_0$,使得

$$\limsup_{t \to +\infty} \| \Phi(t)\phi - (0, \bar{N}) \| < \delta_2,$$

则存在 $T_2 > 0$,使得当 $t \geqslant T_2$ 时,$\| \Phi(t)\phi - (0, \bar{N}) \| < \delta_2$. 记 $(I(t), N(t)) = (\Phi(t)\phi)(0)$. 则 $I(t)$ 满足

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \geqslant (\lambda\eta_2 - (d + \varepsilon + \gamma))I(t), \qquad \forall t \geqslant T_2.$$

因此得

$$I(t) \geqslant I(T_2)\mathrm{e}^{(\lambda\eta_2 - (d+\varepsilon+\gamma))(t - T_2)}, \qquad \forall t \geqslant T_2.$$

由 η_2 的选择知,$\lambda\eta_2 - (d + \varepsilon + \gamma) > 0$. 因而 $\lim_{t \to +\infty} I(t) = +\infty$,这与 $I(t)$ 有界矛盾. ▌

定理 4.10.5 的证明 首先考虑 $R_0 < 1$,即 $\lambda < d + \varepsilon + \gamma$,的情形. 由于 $N(t) \geqslant I(t) > 0$,从(4.10.4)得

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} < (\lambda - (d + \varepsilon + \gamma))I(t), \qquad \forall t \geqslant T_2.$$

因而

$$I(t) \leqslant I(0)\mathrm{e}^{(\lambda - (d+\varepsilon+\gamma))t}, \qquad \forall t \geqslant 0.$$

这说明 $\lim_{t \to +\infty} I(t) = 0$. 由于 $N(t)$ 满足自治时滞微分方程

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = B(N(t - T))N(t - T)\mathrm{e}^{-d_1 T} - dN(t).$$

而它又渐近于

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = B(N(t - T))N(t - T)\mathrm{e}^{-d_1 T} - dN(t). \qquad (4.10.13)$$

由(A4)知,(4.10.13)的正解当 $t \to \infty$ 时趋向于 $\bar{N}$. 再由推广的渐近自治半流的 Markus 定理(文献[43]定理 4.1),我们有 $\lim_{t \to +\infty} N(t) = \bar{N}$.

下面考虑 $R_0 > 1$,即 $\lambda > d + \varepsilon + \gamma$,的情形. 记 $M_1 = (0,0), M_2 = (0, \bar{N})$. 由(A4)知,$\tilde{A}_\partial \equiv \bigcup_{\phi \in \partial X_0} \omega(\phi) = \{M_1, M_2\}$,这里 $\omega(\phi)$ 是(4.10.7)过 ϕ 的解的 ω 极限集. 显然,$\{M_1\}$ 和 $\{M_2\}$ 关于解半流 $\Phi(t)|_{\partial X_0}$ 来说,是不连通的,紧的和孤立的不变集. 并且 $\{M_1, M_2\}$ 没有一个子集能在 ∂X_0 中形成环. 又由引理 4.10.1 和引理 4.10.2,M_1 和 M_2 对于 X 中的解半流 $\Phi(t)$ 来说也是孤立不变集,并且有 $W^s(M_i) \cap X_0 = \varnothing, i = 1,2$,这里 $W^s(M_i)$ 是 M_i 关于流 $\Phi(t)$ 的稳定流形. 从而,文献[22]关于流一致持续生存定理的条件都得到满足. 因而存

在 $\beta > 0$,使得(4.10.7)的任何一个解$(I(t,\phi),N(t,\phi))$满足

$$\liminf_{t\to+\infty} N(t,\phi) \geqslant \liminf_{t\to+\infty} I(t,\phi) \geqslant \beta.$$

∎

§4.11 疾病在食饵中传播的捕食与被捕食模型

Xiao 和 Chen 在文献[49]中提出了疾病在食饵中传播的捕食与被捕食模型.模型的建立过程如下.用 N 表示食饵的总密度,Y 表示捕食者的密度.

作如下基本假设

(H1) 在没有疾病时,食饵的密度服从 Logistic 规律

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right), \tag{4.11.1}$$

(H2) 当疾病出现时,把食饵种群分为两类:易感者和感染者,它们的密度分别用 S 和 I 来表示.因此,$N = S + I$,

(H3) 为简单起见,设易感者食饵能够按照 Logistic 规律再繁殖,而感染者食饵没有生育力,但对易感者食饵繁殖的环境容纳量有影响,

(H4) 设疾病只在食饵种群中传播,被感染的食饵不会恢复,疾病发生率服从双线性定律.概括来讲,在没有捕食者时,易感者食饵和感染者食饵满足下面的规律

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} &= rS\left(1 - \frac{S+I}{K}\right) - \beta SI, \\ \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} &= \beta SI - cI, \end{aligned} \tag{4.11.2}$$

这里 c 是感染者食饵的死亡率,

(H5) 设捕食者的死亡率为 d,对易感者食饵和感染者食饵的攻击率分别为 p_1, p_2,把食物转化成生育的效率为 κ_1,所需要的时间为 $\bar{\tau}$.

在以上假设下,就有模型

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} &= rS\left(1 - \frac{S+I}{K}\right) - \beta SI - p_1 SY, \\ \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} &= \beta SI - cI - p_2 IY, \\ \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t} &= -dY + \kappa p_1 S(t-\bar{\tau})Y(t-\bar{\tau}) + \kappa p_2 I(t-\bar{\tau})Y(t-\bar{\tau}), \end{aligned} \tag{4.11.3}$$

这里 $\kappa = \kappa_1 \mathrm{e}^{-d\bar{\tau}}$.

为讨论方便起见,作无量纲化处理.令

$$s = \frac{S}{K}, \qquad i = \frac{I}{K}, \qquad y = \frac{Y}{K}, \qquad \omega = \beta K t.$$

为了记号上的方便,变换后把变量 ω 仍用 t 来表示,则模型(4.11.3)变成

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} &= as(1-(s+i)) - si - l_1 sy,\\
\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} &= si - b_2 i - l_2 iy, \qquad\qquad (4.11.4)\\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= -b_1 y + \kappa l_1 s(t-\tau)y(t-\tau) + \kappa l_2 i(t-\tau)y(t-\tau),
\end{aligned}$$

这里

$$a = \frac{r}{\beta K}, \quad b_1 = \frac{d}{\beta K}, \quad b_2 = \frac{c}{\beta K},$$

$$l_1 = \frac{p_1}{\beta}, \quad l_2 = \frac{p_2}{\beta}, \quad \tau = \beta K\bar{\tau}.$$

在下面的讨论中,我们设 $p_1 = 0$,也就是捕食者仅仅吃有病的食饵.

模型(4.11.4)的平衡点为

$$E_0 = (0,0,0), \quad E_{10} = (1,0,0), \quad E_{20} \equiv (\bar{s},\bar{i},\bar{y}) = \left(b_2, \frac{a(1-b_2)}{1+a}, 0\right)$$

以及 $E_2 = (s^*, i^*, y^*)$,其中

$$s^* = \frac{a\kappa l_2 - b_1(1+a)}{a\kappa l_2}, \quad i^* = \frac{b_1}{\kappa l_2}, \quad y^* = \frac{a\kappa l_2(1-b_2) - b_1(1+a)}{a\kappa l_2^2}.$$

边界平衡点 E_{20} 存在的条件为 $b_2 < 1$. 正平衡点 E^* 存在的条件为

$$l_2 > \frac{b_1(1+a)}{a\kappa(1-b_2)} \equiv l_2^* > 0. \qquad (4.11.5)$$

不难证明下面定理

定理 4.11.1 E_0 总是一个鞍点. 当 $b_2 > 1$ 时 E_{10} 稳定,当 $b_2 < 1$ 时 E_{10} 不稳定. 当 $b_2 < 1$ 时平衡点 E_{20} 存在,进而,如果 $l_2 < l_2^*$,E_{20} 是稳定的;如果 $l_2 > l_2^*$,E_{20} 是不稳定的,此时,平衡点 E^* 存在.

记

$$\sigma = \frac{1}{b_2}, \quad R_0 = \frac{a\kappa l_2(1-b_2)}{b_1(1+a)}.$$

从上面的定理知道,如果 $\sigma > 1$,E_{20} 存在. 参数 σ 决定了疾病是否持续. 如果 $R_0 > 1$,则 E^* 存在. 参数 R_0 决定了正平衡点是否存在.

定理 4.11.2 如果 $l_2^* > 0$,并且

$$l_2 > \max\left\{3l_2^*, \frac{(a+2)(1-b_2)}{a} l_2^*\right\},$$

则当 τ 从 0 增加时,存在一个 τ_0,使得当 $\tau \in [0,\tau_0)$ 时 E^* 是稳定的,而当 $\tau > \tau_0$ 时 E^* 是不稳定的. 进而,系统(4.11.4)当 $\tau = \tau_0$ 时在 E^* 有 Hopf 分枝.

文献[49] 还研究了模型(4.11.4) 边界平衡点的全局稳定性,模型(4.11.4)的一致持久性,并通过计算机模拟发现随着时滞长度的变化,正平衡点经历了稳定开关的变化.

§4.12　一类 SIS 模型的后向分枝

Van den Driessche 和 Watmough[46] 在经典的传染病模型中引入了变动的有效接触系数. 当有效接触系数是感染者的函数时,证明了 SIS 模型有后向分枝,揭示了非线性有效接触系数的重要性和复杂性.

4.12.1　模型的建立

用 $I(t)$ 和 $S(t)$ 分别表示感染者和易感者的比例. 于是有 $S(t) = 1 - I(t)$. 设疾病只可能出现水平传染,也就是所有新出生的个体都是易感者;又设没有因病死亡率,每个成员的出生率和死亡率都是相等的常数 $b > 0$. 进而,疾病发生率为 $\lambda(I(t))I(t)S(t)$. 注意这里有效接触系数 λ 是感染比例的函数. 这一点是独特的. 在多数情况下,我们都设有效接触系数是一个常数. 文献[46] 指出,感染者和易感者接触时的饱和效应、感染者和易感者的多次接触、以及种群由于疾病流行而改变行为等都会出现这种情况. 例如,Levin 和 Hethcote 等在文献[28,29,23] 中提出的有效接触系数为

$$\lambda(I) = \kappa I^{p-1}(1 - I)^{q-1}, \qquad p > 1, q \geqslant 1. \tag{4.12.1}$$

Cooke 和 Yorke 在文献[13]中提出了下面的有效接触系数

$$\lambda(I) = \beta(1 + \nu I^{p-1}), \qquad \beta > 0, p \geqslant 1. \tag{4.12.2}$$

这些有效接触系数都是依赖于 I 的.

设有效接触系数 $\lambda(I)$ 满足:

(A1) $\lambda(0) \geqslant 0$. 在$(0,1]$上,$\lambda(I) > 0$. 在$[0,1]$上,$\lambda(I)$ 连续,疾病发生率 $\lambda(I)(1 - I)$ 有连续导数.

用 $P(t)$ 表示一个感染者经过时间 t 仍然在感染类的概率. 设 $P(t)$ 满足

(A2) $P(t) \geqslant 0$;$P(t)$ 是非增的;$P(0+) = 1$;$\tau = \int_0^\infty P(u)e^{-bu}du \in (0,\infty)$.

用 $I_0(t)$ 表示 $t = 0$ 时的感染者经过时间 t 后仍然在感染类的比例. 设 $I_0(t)$ 满足:

(A3) $I_0(t) \geqslant 0$;$I_0(t)$ 是非增的,可微的;$I_0(0) \in [0,1]$;$\lim\limits_{t\to+\infty} I_0(t) = 0$.

在以上假设下,就有模型

$$I(t) = I_0(t) + \int_0^t \lambda(I(u))I(u)(1 - I(u))P(t - u)e^{-b(t-u)}du, \quad (4.12.3)$$

这里 $t \geqslant 0$.

为研究方便起见,我们对模型(4.12.3)做一些改动.记

$$\lambda_0 = \begin{cases} \lambda(0), & \text{当 } \lambda(0) > 0 \text{ 时}, \\ 1, & \text{当 } \lambda(0) = 0 \text{ 时}. \end{cases}$$

$$R_0 = \tau\lambda_0,$$

$$f(I) = \frac{1}{\lambda_0}\lambda(I)(1 - I), \quad 0 \leqslant I \leqslant 1,$$

$$\tilde{P}(t) = \frac{1}{\tau}P(t)e^{-bt}, \quad t \geqslant 0.$$

则模型(4.12.3)可以改写为

$$I(t) = I_0(t) + R_0\int_0^t I(u)f(I(u))\tilde{P}(t - u)du. \quad (4.12.4)$$

由(A2)知, $\tilde{P}(t)$ 是非负的、非增的,并且 $\int_0^\infty P(u)du = 1$. 从 f 的定义知,当 $\lambda(0) = 0$ 时 $f(0) = 0$,而当 $\lambda(0) > 0$ 时 $f(0) = 1$.

4.12.2　平衡点的性态

如果 $I(t) = \bar{I}$ 是方程(4.12.4)的一个常数解,则

$$\bar{I} = I_0(t) + R_0\bar{I}f(\bar{I})\int_0^t \tilde{P}(t - u)du. \quad (4.12.5)$$

令 $t \to \infty$,得

$$\bar{I} = R_0\bar{I}f(\bar{I}), \quad 0 \leqslant \bar{I} \leqslant 1. \quad (4.12.6)$$

反之,如果 $\bar{I}$ 满足(4.12.6),则按照方程(4.12.5)来取 $I_0(t)$. 这样的 $I_0(t)$ 显然满足(A3),并且 $\bar{I}$ 显然是方程(4.12.4)的一个常数解. 因此,$\bar{I}$ 是平衡点的充要条件是 $\bar{I}$ 满足(4.12.6). 平衡点 $\bar{I} = 0$ 叫做无病平衡点,而平衡点 $\bar{I} > 0$ 叫做地方病平衡点. 显然地方病平衡点 I_e 满足

$$R_0 f(\bar{I}_e) = 1. \quad (4.12.7)$$

为了确定地方病平衡点,记

$$X = \{0\} \cup \{I \in (0,1) \mid f'(I) = 0\}. \quad (4.12.8)$$

定义

$$R_0^c = \frac{1}{\max\limits_{I \in X} f(I)}, \qquad R_0^m = \frac{1}{\min\limits_{I \in X} f(I)}.$$

显然, $R_0^c \leqslant R_0^m$, $1/R_0^c$ 是 $f(I)$ 的全局最大值;除了右端点外, $1/R_0^m$ 是 $f(I)$ 局部极值的最小值. 由(A1)和 $f(I)$ 的定义知, $f(I)$ 在 $[0,1]$ 上连续和非负,在 $(0,1)$

上取正值,在 $I=1$ 处取得最小值 $f(1)=0$. 因此,$0<R_0^c<\infty$. 注意到 $f(0)\in\{0,1\}$. 如果 $f(0)=1$,则有 $1\leqslant R_0^m<\infty$,而如果 $f(0)=0$,则 $R_0^m=+\infty$. 由这些性质可以得到

定理 4.12.1　设(A1) ~ (A3) 成立. 则模型(4.12.4) 具有以下性质:

1) 始终有无病平衡点,

2) 当 $R_0<R_0^c$ 时,没有地方病平衡点,

3) 当 $R_0>R_0^c$ 时,至少有一个地方病平衡点,

4) 当 $R_0>R_0^m$ 时,恰好有一个地方病平衡点.

下面接着讨论平衡点的稳定性. 方程(4.12.4) 在平衡点 $\bar{I}$ 处的特征方程为

$$R_{\bar{I}}\int_0^{\infty}e^{-zu}\widetilde{P}(u)du=1, \tag{4.12.9}$$

这里

$$R_{\bar{I}}=R_0(If(I))'|_{I=\bar{I}}=R_0(f(\bar{I})+\bar{I}f'(\bar{I})).$$

为了分析特征根的位置,我们需要下面两个引理

引理 4.12.1　当 $u>0$ 时,如果 $g(u)$ 是非负的,有界的和非增的,并且有 $0<\int_0^{\infty}g(u)du<\infty$,则

$$\int_0^{\infty}g(u)\sin(yu)du=0 \tag{4.12.10}$$

的充要条件是 $y=0$ 或 $g(u)$ 在每一个区间 $2\pi n/y<u<2\pi(n+1)/y$ 上是常数,其中 n 是非负整数.

证明　当 $y=0$ 时结论显然成立. 当 $y\neq0$ 时,由于 $\sin(-yu)=-\sin(yu)$,只需考虑 $y>0$ 的情形. 方程(4.12.10)中的积分是无穷序列

$$a_n=\int_{2\pi n/y}^{2\pi(n+1)/y}g(u)\sin(yu)du$$

的级数和. 由于 $g(u)$ 非负可积,这个级数是收敛的. 又由函数 sin 和 g 的性质得

$$a_n=\int_{2\pi n/y}^{2\pi(n+1/2)/y}(g(u)-g(u+\pi/y))\sin(yu)du\geqslant0. \tag{4.12.11}$$

因此,方程(4.12.10)成立的充要条件是每一个 a_n,都有 $a_n=0$. 而从(4.12.11)知,$a_n=0$ 的充要条件为:在区间 $2\pi n/y<u<2\pi(n+1/2)/y$ 上 $g(u+\pi/y)=g(u)$. 由于 $g(u)$ 是非增的,这等价于 $g(u)$ 在 $2\pi n/y<u<2\pi(n+1)/y$ 上是常数. ∎

引理 4.12.2　如果 $P(u)$ 满足(A2),则对特征方程(4.12.9) 来说,任何一个不是实数的特征根具有负实部. 进而,如果特征方程(4.12.9) 存在一个实特征根,则当 $R_{\bar{I}}>1$ 时,这个特征根是正的;当 $R_{\bar{I}}<1$ 时,这个特征根是负的;当

$R_{\bar{I}} = 1$ 时,这个特征根为0.

证明 设 $z = x + iy$ 是特征方程(4.12.9)的根,这里 x 和 y 都是实数.则 x 和 y 满足

$$R_{\bar{I}}\int_0^{\infty} e^{-xu}\tilde{P}(u)\sin(yu)du = 0, \tag{4.12.12}$$

$$R_{\bar{I}}\int_0^{\infty} e^{-xu}\tilde{P}(u)\cos(yu)du = 1. \tag{4.12.13}$$

首先考虑一个具有非负实部的特征根,也就是设 $x \geqslant 0$.如果 $R_{\bar{I}} = 0$,则(4.12.13)不能被满足.如果 $R_{\bar{I}} \neq 0$,则由引理4.12.1,方程(4.12.12)有根的充要条件为 $y = 0$ 或者 $e^{-xu}\tilde{P}(u)$ 在每一个区间 $2\pi n/y < u < 2\pi(n+1)/y$ 上是常数.对后一种情形,由于方程(4.12.13)中的积分为0,方程(4.12.13)不能被满足.因此,由 $x \geqslant 0$ 就推出 $y = 0$.

现在考虑特征方程的一个实根 x.则 x 满足

$$R_{\bar{I}}\int_0^{\infty} e^{-xu}\tilde{P}(u)du = 1. \tag{4.12.14}$$

如果 $x \geqslant 0$,则方程(4.12.14)中的积分是正的,并且是 x 的减函数.因此,当 $R_{\bar{I}} < 1$ 时,实特征根 x 必然是负的;当 $R_{\bar{I}} > 1$ 时,由于方程(4.12.14)中的积分是 x 的减函数,利用连续函数的介值定理,容易知道方程(4.12.14)存在惟一的正实根 x;当 $R_{\bar{I}} = 1$ 时,方程(4.12.14)存在惟一的正实根 $x = 0$. ∎

由引理4.12.2立即可得下面定理中的结论1)和3),利用文献[33]可以证明下面定理中结论2).

定理4.12.2 设(A1) ~ (A3)成立.则模型(4.12.4)具有下面的性质:

1) 如果 $\lambda(0) > 0$,则当 $R_0 < 1$ 时,无病平衡点是渐近稳定的,而当 $R_0 > 1$ 时,无病平衡点是不稳定的;

2) 如果 $\lambda(0) = 0$,则无病平衡点始终是渐近稳定的;

3) 对于地方病平衡点 I_e 来说,当 $f'(I_e) < 0$ 时是渐近稳定的,当 $f'(I_e) > 0$ 时是不稳定的.

从定理4.12.1可以看出,R_0 对平衡点的个数和位置起着很大的作用;而定理4.12.2表明,$f'(I)$ 决定了地方病平衡点的稳定性.由于 $f(I)$ 是连续的,在 $R_0 - \bar{I}$ 平面上按照方程(4.12.7)画出的连续曲线就是平衡点的分枝图.

设 $\lambda(0) > 0$.则 $R_0 = 1$ 是无病平衡点稳定的分枝值.当 R_0 穿越1时,无病平衡点的稳定性发生改变,并出现地方病平衡点,由地方病平衡点组成的曲线和 R_0 轴相交.如果 $f'(0) < 0$,则局部稳定的地方病平衡点分枝曲线和 R_0 轴相交于 $R_0 = 1$,这种情形称为前向分枝.如果 $f'(0) > 0$,则局部不稳定的地方病平衡点分枝曲线和 R_0 轴相交于 $R_0 = 1$,这种情形称为后向分枝(图4.2).

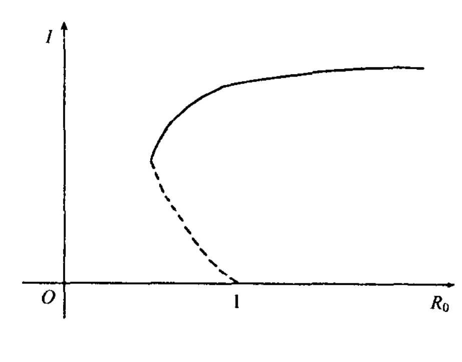


图4.2　后向分枝图

定理4.12.3　设(A1) ~ (A3)成立,并且 $\lambda(0) > 0$. 则当 $\lambda'(0) < \lambda(0)$ 时,在 $R_0 = 1, \bar{I} = 0$ 处模型(4.12.4)有前向分枝,而当 $\lambda'(0) > \lambda(0)$ 时,在 $R_0 = 1, \bar{I} = 0$ 处模型(4.12.4)有后向分枝. 进而,如果模型(4.12.4)有后向分枝,则 $R_0^c < 1$,并且当 $R_0^c < R_0 < 1$ 时模型(4.12.4)有多个稳定的平衡点.

证明　只证定理的后半部分. 当后向分枝存在时,对于 $R_0 < 1$,有一枝不稳定的地方病平衡点存在. 由于这些平衡点都是方程(4.12.7)的解,再由 R_0^c 的定义立即知道 $R_0^c < 1$. 进而,由于 $f(I)$ 连续和 $f(1) = 0$,当 $R_0^c < R_0 < 1$ 时,一定有一枝地方病平衡点曲线,在这个曲线上 $f'(\bar{I}) < 0$,也就是这些平衡点是渐近稳定的. 又由于 $R_0 < 1$ 时,无病平衡点始终是稳定的,当 $R_0^c < R_0 < 1$ 时,至少有两个稳定的平衡点. ∎

文献[46]还对有效接触系数(4.12.2)讨论了模型(4.12.4)后向分枝的存在性.

§4.13　四类特征方程的稳定性

前面我们看到,研究具有确定时滞的传染病模型平衡位置的局部稳定性的一种常用方法是特征方程法. 这种方法是,首先求出模型关于所讨论平衡位置的线性近似系统,再求出此线性近似系统的特征方程. 若所有特征根均具有负实部,则原模型的平衡位置是局部渐近稳定的;若至少存在一个特征根具有正实部,则此平衡位置是不稳定的. 这时也简单地分别称对应特征方程是稳定的或不稳定的. 由于特征根中含有时滞 τ,因而特征方程的稳定性可能随时滞 τ 的增加而发生改变. K. Cooke 等称这种现象为稳定性的开关现象[55]. 下面我们介绍两类常见特征方程稳定性的开关现象及其最终稳定性的判定法.

4.13.1　第一类特征方程

1986年,K. Cooke 与 van den Driessche 研究了下列类型的特征方程

$$P(\lambda) + Q(\lambda)e^{-\lambda\tau} = 0, \tag{4.13.1}$$

其中 P、Q 为 λ 的解析函数或作为特例是 λ 的多项式. 他们获得了稳定性开关发生的判据,并证明了当

$$F(y) \triangleq |P(iy)|^2 - |Q(iy)|^2 = 0$$

存在两个正根时,特征方程(4.13.1)的稳定性将随时滞 τ 的增加而改变,但经过有限次改变后必最终不稳定.

然而,若模型考虑时滞阶段种群的自然死亡率时,其特征方程的参数通常依赖于时滞 τ ,这时特征方程(4.13.1)将相应地变成

$$P(\lambda,\tau) + Q(\lambda,\tau)e^{-\lambda\tau} = 0. \tag{4.13.2}$$

对于方程(4.13.2),Brertta 和 Kuang 在文献[6]中发展了 Cooke 等所提出的方法,给出了特征根穿过虚轴方向的判定公式.并借助于几何与数值计算发现了(4.13.2)与(4.13.1)性态上的本质差异.举例说明了方程(4.13.2)在通过稳定性开关后可能出现最终稳定.李建全与马知恩进一步研究了方程(4.13.2)的稳定性开关,给出了其最终稳定性的判定准则.在一般情况下,不需要数学软件便可判定其最终稳定性.下面介绍这些工作[57].

考虑特征方程(4.13.2),设

$$P(\lambda,\tau) = \lambda^2 + a(\tau)\lambda + c(\tau), \qquad Q(\lambda,\tau) = b(\tau)\lambda + d(\tau),$$

这里时滞 $\tau \geqslant 0$.

对上式中的函数作如下假设

(A1) 函数 $a(\tau)$,$b(\tau)$,$c(\tau)$ 和 $d(\tau)$ 在区间 $R_{+0} = [0, +\infty)$ 都是连续可微的;

(A2) 对任意的 $\tau \in R_{+0}$,都有 $c(\tau) + d(\tau) \neq 0$;

(A3) 对任意的 $\tau \in R_{+0}$,$P(iy,\tau) + Q(iy,\tau) \neq 0$;

(A4) (4.13.2) 的所有根都是单的;

(A5) 当 $\tau = 0$ 时,(4.13.2) 的所有根均具有负实部.

假设(A1)保证了(4.13.2)解的连续性;(A2)保证了 $\lambda = 0$ 不是(4.13.2)的根,并且 $c(\tau)$ 和 $d(\tau)$ 不同为零;(A3)保证了 $P(\lambda,\tau) = 0$ 和 $Q(\lambda,\tau) = 0$ 没有共同的纯虚根;(A4)保证了(4.13.2)的解 $\lambda = \lambda(\tau)$ 关于 τ 的导数在 $\lambda = \pm iy$ 处不为零;(A5)意味着(4.13.2)当 $\tau = 0$ 时是稳定的.记

$$D(\lambda,\tau) = P(\lambda,\tau) + Q(\lambda,\tau)e^{-\lambda\tau}.$$

假设(4.13.2)有一对共轭纯虚根 $\lambda = \pm iy (y > 0)$.将 $\lambda = iy$ 代入到(4.13.2),并且分离其实部与虚部,得

$$\begin{cases} b(\tau)y\sin y\tau + d(\tau)\cos y\tau = -[c(\tau) - y^2], \\ d(\tau)\sin y\tau - b(\tau)y\cos y\tau = a(\tau)y. \end{cases} \tag{4.13.3}$$

由(4.13.3)可得

$$F(y,\tau) \triangleq y^4 - [b^2(\tau) + 2c(\tau) - a^2(\tau)]y^2 + [c^2(\tau) - d^2(\tau)] = 0.$$

记

$$f_1(\tau) = b^2(\tau) + 2c(\tau) - a^2(\tau),$$

$$f_2(\tau) = c^2(\tau) - d^2(\tau),$$

$$f_3(\tau) = f_1^2(\tau) - 4f_2(\tau).$$

则

$$F(y,\tau) = y^4 - f_1(\tau)y^2 + f_2(\tau) = 0. \qquad (4.13.4)$$

进一步假设

(A6) 对于 $\tau \in R_+$,(4.13.4) 的所有正根都是单的,且函数 $f_j(\tau) = 0(j = 1,2,3)$ 至少有一个正的单根.

当 $f_3(\tau) > 0$ 时,如果 $F(y,\tau) = 0$ 有正根 y_+ 和 y_-,则

$$y_+^2 = \frac{1}{2}[f_1(\tau) + \sqrt{f_3(\tau)}], \quad y_-^2 = \frac{1}{2}[f_1(\tau) - \sqrt{f_3(\tau)}]. \qquad (4.13.5)$$

记 $y(\tau)$ 为方程(4.13.4) 的正根. 要使 $iy(\tau)$ 是(4.13.2) 的纯虚根,$y(\tau)$ 也必须满足(4.13.3). 假设$(\alpha,\beta)(\alpha \geqslant 0)$是正根 $y(\tau)$ 存在的最大区间. 由假设(A2),对于 $\tau \in R_+$,有 $b^2y^2 + d^2 > 0$. 因此,从(4.13.3)可得

$$\begin{cases} \sin y\tau = \dfrac{-b(\tau)y(c(\tau) - y^2) + a(\tau)d(\tau)y}{b^2(\tau)y^2 + d^2(\tau)}, \\ \cos y\tau = -\dfrac{d(\tau)(c(\tau) - y^2) + a(\tau)b(\tau)y^2}{b^2(\tau)y^2 + d^2(\tau)}, \end{cases} \qquad (4.13.6)$$

其中 $y = y(\tau)(\tau \in (\alpha,\beta))$ 是(4.13.4) 的正根.

若 $\tau = \tau^*$ 满足(4.13.6),则 $iy(\tau^*)$ 便是(4.13.2) 的一个纯虚根. 现在以 $\theta(\tau)$ 取代(4.13.3) 或(4.13.6) 中的 $y = y(\tau)\tau$,得

$$\begin{cases} b(\tau)y\sin\theta + d(\tau)\cos\theta = -(c(\tau) - y^2), \\ d(\tau)\sin\theta - b(\tau)y\cos\theta = a(\tau)y, \end{cases} \qquad (4.13.7)$$

即

$$\begin{cases} \sin\theta(\tau) = \dfrac{-b(\tau)y(c(\tau) - y^2) + a(\tau)d(\tau)y}{b^2(\tau)y^2 + d^2(\tau)} \triangleq \varphi(y,\tau), \\ \cos\theta(\tau) = -\dfrac{d(\tau)(c(\tau) - y^2) + a(\tau)b(\tau)y}{b^2(\tau)y^2 + d^2(\tau)} \triangleq \psi(y,\tau). \end{cases} \qquad (4.13.8)$$

于是由(4.14.8) 可确定函数 $\theta = \theta(\tau) \in [0,2\pi]$,

$$\theta(\tau)=\begin{cases}\arctan\dfrac{\varphi}{\psi}, & 若\ \sin\theta>0,\cos\theta>0;\\ \dfrac{\pi}{2}, & 若\ \sin\theta=1,\cos\theta=0;\\ \pi+\arctan\dfrac{\varphi}{\psi}, & 若\ \cos\theta<0;\\ \dfrac{3\pi}{2}, & 若\ \sin\theta=-1,\cos\theta=0;\\ 2\pi+\arctan\dfrac{\varphi}{\psi}, & 若\ \sin\theta<0,\cos\theta>0.\end{cases} \tag{4.13.9}$$

比较(4.13.6)与(4.13.8)知,若 $\tau=\tau^*$ 满足(4.13.6),则存在 $\kappa\in N_0=\{0,1,2,3,\cdots\}$,使得

$$y(\tau^*)\tau^*=\theta(\tau^*)+2\kappa\pi,\tau\in(\alpha,\beta). \tag{4.13.10}$$

根据(4.13.10),可定义函数

$$S(\tau)\triangleq\frac{y(\tau)\tau-\theta(\tau)}{2\pi},\quad \tau\in(\alpha,\beta). \tag{4.13.11}$$

为了方便起见,作如下假设

(A7) 对于给定的 $\kappa\in N_0$, $S(\tau)=\kappa$ 在区间 $(\alpha,\beta')\subset(\alpha,\beta)(\beta'<\infty)$ 上解的个数是有限的,且每个根都是单根.

根据以上推理可得

定理 4.13.1 设(A1) ~ (A7) 成立.则 $\pm iy(\tau^*)$ 是特征方程(4.13.2) 的纯虚根的充要条件是存在整数 $\kappa\in N_0$,使得 $\tau^*\in(\alpha,\beta)$ 是方程

$$\frac{y(\tau)\tau-\theta(\tau)}{2\pi}=\kappa,即\ S(\tau)=\kappa$$

的根,其中 $\theta(\tau)$ 由(4.13.9) 定义,且 $y(\tau)(\tau\in(\alpha,\beta))$ 是(4.13.4) 的一个正根.

由文献[6] 可知

定理 4.13.2 设(A1) ~ (A7) 成立.又设 $\lambda=\lambda(\tau),\tau\in(\alpha,\beta)$,是(4.13.2) 的一个特征值.如果存在 $\tau^*\in(\alpha,\beta)$,使得 $\lambda=iy(\tau^*)$ 是(4.13.2) 的一个纯虚根,则当 τ 增大并通过 $\tau=\tau^*$ 时,$\lambda(\tau)$ 穿过虚轴的方向依赖于表达式

$$V=\operatorname{sign}\left\{\pm f_3^{\frac{1}{2}}(\tau^*)\right\}\operatorname{sign}\left\{\left.\frac{\mathrm{d}S_\pm(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\right|_{\tau=\tau^*}\right\}.$$

如果 $V=1$,则当 τ 增大并通过 $\tau=\tau^*$ 时,$\lambda=\lambda(\tau)$ 从左向右穿过虚轴;如果 $V=-1$,则当 τ 增大并通过 $\tau=\tau^*$ 时,$\lambda=\lambda(\tau)$ 从右向左穿过虚轴.

下面介绍最终稳定性的判别准则[52,57].

根据定理 4.13.2,如果(4.13.2) 没有纯虚根,则(4.13.2) 的稳定性不会发

生变化，于是有定理.

定理 4.13.3　设(A1) ~ (A7) 成立. 如果对于任意的 $\tau \in (0,\infty)$，方程 $F(y,\tau)=0$ 都没有正根，或对任意的 $\kappa \in N_0$，方程 $S(\tau)=\kappa$ 都没有根，则对任意的 $\tau \in [0,+\infty)$，(4.13.2) 都是稳定的.

以下总假设存在 $\tau \in (0,\infty)$，使(4.13.2) 存在纯虚根.

定理 4.13.4　设(A1) ~ (A7) 成立. 并没(4.13.4) 仅有一个正根 $y_+(\tau)$.

1) 若 $y_+(\tau)$ 的存在区间是有限的，则(4.13.2) 一定最终稳定；

2) 若 $y_+(\tau)$ 的存在区间是无限的，则(4.13.2) 当 $\lim\limits_{\tau\to\infty}\sup S_+(\tau)<0$ 时最终稳定的，当 $\lim\limits_{\tau\to\infty}\inf S_+(\tau)>0$ 时是最终不稳定的.

定理 4.13.5　设(A1) ~ (A7) 成立. 又设(4.13.4) 仅有一个正根 $y_+(\tau)$，且其存在区间是无限的. 则

1) 如果 $\lim\limits_{\tau\to\infty}\sup S_+(\tau)>0$ 且 $\lim\limits_{\tau\to\infty}\inf S_+(\tau)<0$，则当 τ 增大时，(4.13.2) 总在稳定和不稳定之间相互交替，从而会发生无穷多次稳定性开关.

2) 如果 $\lim\limits_{\tau\to\infty} S_+(\tau)=0$，且 $S_+(\tau)=0$ 有偶数个根，则(4.13.2) 是最终稳定的.

3) 如果 $\lim\limits_{\tau\to\infty} S_+(\tau)=0$，且 $S_+(\tau)=0$ 有奇数个根，则(4.13.2) 是最终稳定的.

4) 如果 $\lim\limits_{\tau\to\infty} S_+(\tau)=0$，且 $S_+(\tau)=0$ 有无穷个根，则当 τ 增大时，(4.13.2) 总在稳 定和不稳定之间相互交替，从而会发生无穷多次稳定性开关.

定理 4.13.6　设(A1) ~ (A7) 成立. 又设 $\frac{\partial\theta}{\partial y}\leqslant 0$，且方程(4.13.4) 有两个由(4.13.5) 定义的正根 $y_+(\tau)$ 和 $y_-(\tau)$.

1) 如果 $y_+(\tau)$ 和 $y_-(\tau)$ 的存在区间都是有限的，记存在区间的右端点值为 $\bar{\tau}$，则(4.13.2) 当 $S_+(\bar{\tau}) \notin N_0$ 或 $\max\limits_{0\leqslant\tau\leqslant\bar{\tau}} S_+(\tau)=S_+(\bar{\tau})\in N_0$，或 $\max\limits_{0\leqslant\tau\leqslant\bar{\tau}} S_-(\tau)>S_-(\bar{\tau})\in N_0$ 时是最终不稳定的. 当 $\max\limits_{0\leqslant\tau\leqslant\bar{\tau}} S_+(\tau)>S_+(\bar{\tau})\in N_0$ 且 $\max\limits_{0\leqslant\tau\leqslant\bar{\tau}} S_-(\tau)=S_-(\bar{\tau})\in N_0$ 时是最终不稳定的.

2) 如果 $y_+(\tau)$ 的存在区间是无限的，而 $y_-(\tau)$ 的存在区间是有限的，则(4.13.2) 当 $\lim\limits_{\tau\to\infty}\sup S_+(\tau)<0$ 时是最终稳定的. 当 $\lim\limits_{\tau\to\infty}\inf S_+(\tau)>0$ 时是最终不稳定的

3) 如果 $y_+(\tau)$ 和 $y_-(\tau)$ 的存在区间都是无限的，并记

$$\bar{S}_+=\lim_{\tau\to\infty}\sup S_+(\tau),\quad \underline{S}_+=\lim_{\tau\to\infty}\inf S_+(\tau),$$

$$\bar{S}_-=\lim_{\tau\to\infty}\sup S_-(\tau),\quad \underline{S}_-=\lim_{\tau\to\infty}\inf S_-(\tau),$$

则(4.13.2)当$[\bar{S}_+]<0$或$q<\underline{S}_-\leqslant\bar{S}_+<q+1(q\in N_0)$时是最终稳定的,当$[\underline{S}_+]>[\bar{S}_-]$时是最终不稳定的.

例 设有下列SEIS传染病模型

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=(b-d)S(t)-\beta S(t)I(t)+\gamma I(t),$$

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=\beta S(t)I(t)-\beta S(t-\tau)I(t-\tau)\mathrm{e}^{-d\tau}-dE(t), \tag{4.13.12}$$

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=\beta\mathrm{e}^{-d\tau}S(t-\tau)I(t-\tau)-(d+\alpha+\gamma)I(t),$$

其中b为出生率系数,d为自然死亡率系数,α与γ分别为因病死亡率与恢复率系数,τ为疾病的潜伏期.这里我们考虑了潜伏期间种群的自然死亡率.因而在$t-\tau$时被传染而在潜伏期结束时刻t仍存活的感染人数为$\beta S(t-\tau)I(t-\tau)\mathrm{e}^{-d\tau}$,它们也就是$t$时刻单位时间进入仓室$I$的病人数.

由于(4.13.12)中第一和第三个方程不含有E,故可考虑仅由这两个方程所构成的系统

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=(b-d)S(t)-\beta S(t)I(t)+\gamma I(t),\\ \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=\beta\mathrm{e}^{-d\tau}S(t-\tau)I(t-\tau)-(d+\alpha+\gamma)I(t).\end{cases} \tag{4.13.13}$$

容易看出,当$g=b-d>0,\omega\triangleq d+\alpha+\gamma>\gamma\mathrm{e}^{-d\tau}$时系统(4.13.13)存在惟一的正平衡点$P^*(S^*,I^*)$.相对应的特征方程为

$$[\lambda+g+f(\tau)](\lambda+\omega)-\omega[\lambda+g(f(\tau)-1)]\mathrm{e}^{-\lambda\tau}=0,$$

其中 $f(\tau)=\dfrac{\gamma\mathrm{e}^{-d\tau}}{\omega-\gamma\mathrm{e}^{-d\tau}}$.

当$\tau=0$时易见P^*稳定.类似于(4.13.4)的导出可得

$$F(y,\tau)\triangleq y^4+g^2f^2(\tau)y^2-\omega^2g^2[1-2f(\tau)]=0, \tag{4.13.14}$$

其中$1-2f(\tau)=\dfrac{\omega-3\gamma\mathrm{e}^{-d\tau}}{\omega-\gamma\mathrm{e}^{-d\tau}}$.

1) 当$\omega\geqslant3\gamma$时,容易检验对一切$\tau>0$有$1-2f(\tau)>0$,从而(4.13.14)有惟一正根$y(\tau),0<\tau<+\infty$.

2) 当$\gamma<\omega<3\gamma$时,当$\tau>\bar{\tau}=\dfrac{1}{d}\ln\dfrac{3\gamma}{\omega}$时,$1-2f(\tau)>0$,从而有正根

$$y(\tau),\quad \bar{\tau}<\tau<+\infty.$$

可见,在任何情况下,$F(y,\tau)=0$正根的存在区间是无限的.由定理4.13.4的2),为判定其最终稳定性,需要考察$S_+(\tau)$的上下极限.因为

$$\lim_{\tau\to+\infty}y(\tau)=0,$$

从而由(4.13.14)式可知

$$\lim_{\tau\to+\infty} y(\tau) = \sqrt{\omega g}.$$

而 $\theta(\tau)\in(0,2\pi)$，于是由(4.13.11)式可得 $\lim\limits_{\tau\to+\infty} S(\tau) = +\infty$. 根据定理 4.13.4 知，在任何 情况下 P^* 都是最终不稳定的. ∎

4.13.2　第二类方程的稳定性

在不少情况下，我们还会是遇到如下类型的特征方程：

$$D(\lambda,\tau) \triangleq P(\lambda,\tau) + Q(\lambda,\tau)e^{-\lambda\tau} + R(\lambda,\tau)e^{-2\lambda\tau} = 0, \tag{4.13.15}$$

其中

$$P(\lambda,\tau) = \sum_{\kappa=0}^{n} p_\kappa(\tau)\lambda^\kappa,$$

$$Q(\lambda,\tau) = \sum_{\kappa=0}^{m} q_\kappa(\tau)\lambda^\kappa,$$

$$R(\lambda,\tau) = \sum_{\kappa=0}^{l} r_\kappa(\tau)\lambda^\kappa, n > \max x\{m,l\}.$$

当 P、Q、R 中不含时滞 τ 时，文献[58]进行过详细的研究. 得到了特征根穿过纯虚轴方向的判定公式，稳定性开关出现的条件，并证明了其最终不稳定与方程(4.13.1)类似.

当 P、Q、R 中含时滞 τ 时，文献[53]用与第一类方程类似的方法进行了讨论，获得了相应的结果. 现简述如下：

对于(4.13.15)，作如下假设：

(H1) 对于 $\tau\geqslant 0$，函数 $p_n(\tau)=1$，$p_\kappa(\tau)(\kappa=0,1,\cdots,n-1)$，$q_\kappa(\tau)(\kappa=0,1,\cdots,m)$ 和 $r_\kappa(\tau)(\kappa=0,1,\cdots,l)$ 是连续可微的.

显然，(4.13.15)等价于方程

$$P(\lambda,\tau)e^{\lambda\tau} + Q(\lambda,\tau) + R(\lambda,\tau)e^{-\lambda\tau} = 0. \tag{4.13.16}$$

假设(4.13.15)(或(4.13.16))有一对共轭纯虚根 $\lambda=\pm iy(y>0)$，则将 $\lambda=iy$ 代入(4.13.16)，并分离实部和虚部，得

$$\{P_R(y,\tau)+R_R(y,\tau)\}\cos y\tau - \{P_I(y,\tau)-R_I(y,\tau)\}\sin y\tau + Q_R(y,\tau) = 0,$$

$$\{P_I(y,\tau)+R_I(y,\tau)\}\cos y\tau + \{P_R(y,\tau)-R_R(y,\tau)\}\sin y\tau + Q_I(y,\tau) = 0,$$

其中 $P_R(y,\tau)$，$Q_R(y,\tau)$ 和 $R_R(y,\tau)$ 分别是 $P(iy,\tau)$，$Q(iy,\tau)$ 和 $R(iy,\tau)$ 的实部；$P_I(y,\tau)$，$Q_I(y,\tau)$ 和 $R_I(y,\tau)$ 分别是 $P(iy,\tau)$，$Q(iy,\tau)$ 和 $R(iy,\tau)$ 的虚部. 记

$$G(y,\tau) = |P(iy,\tau)|^2 - |R(iy,\tau)|^2.$$

则当 $G \neq 0$，容易得出

$$\begin{cases} \sin y\tau = \dfrac{Q_R(P_I + R_I) - Q_I(P_R + R_R)}{G} \triangleq \dfrac{\varphi(y,\tau)}{G}, \\ \cos y\tau = -\dfrac{Q_R(P_R - R_R) + Q_I(P_I - R_I)}{G} \triangleq \dfrac{\psi(y,\tau)}{G}. \end{cases} \tag{4.13.17}$$

对(4.13.17)中两方程的两边分别平方，再相加，得

$$G^2 = [Q_R(P_I + R_I) - Q_I(P_R + R_R)]^2 + [Q_R(P_R - R_R) + Q_I(P_I - R_I)]^2. \tag{4.13.18}$$

记

$$F(y,\tau) \triangleq (|P|^2 - |R|^2)^2 - [Q_R(P_I + R_I) - Q_I(P_R + R_R)]^2 - [Q_R(P_R - R_R) + Q_I(P_I - R_I)]^2.$$

则有(4.13.18)的等价形式

$$F(y,\tau) = 0. \tag{4.13.19}$$

(4.13.19)成立是(4.13.16)有纯虚根 $\pm iy$ 的一个必要条件.换言之,如果 iy 是(4.13.16)的一个纯虚根,则 y 一定满足等式(4.13.19).从(4.13.19)可知,在 y 和 τ 之间有一定的依赖关系.为了研究(4.13.16),作如下假设

(H2) 设 $y = y(\tau)$ 是由方程(4.13.19)在区间$(0,\bar{\tau})$上所确定的一个正的连续可微函数,其中 $\bar{\tau} = \sup\{\tau \mid y(\tau) > 0\}$. 如果 $\bar{\tau} < \infty$, 则$\lim\limits_{\tau\to\bar{\tau}} y(\tau) = 0$;

(H3) 对任意的 $\tau \in [0,\bar{\tau})$, $P(iy(\tau),\tau) + Q(iy(\tau),\tau) + R(iy(\tau),\tau) \neq 0$. 这意味着对于任意的 $\tau \in [0,\bar{\tau})$, $P(\lambda,\tau) = 0$, $Q(\lambda,\tau) = 0$ 和 $R(\lambda,\tau) = 0$ 没有共同的纯虚根;

(H4) 对任意的 $\tau \in [0,\bar{\tau})$, $G(y(\tau),\tau) \neq 0$. 这意味着对任意的 $\tau \in [0,\bar{\tau})$, $G(y(\tau),\tau) > 0$ 或 $G(y(\tau),\tau) < 0$.

引入辅助变量 $\theta(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$ 和两个辅助函数

$$\begin{aligned} K(\theta,y,\tau) &= (P_R + R_R)\cos\theta - (P_I - R_I)\sin\theta + Q_R, \\ E(\theta,y,\tau) &= (P_I + R_I)\cos\theta + (P_R - R_R)\sin\theta + Q_I. \end{aligned} \tag{4.13.20}$$

当 $G \neq 0$ 时,从方程组

$$\begin{cases} K(\theta,y,\tau) = 0, \\ G(\theta,y,\tau) = 0, \end{cases} \tag{4.13.21}$$

可得

$$\begin{cases} \sin\theta = \dfrac{Q_R(P_I + R_I) - Q_I(P_R + R_R)}{G} \triangleq \dfrac{\varphi(y,\tau)}{G}, \\ \cos\theta = -\dfrac{Q_R(P_R - R_R) + Q_I(P_I - R_I)}{G} \triangleq \dfrac{\psi(y,\tau)}{G}. \end{cases} \tag{4.13.22}$$

在假设(H2)和(H4)下,将 $y = y(\tau) > 0$ 代入(4.13.22)后,就可由(4.13.22)确定出函数 $\theta = \theta(\tau) \in [0, 2\pi]$ 的表达式

$$\theta(\tau) = \begin{cases} \arctan\dfrac{\varphi}{\psi}, & 若\quad \sin\theta > 0, \cos\theta > 0; \\ \dfrac{\pi}{2}, & 若\quad \sin\theta = 1, \cos\theta = 0; \\ \pi + \arctan\dfrac{\varphi}{\psi}, & 若\quad \cos\theta < 0; \\ \dfrac{3\pi}{2}, & 若\quad \sin\theta = -1, \cos\theta = 0; \\ 2\pi + \arctan\dfrac{\varphi}{\psi}, & 若\quad \sin\theta < 0, \cos\theta > 0. \end{cases} \tag{4.12.23}$$

由于三角函数具有周期性,所以 $\theta = \theta(\tau) + 2\kappa\pi, \kappa \in N_0$ 也满足式(4.13.23).

定义函数 $S = S(\tau)$ 如下

$$S(\tau) = \frac{y(\tau)\tau - \theta(\tau)}{2\pi}, \quad \tau \in (0, \bar{\tau}),$$

其中 $y(\tau)$ 与 $\theta(\tau)$ 分别由(4.13.19)和(4.13.23)定义.

对于函数 $S = S(\tau)$ 作假设:

(H5) 方程 $S(\tau) = \kappa(\kappa \in N_0)$ 在区间 $\tau^* \in (0, \bar{\tau})$ 内的根均为单根.

下面给出方程(4.13.16)在纯虚根的充要条件.

定理 4.13.7　在假设(H1)～(H5)下,方程 $D(\lambda, \tau) = 0$ 存在纯虚根的充要条件是:存在 $\kappa \in N_0$,使得直线 $S = \kappa$ 与曲线 $S = S(\tau), \tau \in (0, \bar{\tau})$ 相交.进一步,如果 $\tau^* \in (0, \bar{\tau})$ 满足 $S(\tau) = \kappa \in N_0$,那么 $\lambda = \pm iy(\tau^*)(y(\tau^*) > 0)$ 就是 $D(\lambda, \tau) = 0$ 的一对纯虚根.

定理 4.13.8　在假设(H1)～(H5)下,如果存在 $\tau^* \in (0, \bar{\tau})$,使得 $\lambda = \pm iy^*(y^* = y(\tau^*) > 0)$ 为方程(4.13.16)当 $\tau = \tau^*$ 时的纯虚根,则存在(4.13.16)的一对特征根 $\lambda = \lambda(\tau) = x(\tau) \pm iy(\tau)$ 在 $\tau = \tau^*$ 处穿过虚轴,并且穿过方向由下式确定

$$d = \mathrm{sign}\left[\frac{Fy(y^*, \tau^*)}{G(y^*, \tau^*)}\right] \cdot \mathrm{sign}[S'(T^*)].$$

若 $d = 1$,则特征根 $\lambda = \lambda(\tau)$ 从左向右穿过虚轴;若 $d = -1$,则特征根 $\lambda = \lambda(\tau)$ 从右向左穿过虚轴.

定理 4.13.7 和定理 4.13.8 的证明可参阅文献[53].

参考文献

[1] R M Anderson, R M May. Population biology of infectious diseases I, Nature, 1979, 180:

361～363
[2] E Beretta, F Solimano, Tang Yanbin. Analysis of a chemostat model for bacteria and virulent bacteriophage. Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B ,2002,2: 495～520
[3] E Beretta, T Hara, Wanbiao Ma, Y Takeuchi. Global asymptotic stability of an SIR epidemic model with distributed time delay. Nonlinear Analysis. Theory. Methods. Applications. 2001,47: 4107～4115
[4] E Beretta, Y Kuang. Modeling and analysis of a marine bacteriophage infection. Math. Biosci., 1998,149:57～76
[5] E Beretta, Y Kuang. Modeling and analysis of a marine bacteriophage infection with latency period. Nonlinear Anal. Real World Appl., 2001,2: 35～74
[6] E Beretta, Kuang Yang. Geometric stability switch criteria in delay differential systems with delay dependent parameters. SIAM J. Math. Anal., 2002,33: 1144～1165
[7] E Beretta, Y Takeuchi, Global stability of an SIR epidemic model with time delays. J. Math. Biol., 1995(33): 250～260
[8] E Beretta, Y Takeuchi, Convergence results in SIR epidemic model with variable population sizes. Nonlinear Analysis. Theory. Methods. Applications. 1997,28: 1909～1921
[9] S Busenberg and K L Cooke, The effect of integral conditions in certain equations modelling epidemics and population growth. J. Math. Biol. ,1980,10): 13～32
[10] K L Cooke, Stability analysis for a vector disease model. Rocky Mount. J. Math., 1979, 7: 253～263
[11] K L Cooke, P van den Driessche. Analysis of an SEIRS epidemic model with two delays. J. Math. Biol., 1996,35: 240～260
[12] K L Cooke, P van den Driessche and X Zou, Interaction of maturation delay and nonlinear birth in population and epidemic models. J. Math. Biol., 1999,39: 332～352
[13] K Cooke, J Yorke. Some equations modelling growth processes and gonorrhea epidemics. Math. Biosci., 1973,16: 75～101
[14] R Culshaw, S Ruan. A delay differential equation model of HIV infection of $CD4^+$ T-cells. Math. Biosci., 2000,165: 27～39
[15] R Culshaw, S Ruan, G Webb. A mathematical model of cell-to-cell HIV-1 that include a time delay. J. Math. Biol., 2003,46:425～444
[16] Z Feng, W Huang, C Castillo-Chavez. On the role of variable latent periods in mathematical models for tuberculosis. J. Dynamical and Differential Equations. 2001,13: 425～452
[17] W Ma, T Hara, Y Takeuchi, E Beretta. Permanence of an SIR epidemic model with time delay. (to appear)
[18] Z Feng, H R Thieme. Recurrent outbreaks of childhood diseases revisted: the impact of isolation. Math. Biosci., 1995,128: 93～130
[19] Z Feng, H R Thieme. Endemic models with arbitrary distributed periods of infection I: fundamental properties of the model. SIAM J. Appl. Math., 2000,61: 803～833

[20] Z Feng, H R Thieme. Endemic models with arbitrary distributed periods of infection II: fast disease dynamics and permanent recovery. SIAM J. Appl. Math., 2000, 61: 983～1012

[21] J Hale. Introduction to Functional Differential Equations. Springer-Verlag. New York. 1977

[22] J Hale, P Waltman. Persistence in infinite-dimensional systems. SIAM. J. Math. Anal., 1995, 20: 388～395

[23] H W Hethcote, M A Lewis, P van den Driessche. An epidemiological model with a delay and a nonlinera incidence rate. J. Math. Biol., 1989, 27: 49～64

[24] H W Hethcote, H Stech, P van den Driessche. Nonlinear oscillations in epidemic models. SIAM J. Appl. Math., 1981, 40: 1～9

[25] H W Hethcote, P van den Driessche. Two SIS epidemiological models with delays. J. Math. Biol., 2000, 40: 2～26

[26] 靳祯.在脉冲作用下的生态和流行病模型研究. 西安交通大学博士学位论文,2001

[27] Y Kuang. Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics. Academic Press, Inc. Boston. 1993

[28] W M Liu, H W Hethcote, S A Levin. Dynamical behavior of epidemiological models with nonlinear incidence rates, J. Math. Biol., 1987, 25: 359～380

[29] W M Liu, S A Levin, Y Iwasa. Influence of nonlinear incidence rates upon the behavior of SIRS epidemiological models, J. Math. Biol., 1986, 23: 187～204

[30] S O Londen. On the variation of the solutions of a nonlinear integral equation. J. Math. Anal. Appl., 1975, 52: 430～449

[31] J Mena-Lorca, H W Hethcote. Dynamics models of infectious diseases as regulators of population sizes, J. Math. Biol., 1992, 30: 693～716

[32] R K Miller. Nonlinear Volterra Integral Equations. W. A. Benjamin Inc. 1971

[33] R K Miller. On the linearization of Volterra integral equations. J. Math. Anal., 1968, 23: 198～208

[34] R K Miller, J A Nohel. A table manifold theorem for a system of Volterra integraldifferential equations. SIAM J. Math. Anal., 1975, 6: 506～522

[35] J Mittler, B Sulzer, A Neumann, A Perelson. Influence of delayed virus production on viral dynamics in HIV-1 infected patients. Math. Biosci., 1998, 152: 143～163

[36] P Nelson, A Perelson. Mathematical analysis of delay differential equation models of HIV-1 infection. Math. Biosci., 2002, 179: 73～94

[37] A Perelson, D Kirschner, R De Boer. Dynamics of HIV infection of $CD4^+$ T-cells. Math. Biosci., 1993, 114: 81～125

[38] A Perelson, P Nelson. Mathematical analysis of HIV 1 dynamics in vivo. SIAM Review. 1999, 141: 3～44

[39] A Perelson, A Neumann, M Markowitz, J Leonard, D Ho. HIV-1 dynamics in vivo:

Virion clearance rate, infected cell life-span, and viral generation time. Science. 1996, 271: 1582～1586

[40] S Ruan, W Wany. Dynamical Behavior of an Epidemic Model with a Nonlinear Incidence Rate. J. Diff. Equa., 2003, 188: 135～163

[41] H L Smith. Monotone dynamical systems: an introduction to the theory of competitive and cooperative systems. Mathematical Surveys and Monographs. Vol. 41. Amer. Math. Soc. Providence. 1995

[42] H Stech, M Williams. Stability in a cyclic epidemic models with delay. J. Math. Biol., 1981, 11: 95～103

[43] R H Thieme. Convergence results and Poincaré-Bendixson trichotomy for asymptoticcally autonomous differential equations, J. Math. Biol., 1992, 30: 755～763

[44] R H Thieme. Persistence under relaxed point-dissipativity (with applications to an endemic model). SIAM J. Math. Anal., 1993, 24: 407～435

[45] H R Thieme, P van den Driessche. Global stability in cyclic epidemic models with disease fatalities. Fields Institute Communications. 1999, 21: 459～472

[46] P van den Driessche, J Watmough. A simple SIS epidemic model with a backward bifurcation. J. Math. Biol., 2000, 40: 525～540

[47] W Wang. Global behavior of an SEIRS epidemic model with time delay. Applied Mathematics Letters. 2002, 15: 423～428

[48] W Wang, Z Ma. Global dynamics of an epidemic model with time delay, Nonlinear Analysis. 2002, 3:365～373

[49] Y Xiao, L Chen. Modeling and analysis of a predator-prey model with disease in the prey. Math. Biosci. 2001, 171: 59～82

[50] 原三领. 含时滞流行病模型的研究. 西安交通大学博士论文. 2001

[51] X Zhao, X Zou. Threshold dynamics in a delayed SIS epidemic model. J. Math. Anal. Appl., 2001, 257: 282～291

[52] 李建全. 具有预防接种流行病的模型. 西安交通大学博士论文. 2003

[53] J Li, Ma Zhien. Stability switches in a class of chracteristic equations with deay dependent parameters. to appear in Nonlinear Analysis

[54] H Hethcote, Ma Zhien, Liao Sheng bing. Effects of quarantine in six endemic models for infectious diseases. Math. Biosci. 2002, 180: 141～160

[55] K L Looke, Z Grossman, Disrete delay. Distribnted delay and stability switches. J Math. Anal., Appl. 1982, 86:592～627

[56] K L Cooke, V D Driessche. On zeros of some transcendental equation. Funkcial. Evac, 1986, 29:77～90

[57] J Li, Z Ma. Stability of sorme characteristic equation with delay dependent parameters. to appear

[58] Q Huang, Z Ma. On stability of some transcendental equations. Ann. of Diff. Eqs., 1990, 6

(1):21～31

[59] W Ma, Y. Tachechi, T Hara and E Beretta, Permanence of an SIR epidemic model with distributed time delays. Tohoku Math. J., 2002, 54:581～591

[60] Y. Tachechil, W Ma and E. Beretta, Global asymptotic properties of a delay SIR epidemic model with finite incubation times. Nonlinear Analysis. 2000, 42:931～947

第 5 章　具有脉冲效应的传染病模型

前面已介绍了许多传染病模型及其研究方法，但是，所涉及的模型都是常微分方程. 而有些传染病模型用具有脉冲的微分方程描述更符合实际. 如，为了对传染病进行控制，常常在给定的时间点进行预防接种，因此，所建立的传染病模型就是脉冲微分方程. 再如，对一些动物，特别是一些野生动物，其出生往往是季节性的，而不是连续的. 因此，研究这些动物中的传染病的变化规律时，必须把其种群动力学规律中的连续出生修正为脉冲出生，才更符合实际情况. 这样给出的传染病动力学方程也是脉冲微分方程，关于具有脉冲的传染病模型，目前的研究还是刚刚起步，所见的研究工作还很少. 目前所见主要工作是 M. G. Roberts, R. R. Kao[6], B. Shulgin, L. Stone[7,8], Alberto D'onofrio[10], Jin Zhen, Ma Zhien[9] 及 Sanyi Tang[11] 等人的. 本章主要介绍这些研究成果.

§5.1　具有脉冲预防接种的 SIR 模型

这一节，主要介绍有因病死亡的 SIR 脉冲预防接种传染病模型无病周期解的全局稳定性及不考虑因病死亡的 SIR 传染病模型预防接种策略.

5.1.1　有因病死亡的 SIR 脉冲预防接种模型

首先给出具有连续预防接种传染病模型，把总人口分为三种，即易感者类 S，染病者类 I 和移出者类 R. 对易感者 S 类进行预防接种，接种后进入到移出者 R 类，疾病的发生率是双线性发生率. 其框图为

pS: $S \to R$

$bK \longrightarrow \boxed{S} \xrightarrow{\beta SI} \boxed{I} \xrightarrow{\lambda I} \boxed{R}$

μS　　$(\alpha+\mu)I$　　μR

其微分方程模型为

$$\begin{cases} S' = \mu K - \beta SI - (\mu + p)S, \\ I' = \beta SI - (\mu + \alpha)I - \lambda I, \\ R' = \lambda I - \mu R + pS, \end{cases} \tag{5.1.1}$$

这里 $N(t) = S(t) + I(t) + R(t)$，$\beta$ 代表传染率系数，λ 代表恢复率系数，μ 是自然死亡率系数，α 是因病死亡率系数，p 是预防接种率.

方程(5.1.1)的无病平衡点为 $E_0=\left(\frac{\mu K}{\mu+p},0,\frac{pK}{\mu+p}\right)$.

基本再生数为

$$\sigma=\frac{\beta}{\mu+\alpha+\lambda}\times\frac{K\mu}{\mu+p}. \tag{5.1.2}$$

当 $\sigma>1$ 时,存在正平衡点 $E_+=(S_+,I_+,R_+)$, 其中

$$S_+=\frac{\mu+\alpha+\lambda}{\beta},$$

$$I_+=\frac{\mu+p}{\beta}(\sigma-1)=\frac{\lambda[\mu K-(\mu+p)S_+]}{\beta S_+},$$

$$R_+=\frac{\lambda I_++pS_+}{\mu}=\frac{\lambda[\mu K-(\mu+p)S_+]+\beta pS_+^2}{\beta\mu S_+}.$$

方程(5.1.1)的平衡点的稳定性如下.

定理 5.1.1[9] 当 $\sigma<1$ 时,无病平衡点 E_0 全局渐近稳定;当 $\sigma>1$ 时,无病平衡点 E_0 不稳定,正平衡点 E_+ 全局渐近稳定.

该定理的证明是容易的,详见文献[9].

当预防接种不是以连续的方式而是在离散的时间点以周期为 1 进行,可把模型(5.1.1)进行修正为脉冲微分方程

$$\begin{cases}S'=\mu K-\beta SI-\mu S, & t\neq k,\\ I'=\beta SI-(\mu+\alpha)I-\lambda I, & k=0,1,2,\cdots,\\ R'=\lambda I-\mu R.\end{cases} \tag{5.1.3}$$

$$\begin{cases}S(k^+)=(1-\rho)S(k),\\ I(k^+)=I(k), & k=0,1,2,\cdots,\\ R(k^+)=R(k)+\rho S(k),\end{cases} \tag{5.1.4}$$

这里 $f(k^+)=\lim\limits_{t\to k^+}f(t)$, $f(k)=\lim\limits_{t\to k^-}f(t)$, ρ 是预防接种的比例. 方程(5.1.3)和(5.1.4)的无病周期 1 解的存在性及局部稳定性我们在第二章 2.5.2 节中已进行了研究,设方程组(5.1.3)和(5.1.4)无病周期 1 解为 $(S^*(t),0,R^*(t))$, 其中

$$S^*(t)=K-\frac{K\rho e^{-\mu t}}{1-(1-\rho)e^{-\mu}},\qquad R^*(t)=\frac{\rho Ke^{-\mu t}}{1-(1-\rho)e^{-\mu}}. \tag{5.1.5}$$

令

$$\sigma_1=\frac{\beta}{\mu+\alpha+\lambda}\times\left[K-\frac{K\rho(e^{\mu}-1)}{\mu(e^{\mu}-1+\rho)}\right],$$

这里

$$K-\frac{K\rho(e^{\mu}-1)}{\mu(e^{\mu}-1+p)}=\int_0^1S^*(t)dt,$$

其中 σ_1 是脉冲传染病模型(5.1.3)和(5.1.4)的基本再生数.

下面来研究方程(5.1.3)和(5.1.4)无病周期 1 解$(S^*(t),0,R^*(t))$的全局渐近稳定性. 为此, 需要下面的脉冲微分不等式.

引理 5.1.1[1] 考虑脉冲微分不等式

$$\begin{cases} m'(t)\leqslant p(t)m(t)+q(t), & t\neq t_k, \\ m(t_k)\leqslant d_k m(t_k^-)+b_k, & k\in N, \end{cases}$$

这里 $p(t),q(t)\in C[R_+,R]$, $d_k\geqslant 0$, b_k 是常数. 假设

(i) 序列$\{t_k\}$满足 $0\leqslant t_0<t_1<t_2<\cdots$, 而且 $\lim\limits_{k\to\infty}t_k=\infty$,

(ii) $m(t)\in PC'[R_+,R]$, 而且 $m(t)$是在 t_k 处左连续,

则有

$$m(t)\leqslant m(t_0)\prod_{t_0<t_k<t}d_k\exp\left(\int_{t_0}^t p(s)\mathrm{d}s\right)+\sum_{t_0<t_k<t}\left(\prod_{t_k<t_j<t}d_j\exp\left(\int_{t_k}^t p(s)\mathrm{d}s\right)\right)b_k$$

$$+\int_{t_0}^t\prod_{s<t_k<t}d_k\exp\left(\int_s^t p(\sigma)\mathrm{d}\sigma\right)q(s)\mathrm{d}s),\quad t\geqslant t_0.$$

定理 5.1.2[9] 若 $\sigma_1<1$, 则方程组(5.1.3)和(5.1.4)的任一解$(S(t),I(t),R(t))$都最终趋向于无病周期 1 解$(S^*(t),0,R^*(t))$.

证明 由方程组(5.1.3)的第一个方程和方程(5.1.4)的第一个方程得

$$\begin{cases} S'=\mu K-\beta SI-\mu S\leqslant \mu K-\mu S, & t\neq k, \\ S(k^+)=(1-\rho)S(k). \end{cases}\tag{5.1.6}$$

对方程组(5.1.6)应用引理 5.1.1 得

$$\begin{aligned}
S(t)&\leqslant S(0^+)\Big(\prod_{0<k<t}(1-\rho)\Big)\exp\left(-\int_0^t\mu\mathrm{d}s\right)+\int_0^t\Big(\prod_{s<k<t}(1-\rho)\Big)\mu K\exp(-\mu(t-s))\mathrm{d}s\\
&=S(0^+)(1-\rho)^{[t]}\mathrm{e}^{-\mu t}+K\mathrm{e}^{-\mu t}\int_0^t\Big(\prod_{s<k<t}(1-\rho)\Big)\mu\mathrm{e}^{\mu s}\mathrm{d}s\\
&=S(0^+)(1-\rho)^{[t]}\mathrm{e}^{-\mu t}+K\mathrm{e}^{-\mu t}\Big[\int_0^1\Big(\prod_{s<k<t}(1-\rho)\Big)\mathrm{e}^{\mu s}\mathrm{d}(\mu s)\\
&\quad+\int_1^2\Big(\prod_{s<k<t}(1-\rho)\Big)\mathrm{e}^{\mu s}\mathrm{d}(\mu s)+\cdots+\int_{[t]-1}^{[t]}\Big(\prod_{s<k<t}(1-\rho)\Big)\mathrm{e}^{\mu s}\mathrm{d}(\mu s)\\
&\quad+\int_{[t]}^t\Big(\prod_{s<k<t}(1-\rho)\Big)\mathrm{e}^{\mu s}\mathrm{d}(\mu s)\Big]\\
&=S(0^+)(1-\rho)^{[t]}\mathrm{e}^{-\mu t}+K\mathrm{e}^{-\mu t}[(1-\rho)^{[t]}(\mathrm{e}^{\mu}-1)\\
&\quad+(1-\rho))^{[t]-1}(\mathrm{e}^{\mu}-1)\mathrm{e}^{\mu}+\cdots+(1-\rho)(\mathrm{e}^{\mu}-1)\mathrm{e}^{([t]-1)\mu}+e^{\mu t}-\mathrm{e}^{[t]\mu}]\\
&=S(0^+)(1-\rho)^{[t]}\mathrm{e}^{-\mu t}
\end{aligned}$$

$$
+ K\mathrm{e}^{-\mu t}\left[\frac{(1-\rho)^{[t]}(\mathrm{e}^{\mu}-1)\left[1-\left(\frac{\mathrm{e}^{\mu}}{1-\rho}\right)^{[t]}\right]}{1-\frac{\mathrm{e}^{\mu}}{1-\rho}}+\mathrm{e}^{\mu t}-\mathrm{e}^{[t]\mu}\right]
$$

$$
= \mathrm{e}^{-\mu t}\left[S(0^{+})(1-\rho)^{[t]}-\frac{K(1-\rho)^{[t]+1}(\mathrm{e}^{\mu}-1)}{\mathrm{e}^{\mu}-1+\rho}\right]
$$

$$
+ K\left[1-\frac{\rho\mathrm{e}^{\mu([t]+1-t)}}{\mathrm{e}^{\mu}-1+\rho}\right]
$$

$$
= r(t)+K\left[1-\frac{\rho\mathrm{e}^{\mu([t]+1-t)}}{\mathrm{e}^{\mu}-1+\rho}\right], \tag{5.1.7}
$$

其中

$$
r(t)=\mathrm{e}^{-\mu t}\left[S(0^{+})(1-\rho)^{[t]}-\frac{K(1-\rho)^{[t]+1}(\mathrm{e}^{\mu}-1)}{\mathrm{e}^{\mu}-1+\rho}\right].
$$

由 $r(t)$ 的表达式可得

$$
r(t)\leqslant S(0)\mathrm{e}^{-\mu t}. \tag{5.1.8}
$$

由(5.1.3)的第二个方程及(5.1.7)和(5.1.8)得

$$
\begin{aligned}
I' &= [\beta S-(\mu+\alpha)-\lambda]I \\
&\leqslant \left[K\beta\left(1-\frac{\rho\mathrm{e}^{\mu}\mathrm{e}^{\mu([t]-t)}}{\mathrm{e}^{\mu}-1+\rho}\right)-\lambda-\alpha-\mu+\beta r(t)\right]I.
\end{aligned}
$$

由(5.1.4)及上式得

$$
\begin{aligned}
I(t)\leqslant I(0)\exp\Big(&[K\beta-\lambda-\alpha-\mu]t \\
&-\frac{K\beta\rho\mathrm{e}^{\mu}}{\mathrm{e}^{\mu}-1+\rho}\int_0^t\mathrm{e}^{\mu([s]-s)}\mathrm{d}s+\beta\int_0^t r(s)\mathrm{d}s\Big).
\end{aligned} \tag{5.1.9}
$$

因为

$$
\begin{aligned}
\int_0^t\mathrm{e}^{\mu([s]-s)}\mathrm{d}s &= \int_0^1\mathrm{e}^{-\mu s}\mathrm{d}s+\int_1^2\mathrm{e}^{\mu(1-s)}\mathrm{d}s+\int_2^3\mathrm{e}^{\mu(2-s)}\mathrm{d}s+\cdots \\
&\quad+\int_{([t]-1)}^{[t]}\mathrm{e}^{\mu([t]-1-s)}\mathrm{d}s+\int_{[t]}^{t}\mathrm{e}^{\mu([t]-s)}\mathrm{d}s \\
&= \frac{(1-\mathrm{e}^{-\mu})}{\mu}[t]+\frac{1}{\mu}(1-\mathrm{e}^{-\mu(t-[t])}),
\end{aligned}
$$

而且 $0\leqslant t-[t]\leqslant 1$,故由上式可得

$$
\int_0^t\mathrm{e}^{\mu([s]-s)}\mathrm{d}s\geqslant\frac{(1-\mathrm{e}^{-\mu})}{\mu}[t].
$$

把上面的估计式代入(5.1.9)得

$$
I(t)\leqslant I(0)\exp\left\{[K\beta-\lambda-\alpha-\mu]t-\frac{K\beta\rho(\mathrm{e}^{\mu}-1)}{(\mathrm{e}^{\mu}-1+\rho)\mu}[t]+\beta\int_0^t r(s)\mathrm{d}s\right\}
$$

$$\leqslant D(t)\exp\left\{\left[K\beta\left(1-\frac{\rho}{e^{\mu}-1+\rho}\frac{e^{\mu}-1}{\mu}\right)-\lambda-\alpha-\mu\right]t\right\}, \quad (5.1.10)$$

其中

$$D(t)=I(0)\exp\left\{-\frac{S(0)\beta}{\mu}e^{-\mu t}+\frac{S(0)\beta}{\mu}\right\}\exp\left\{\frac{K\beta\rho(e^{\mu}-1)}{(e^{-\mu}-1+\rho)\mu}(t-[t])\right\}$$

是正的且有上界. 由(5.1.10)式知, 当 $\sigma_1>1$ 时, 有 $I(t)\to 0(t\to+\infty)$.

下面证明对方程组(5.1.3)和(5.1.4)的任一解 $(S(t),I(t),R(t))$, 都有

$$S(t)\to S^*(t), \qquad R(t)\to R^*(t), \qquad t\to+\infty.$$

事实上, 令

$$V(t)=|S(t)-S^*(t)|,$$

则

$$\begin{aligned}D^+V(t)&=\operatorname{sign}(S(t)-S^*(t))(S'(t)-S^{*\prime}(t))\\&=-\mu|S(t)-S^*(t)|+\beta S(t)I(t).\end{aligned} \quad (5.1.11)$$

因为 $S(t)<K$, 所以, 由(5.1.10)及上式得到

$$D^+V(t)\leqslant-\mu|S(t)-S^*(t)|+r_1(t), \quad t\neq k, \quad (5.1.12)$$

其中 $r_1(t)=\beta KDe^{-Ct}$, $C=-\dfrac{K\beta(e^{\mu}-1)}{e^{\mu}-1+\rho}+\lambda+\alpha+\mu>0$. 当 $t=k$ 时,

$$\begin{aligned}V(k^+)&=|S(k^+)-S_p(k^+)|\\&=(1-\rho)|S(k)-S^*(k)|\\&=(1-\rho)V(k).\end{aligned} \quad (5.1.13)$$

对方程(5.1.12)和(5.1.13)应用引理 5.1.1, 得

$$\begin{aligned}V(t)&\leqslant V(0^+)(1-\rho)^{[t]}\exp(-\mu t)+\int_0^t\prod_{s<k<t}(1-\rho)r_1(s)\exp(-\mu(t-s))\mathrm{d}s\\&=V(0^+)(1-\rho)^{[t]}e^{-\mu t}+e^{-\mu t}\left[\int_0^1(1-\rho)^{[t]}e^{\mu s}r_1(s)\mathrm{d}s\right.\\&\quad\left.+\int_1^2(1-\rho)^{[t]-1}e^{\mu s}r_1(s)\mathrm{d}s+\cdots+\int_{[t]-1}^{[t]}(1-\rho)e^{\mu s}r_1(s)\mathrm{d}s+\int_{[t]}^t e^{\mu s}r_1(s)\mathrm{d}s\right]\\&\leqslant V(0^+)(1-\rho)^{[t]}e^{-\mu t}+K\beta De^{-\mu t}\left\{\frac{(1-\rho)^{[t]}(e^{\mu-c}-1)}{\mu-c}\right.\\&\quad+\frac{(1-\rho)^{[t]-1}(e^{\mu-c}-1)e^{\mu-c}}{\mu-c}+\cdots\\&\quad\left.+\frac{(1-\rho)(e^{\mu-c}-1)e^{(m-1)(\mu-c)}}{\mu-c}+\frac{e^{(\mu-c)t}-e^{[t](\mu-c)}}{\mu-c}\right\}\\&=V(0^+)(1-\rho)^{[t]}e^{-\mu t}\end{aligned}$$

$$
+\frac{K\beta De^{-\mu t}}{\mu-c}\left\{\frac{(1-\rho)^{[t]}(e^{\mu-c}-1)\left[1-\left(\frac{e^{\mu-c}}{1-\rho}\right)^{[t]}\right]}{1-\frac{e^{\mu-c}}{1-\rho}}+e^{(\mu-c)t}-e^{[t](\mu-c)}\right\}
$$

$$
\begin{aligned}
&= V(0^+)(1-\rho)^{[t]}e^{-\mu t} \\
&\quad+\frac{K\beta De^{-\mu t}}{\mu-c}\left\{\frac{-(1-\rho)^{([t]+1)}(e^{\mu-c}-1)-\rho e^{\mu-c([t]+1)}}{e^{\mu-c}-1+\rho}+e^{(\mu-c)t}\right\} \\
&= V(0^+)(1-\rho)^{[t]}e^{-\mu t}+\frac{K\beta De^{-ct}}{\mu-c} \\
&\quad-\frac{K\beta D(1-\rho)^{([t]+1)}(e^{\mu-c}-1)e^{-\mu t}}{e^{\mu-c}-1+\rho}-\frac{\beta kD\rho e^{(-\mu t+\mu[t]+\mu-c[t]-c)}}{e^{\mu-c}-1+\rho}.
\end{aligned}
$$

由上式知 $V(t)\to 0(t\to+\infty)$,从而知 $S(t)\to S^*(t)(t\to+\infty)$.

同理可证 $R(t)\to R^*(t)(t\to+\infty)$.这样就完成了该定理的证明. ▌

结合定理 2.5.4 和定理 5.1.2 可得如下定理.

定理 5.1.3[9]　若 $\sigma_1<1$,则方程(5.1.3)和(5.1.4)的无病周期 1 解 $(S^*(t),0,R^*(t))$是全局渐近稳定.

下面我们从基本再生数 σ 和 σ_1 出发,来比较连续和脉冲预防接种比例的大小.

令 $\sigma_1=1$, 则可得

$$
\rho=\frac{(\beta K-\mu-\alpha-\lambda)\mu}{\beta K\left(1-\frac{\mu}{e^{\mu}-1}\right)+\frac{\mu(\mu+\alpha+\lambda)}{e^{\mu}-1}}\triangleq\rho_c. \tag{5.1.14}
$$

令 $\sigma=1$,则可得

$$
p=\frac{(\beta K-\mu-\alpha-\lambda)}{\mu+\alpha+\lambda}\triangleq p_c. \tag{5.1.15}
$$

由(5.1.14)和(5.1.15)可知

$$
\rho_c=\frac{p_c}{\frac{\mu}{e^{\mu}-1}+\frac{\beta K}{\mu+\alpha+\lambda}\left(1-\frac{\mu}{e^{\mu}-1}\right)}. \tag{5.1.16}
$$

当 $\mu\ll 1$ 时,由(5.1.14)和(5.1.15)可知 $\rho_c\approx p_c$.

下面分两种情形进行讨论.

(a) 当 $\beta K>\mu+\alpha+\lambda$ 时,可推得 $\frac{\mu}{e^{\mu}-1}+\frac{\beta K}{\mu+\alpha+\lambda}\left(1-\frac{\mu}{e^{\mu}-1}\right)>1$. 由(5.1.16)可得 $\rho_c<p_c$. 因为 $\beta K>\mu+\alpha+\lambda$ 时,表示无预防接种时形成地方病,此时采取预防接种使地方病消失,则采取脉冲接种比采取连续接种要好.

(b) 当 $\beta K<\mu+\alpha+\lambda$ 时,可推得 $\frac{\mu}{e^{\mu}-1}+\frac{\beta K}{\mu+\alpha+\lambda}\left(1-\frac{\mu}{e^{\mu}-1}\right)<1$,由

(5.1.16)可得 $\rho_c > p_c$. 因为 $\beta K < \mu + \alpha + \lambda$ 时,表示无预防接种没有形成地方病,此时,进行接种就没有必要.

5.1.2 无因病死亡的 SIR 传染病模型预防接种策略

考虑标准的 SIR 传染病模型

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \mu - (\beta I + \mu)S, \\ \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \beta SI - (\mu + g)I, \\ \dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = gI - \mu R. \end{cases} \tag{5.1.17}$$

方程组(5.1.17)的总人口渐近于常数 1,为研究方便,设 $N = S + I + R = 1$.

方程组(5.1.17)的第一和第二个方程不含 R,故只须研究下面的方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \mu - (\beta I + \mu)S, \\ \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \beta SI - (\mu + g)I. \end{cases} \tag{5.1.18}$$

方程(5.1.18)有无病平衡点(1,0)及地方病平衡点(S_c, I_c),其中

$$S_c = \frac{\mu + g}{\beta}, \quad I_c = \frac{\mu}{\beta}(R_0 - 1),$$

这里

$$R_0 = \frac{\beta}{\mu + g} \tag{5.1.19}$$

是基本再生数.

易证,当 $R_0 < 1$ 时,无病平衡点全局渐近稳定;当 $R_0 > 1$ 时,地方病平衡点(S_c, I_c)存在且全局渐近稳定. 此时,无病平衡点不稳定.

为了对疾病进行控制,我们采取预防接种. 接种的目的是使易感人群的数量降低,使疾病不形成地方病. 因此可以通过对 S 类进行接种使 S 在任何时刻的数量都小于地方病平衡点中的 S_c,即 $S(t) < S_c = \dfrac{\mu + g}{\beta}$,进而由方程组(5.1.18)的第二个方程得$\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} < 0$,即染病者数量单调递减,直到趋于零.

当预防接种是脉冲接种,且接种周期为 T 时,方程组(5.1.18)变为下面的非自治脉冲微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \mu - (\beta I + \mu)S - p\sum\limits_{n=0}^{\infty} S(nT^-)\delta(t - nT), \\ \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \beta IS - (\mu + g)I, \end{cases} \tag{5.1.20}$$

其中

$$S(nT^-) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} S(nT - \varepsilon),$$

p 是预防接种成功的比例$(0<p<1)$，$\delta(t)$是 δ 函数，脉冲预防接种在离散点 $t=nT(n=0,1,2,\cdots)$进行.

无病周期解的存在性

无病周期解存在的必要条件为

$$I(t) = 0, t \geqslant 0. \tag{5.1.21}$$

在条件(5.1.21)下，显然易感者种群 $S(t)$是与脉冲周期相同的周期函数.

当 $I(t)=0$ 时，在 $t_0=(n-1)T\leqslant t\leqslant nT$ 内，$S(t)$满足方程

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \mu(1 - S) - pS(nT^-)\delta(t - nT). \tag{5.1.22}$$

解方程(5.1.22)得

$$S(t) = 1 + (\hat{S} - 1)\mathrm{e}^{-\mu(t-t_0)} - p[1 + (\hat{S} - 1)\mathrm{e}^{-\mu T}]\int_{t_0}^{t} \delta(t - nT)\mathrm{d}t, \tag{5.1.23}$$

其中 $\hat{S}=S(t_0)$是易感者 S 经过第$(n-1)$次脉冲接种后的数量. 记 $Q(t)=1-(1-\hat{S})\mathrm{e}^{-\mu(t-t_0)}$，则方程(5.1.23)可写为

$$S(t) = \begin{cases} Q(t), & t_0 = (n-1)T \leqslant t < nT, \\ (1-p)Q(t), & t = nT. \end{cases} \tag{5.1.24}$$

记初始条件 $\hat{S}(n)=S(nT)=S_n$，则 S_n 可用频闪映射(stroboscopic map)表示为

$$S_{n+1} = F(S_n). \tag{5.1.25}$$

由(5.1.24)可得

$$S_{n+1} = F(S_n) = (1 - p)[1 + (S_n - 1)\mathrm{e}^{-\mu T}]. \tag{5.1.26}$$

映射 F 有惟一的不动点

$$S^* = F(S^*) = \frac{(1 - p)(\mathrm{e}^{\mu T} - 1)}{p - 1 + \mathrm{e}^{\mu T}}. \tag{5.1.27}$$

不动点 S^*是易感者 $S(t)$在 $t_n=nT$ 处以 T 为周期的循环点. 在假设(5.1.21)下，不动点 S^*是局部稳定的，因为

$$\left|\frac{\mathrm{d}F(S_n)}{\mathrm{d}S}\right|_{S_n = S^*} = (1 - p)\mathrm{e}^{-\mu T} < 1.$$

故由脉冲预防接种导出的数列 S_n 必收敛于 S^*.

因此，易感者 $S(t)$收敛于一个周期解，在(5.1.23)中，取 $\hat{S}=S^*$，则获得一个在第 n 个时间段 $t_0\leqslant(n-1)T\leqslant t\leqslant nT$ 的无病周期解

$$\begin{cases}\tilde{S}(t) = 1 - \dfrac{pe^{\mu T}}{e^{\mu T} - (1-p)}e^{-\mu(t-t_0)} \\ \qquad - p\left[1 - \dfrac{pe^{\mu T}}{e^{\mu T} - (1-p)}e^{-\mu T}\right]\displaystyle\int_{t_0}^{t}\delta(t-nT)\mathrm{d}t, \\ \tilde{I}(t) = 0.\end{cases} \tag{5.1.28}$$

无病周期解的稳定性

无病周期解的稳定性可通过(5.1.20)的线性化来研究.作变换

$$\begin{cases}S(t) = \tilde{S}(t) + s, \\ I(t) = \tilde{I}(t) + i,\end{cases}$$

其中 s 和 i 是小扰动,把方程(5.1.20)展开成 Taylor 级数,并略去高次项,得线性系统

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = -\mu s - \beta\tilde{S}(t)i - ps(nT^-)\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\delta(t-nT), \\ \dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = i[\beta\tilde{S}(t) - \mu - g].\end{cases} \tag{5.1.29}$$

为了研究方程(5.1.29)的无病周期解的稳定性,需求(5.1.29)在 $0\leqslant t\leqslant T$ 上的基解矩阵

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} s_1(t) & s_2(t) \\ i_1(t) & i_2(t)\end{bmatrix}, \quad \Phi(0) = E(\text{单位矩阵}).$$

容易求得

$$i_1(t) = 0,$$

$$s_1(t) = e^{-\mu t} - pe^{-\mu t}\int_0^t \delta(t-nT)\mathrm{d}t,$$

$$i_2(t) = \exp\left\{\int_0^t [\beta\tilde{S}(t) - (\mu+g)]\mathrm{d}t\right\},$$

$s_2(t)$不需计算.

矩阵 $\Phi(T)$的 Floquet 乘子($\Phi(T)$的特征值)为

$$\begin{cases}\lambda_1 = (1-p)e^{-\mu T} < 1, \\ \lambda_2 = i_2(T) = \exp\left[\displaystyle\int_0^T \beta\tilde{S}\mathrm{d}t - (\mu+g)T\right].\end{cases} \tag{5.1.30}$$

根据 Floquet 定理知,无病周期解局部稳定的条件为

$$|\lambda_2| < 1,$$

即

$$\frac{1}{T}\int_0^T \tilde{S}(t)\mathrm{d}t < \frac{\mu+g}{\beta} = S_c. \tag{5.1.31}$$

条件(5.1.31)表明,若无病周期解的分量 $\tilde{S}(t)$在 T 周期内的积分均值若小于

无接种时地方病平衡点 S 的坐标 S_c，则无病周期解是局部稳定的.

事实上，我们也可以利用脉冲不等式能证明该周期解在条件(5.1.31)下是全局渐近稳定的.

把(5.1.28)代入(5.1.31)可得稳定的条件为

$$\frac{(\mu T-p)(e^{\mu T}-1)+\mu pT}{\mu T(p-1+e^{\mu T})}<\frac{\mu+g}{\beta}=S_c. \tag{5.1.32}$$

最大脉冲接种周期 T_{max} 的计算

当预防接种的比例 p 给定以后，计算使地方病消失的最大脉冲接种周期 $T_{max}(p)$ 是一个非常有意义的工作. 计算最大脉冲接种周期 $T_{max}(p)$ 有两种方法，一种是从无病周期解全局稳定出发来计算；另一种是直接从使染病者单调下降出发来计算.

方法 1 从无病周期解全局稳定出发来计算

从前面的讨论可以看出 $T_{max}(p)$ 就是使不等式(5.1.32)成立所允许的 T 的最大取值.

为了得到 T_{max} 的近似表达式，我们假设 $T\ll\frac{1}{\mu}$，即脉冲接种的周期 T 远小于人的平均寿命，及 $\mu\ll g$，即人的平均寿命远大于病程. 在此假设下将(5.1.32)泰勒展开，并忽略高次项得

$$T_{max}\approx\frac{2gp}{\mu(2\beta-p-g)}. \tag{5.1.33}$$

方法 2 从染病者单调下降来计算

从方程组(5.1.20)的第二个方程可知，要使染病者 $I(t)$ 在任何时间都单调下降，只须通过脉冲接种，使所有时间内的易感者 $S(t)<S_c=\frac{\mu+g}{\beta}$. 当 $S(t)$ 趋向临界值 S_c 时，立即进行接种，使易感者的数量 $S(t)$ 降为 $(1-p)S(t)$，接种以周期 T 进行的，则最大接种周期 T_{max} 就是从初值 $S(0)=(1-p)S_c$ 出发，使 $S(t)\leqslant S_c$ 成立的最大允许时间.

由方程组(5.1.18)的第一个方程可知

$$\frac{dS}{dt}=\mu-\mu S-\beta SI\leqslant\mu-\mu S,$$

则 $S(t)$ 比下面的初值问题的解要小，

$$\frac{dx}{dt}=\mu-\mu x,\ x(0)=(1-p)S_c.$$

求解该方程可得

$$x(t)=1+[(1-p)S_c-1]e^{-\mu t},$$

即有

$$S(t) \leqslant x(t) = 1 + [(1-p)S_c - 1]e^{-\mu t}.$$

若 $x(t) \leqslant S_c$，则有 $S(t) \leqslant S_c$. 由 $x(t) \leqslant S_c$ 可得

$$0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{\mu}\ln\left(1 + \frac{pS_c}{1-S_c}\right).$$

因此，T_{max} 为

$$T_{max} = \frac{1}{\mu}\ln\left(1 + \frac{pS_c}{1-S_c}\right). \tag{5.1.34}$$

公式(5.1.34)也可由下面的方法获得.

由(5.1.27)可知，S^* 是以周期 T 进行脉冲接种后的最小易感者数量，则最大易感者数量就是脉冲接种前的易感者数量 $\frac{S^*}{1-p}$. 从 $\frac{S^*}{1-p} \leqslant S_c$ 可得

$$T_{max} = \frac{1}{\mu}\ln\left(1 + \frac{pS_c}{1-S_c}\right).$$

一般情况下，由(5.1.33)给出的 T_{max} 要比由(5.1.34)得到的 T_{max} 要大，因为(5.1.34)利用了不等式放大及 $\mathrm{d}I/\mathrm{d}t < 0$.

§5.2 具有脉冲预防接种的SIRS传染病模型

本节考虑具有脉冲预防接种且传染率是标准的SIRS传染病模型，主要介绍文献[9]的有关工作. 文献[9]在脉冲预防接种下，给出了SIRS传染病模型基本再生数，证明了无病周期解的存在性和全局渐近稳定性.

5.2.1 具有连续预防接种且传染率是标准型的SIRS模型

考虑传染率是标准的且预防接种是连续的SIRS模型

$$\begin{cases} S' = bN - \lambda\dfrac{SI}{N} + \theta I + eR - (\mu + p)S, \\ I' = \lambda\dfrac{SI}{N} - (\mu + \varepsilon + c + \theta)I, \\ R' = cI + pS - (\mu + e)R. \end{cases} \tag{5.2.1}$$

总人口 N 满足下列方程

$$N' = (b - \mu)N - \varepsilon I, \tag{5.2.2}$$

其中 b 代表出生率系数，λ 代表接触率，θ 代表从染病者到易感者的转移率系数，c 代表从染病者到恢复者的转移率系数，e 代表失去免疫率系数，μ 是自然死亡率系数，ε 是因病死亡率系数，p 是预防接种比例.

令 $s = \frac{S}{N}, i = \frac{I}{N}, r = \frac{R}{N}$，可行区域为

$$\Omega = \{(s,i,r) \mid s \geqslant 0, i \geqslant 0, r \geqslant 0, s+i+r=1\},$$

则方程(5.2.1)变为

$$\begin{cases} s' = b - bs - ps + er + \theta i - (\lambda - \varepsilon)si, \\ i' = -(b+\varepsilon+c+\theta)i + \lambda si + \varepsilon i^2, \\ r' = -(b+e)r + ci + ps + \varepsilon ir, \end{cases} \tag{5.2.3}$$

这里 $s+i+r=1$. 方程(5.2.3)总存在无病平衡点

$$E_0 = \left(\frac{b+e}{b+e+p}, 0, \frac{b+e}{b+e+p}\right).$$

定义

$$\Omega_0 = \Omega - E_0.$$

设

$$R_0 = \frac{\lambda}{b+\varepsilon+c+\theta} \times \frac{b+e}{b+e+p}. \tag{5.2.4}$$

文献[9]证明了下面的结论

定理 5.2.1[9]　若 $R_0<1$,则系统(5.2.3)只有无病平衡点 E_0,没有地方病平衡点;若 $R_0>1$,则系统(5.2.3)除有无病平衡点 E_0 外还存在惟一的地方病平衡点 $E_+(s^*,i^*,r^*)$.

定理 5.2.2[9]　对系统(5.2.3),当 $R_0<1$ 时,E_0 全局渐近稳定;当 $R_0>1$ 时,E_0 不稳定,地方性平衡点 E_+ 在 Ω_0 内全局渐近稳定. 集合 $Q=\{(s,i,r)\in \Omega \mid i=0\}$ 是不变集,从 Q 出发的解都趋向于 E_0,从初值 $(s_0,i_0,r_0)(i_0\neq 0)$ 出发的解都趋向于 E_+.

5.2.2　具有脉冲预防接种且传染率是标准型的 SIRS 模型

考虑传染率是标准的且预防接种是脉冲的 SIRS 模型

$$\begin{cases} S' = bN - \lambda \dfrac{SI}{N} + \theta I + eR - \mu S, & t \neq t_n, \\ I' = \lambda \dfrac{SI}{N} - (\mu+\varepsilon+c+\theta)I, & t_{n+1} = t_n + T, \\ R' = cI - (\mu+e)R \end{cases} \tag{5.2.5}$$

及

$$\begin{cases} S(t^+) = (1-p)S(t^-), & t = t_n, \\ I(t^+) = I(t^-), & n = 0,1,2,\cdots, \\ R(t^+) = R(t^-) + pS(t^-). \end{cases} \tag{5.2.6}$$

令 $N(t)=S(t)+I(t)+R(t)$,由方程组(5.2.5),(5.2.6)得到关于 $N(t)$ 的方程

$$N'(t) = (b - \mu)N - \varepsilon I. \tag{5.2.7}$$

方程组(5.2.5),(5.2.6)中的 t_n 代表预防接种时间点, T 是两次接种的时间间隔即周期,是一个正的常数.令 $s=\frac{S}{N}$, $i=\frac{I}{N}$, $r=\frac{R}{N}$,则方程组(5.2.5)~(5.2.7)相应变为

$$\begin{cases} s' = b - bs + er + \theta i - (\lambda - \varepsilon)si, & t \neq t_n, \\ i' = -(b + \varepsilon + c + \theta)i + \lambda si + \varepsilon i^2, & t_{n+1} = t_n + T, \\ r' = -(b + e)r + ci + \varepsilon ir \end{cases} \tag{5.2.8}$$

及

$$\begin{cases} s(t^+) = (1 - p)s(t^-), & t = t_n, \\ i(t^+) = i(t^-), & n = 0,1,2,\cdots, \\ r(t^+) = r(t^-) + ps(t^-), \end{cases} \tag{5.2.9}$$

$$N'(t) = (b - \mu - \varepsilon i)N. \tag{5.2.10}$$

因为 $s+i+r=1$,所以仅须考虑下面的方程组

$$\begin{cases} i' = -(b + \varepsilon + c + \theta)i + \lambda i(1 - i - r) + \varepsilon i^2, & t \neq t_n, \\ r' = -(b + e)r + ci + \varepsilon ir, & t_{n+1} = t_n + T \end{cases} \tag{5.2.11}$$

及

$$\begin{cases} i(t^+) = i(t^-), & t = t_n, n = 0,1,2,\cdots, \\ r(t^+) = r(t^-) + p[1 - i(t^-) - r(t^-)]. \end{cases} \tag{5.2.12}$$

无病周期解的存在性

研究无病周期解的存在性就是寻找当 $i=0$ 时,满足方程组(5.2.11)和(5.2.12)的 T 周期解.注意到,当 $i=0$ 时,方程组(5.2.11)和(5.2.12)变为

$$\begin{cases} r' = -(b + e)r, & t \neq t_n, \\ r(t^+) = r(t^-) + p[1 - r(t^-)], & t = t_n. \end{cases} \tag{5.2.13}$$

方程组(5.2.13)在区间 $t_n \leqslant t \leqslant t_{n+1}$ 上的解为

$$r(t) = \begin{cases} r(t^+)\exp\{-(b + e)(t - t_n)\}, & t_n \leqslant t < t_{n+1}, \\ r(t_{n+1}^+) = p + (1 - p)r(t_{n+1}^-), & t = t_{n+1}. \end{cases} \tag{5.2.14}$$

令 $r(t_{n+1}^+) = r_{n+1}$,则由方程(5.2.14)得

$$r_{n+1} = p + (1 - p)r_n\exp\{-(b + e)T\}.$$

设 $F: r_n \to r_{n+1}$ 是一个映射,满足

$$r_{n+1} = F(r_n) = p + (1 - p)r_n\exp\{-(b + e)T\}. \tag{5.2.15}$$

该映射有惟一的不动点

$$r_0 = F(r_0) = \frac{p\exp\{(b+e)T\}}{\exp\{(b+e)T\}-1+p}.$$

因为 $\left|\dfrac{\mathrm{d}F(r_n)}{\mathrm{d}r}\right|_{r_n=r_0}=(1-p)\exp\{-(b+e)T\}<1$，所以不动点 r_0 是稳定的. 从而可得序列 $\{r_n\}$ 必定收敛于 r_0. 故方程组(5.2.11)和(5.2.12)有无病的 T 周期解 $(\tilde{i}(t),\tilde{r}(t))$，其中

$$\begin{cases}\tilde{r}(t)=\begin{cases}\dfrac{p\mathrm{e}^{(b+e)T}}{\mathrm{e}^{(b+e)T+p-1}}\exp\{-(b+e)(t-t_n)\}, & t_n\leqslant t<t_{n+1};\\ r_0, & t=t_{n+1}.\end{cases}\\ \tilde{i}(t)=0.\end{cases}$$

无病周期解的稳定性

下面考虑无病周期解 $(\tilde{i}(t),\tilde{r}(t))$ 的稳定性. 首先考虑该周期解的局部稳定性.

令 $i(t)=\tilde{i}(t)+x(t)$，$r(t)=\tilde{r}(t)+y(t)$. 在 $t\neq t_n$ 时，方程组(5.2.11)关于周期解 $(\tilde{i}(t),\tilde{r}(t))$ 的线性化系统为

$$\begin{cases}x'=x[-(b+\varepsilon+c+\theta)+\lambda-2\lambda\tilde{i}(t)-\lambda\tilde{r}(t)\\ \qquad +2\varepsilon\tilde{i}(t)]-\lambda\tilde{i}(t)y,\\ y'=x[c+\varepsilon\tilde{i}(t)]+[-(b+e)+\varepsilon\tilde{i}(t)]y.\end{cases}\tag{5.2.16}$$

设 $\Phi(t)$ 是系统(5.2.16)的基解矩阵，且满足

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=\begin{bmatrix}\lambda-(b+\varepsilon+c+\theta)-\lambda\tilde{r}(t) & 0\\ c+\varepsilon\tilde{r}(t) & -(b+e)\end{bmatrix}\Phi(t),\tag{5.2.17}$$

其中 $\Phi(0)=I$，I 单位矩阵. 解矩阵方程组(5.2.17)得

$$\Phi(t)=\begin{bmatrix}\varphi_{11}(t) & 0\\ \varphi_{21}(t) & \varphi_{22}(t)\end{bmatrix},$$

其中

$$\varphi_{11}(t)=\exp\left\{[\lambda-(b+\varepsilon+c+\theta)]t-\lambda\int_0^t\tilde{r}(s)\mathrm{d}s\right\},$$

$$\varphi_{22}(t)=\exp\{-(b+e)t\},$$

$$\varphi_{21}(t)=\exp\{-(b+e)t\}\int_0^t[c+\varepsilon\tilde{r}(s)]\varphi_{11}(s)\exp\{(b+e)s\}\mathrm{d}s.$$

当 $t=t_n$ 时，由方程组(4.2.12)获得

$$\begin{bmatrix}x(t_n^+)\\ y(t_n^+)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -p & 1-p\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(t_n^-)\\ y(t_n^-)\end{bmatrix}.$$

令

$$M=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -p & 1-p\end{bmatrix}\Phi(T)$$
$$=\begin{bmatrix}\varphi_{11}(T) & 0\\ -p\varphi_{11}(T)+(1-p)\varphi_{21}(T) & (1-p)\exp\{-(b+e)T\}\end{bmatrix}.$$

由 Floquet 定理得,无病周期解稳定的充分必要条件是矩阵 M 的特征值的模小于 1,即只须 $\varphi_{11}(T)<1$,也就是

$$\frac{1}{T}\int_0^T \tilde{r}(t)\mathrm{d}t > 1-\frac{b+\varepsilon+c+\theta}{\lambda},$$

或利用 $\tilde{s}(t)=1-\tilde{r}(t)$ 等价地写为

$$\frac{1}{T}\int_0^T \tilde{s}(t)\mathrm{d}t < \frac{b+\varepsilon+c+\theta}{\lambda}. \tag{5.2.18}$$

定义

$$R^*=\frac{\int_0^T \tilde{s}(t)\mathrm{d}t}{T}\times\frac{\lambda}{b+\varepsilon+c+\theta}$$
$$=\frac{\lambda}{b+\varepsilon+c+\theta}\times\frac{[T(b+e)-p][\mathrm{e}^{T(b+e)}-1]+T(b+e)p}{T(b+e)[\mathrm{e}^{T(b+e)}-1+p]},$$

则 R^* 是基本再生数,并由上面的讨论可得下面的定理.

定理 5.2.3[9] 当 $R^*<1$ 时,则系统(5.2.11)和(5.2.12)的无病 T 周期解 $(\tilde{s}(t),0,\tilde{r}(t))$ 是局部渐近稳定的.

下面考虑无病周期解 $(\tilde{s}(t),0,\tilde{r}(t))$ 的全局稳定性.

由系统(5.2.8),(5.2.9)得

$$\begin{cases} s'=b+e-(b+e)s-(e-\theta)i-(\lambda-\varepsilon)si, & t\neq t_n,\\ i'=-(b+\varepsilon+c+\theta)i+\lambda si+\varepsilon i^2, & t_{n+1}=t_n+T,\end{cases} \tag{5.2.19}$$

$$\begin{cases} s(t^+)=(1-p)s(t^-), & t=t_n,\\ i(t^+)=i(t^-), & n=0,1,2,\cdots.\end{cases} \tag{5.2.20}$$

为了讨论方便,做基本假设 $\lambda\geqslant\varepsilon$ 以及 $e\geqslant\theta$. 注意到当 $\theta=0$ 时,就是通常的 SIRS 模型. 在以上假设下有下面的定理.

定理 5.2.4[9] 当 $R^*<1$ 时,则系统(5.2.11)和(5.2.12)的无病 T 周期解 $(\tilde{s}(t),0,\tilde{r}(t))$ 全局渐近稳定.

证明 由定理 5.2.3 知,只需证明,当 $R^*<1$ 时,系统(5.2.19)和(5.2.20)的任一解都趋向于 $(\tilde{s}(t),0)$. 首先,证明当 $R^*<1$ 时,有 $\lim\limits_{t\to+\infty} i(t)=0$.

分别由(5.2.19),(5.2.20)的第一个方程得

$$\begin{cases} s'(t)\leqslant b+e-(b+e)s, & t\neq t_n,\\ s(t^+)=(1-p)s(t^-), & t=t_n.\end{cases} \tag{5.2.21}$$

对方程(5.2.21)应用引理 5.1.1 得

$$s(t) \leqslant r_1(t) + 1 - \frac{p\mathrm{e}^{T(b+e)(1+[t/T])-(b+e)t}}{\mathrm{e}^{T(b+e)} - 1 + p}, \tag{5.2.22}$$

这里

$$r_1(t) = \mathrm{e}^{-(b+e)t}\left\{s(0^+)(1-p)^{[t/T]} - \frac{(1-p)^{[t/T]+1}(\mathrm{e}^{T(b+e)} - 1)}{\mathrm{e}^{T(b+e)} - 1 + p}\right\}.$$

把(5.2.22)代入(5.2.19)的第二个方程可得

$$\begin{aligned} i'(t) \leqslant i\Bigg\{&\lambda - (b + \varepsilon + c + \theta) + \lambda r_1(t) \\ &- \frac{p\lambda \mathrm{e}^{T(b+e)(1+[t/T])-(b+e)t}}{\mathrm{e}^{T(b+e)} - 1 + p} + \varepsilon i\Bigg\}. \end{aligned} \tag{5.2.23}$$

令

$$f(t) = \lambda - (b + \varepsilon + c + \theta) + \lambda r_1(t) - \frac{p\lambda \mathrm{e}^{T(b+e)(1+[t/T])-(b+e)t}}{\mathrm{e}^{T(b+e)} - 1 + p}.$$

由(5.2.23)式及比较原理得

$$i(t) \leqslant \frac{i(0)\exp\left\{\int_0^t f(s)\mathrm{d}s\right\}}{1 - \varepsilon i(0)\int_0^t \exp\left\{\int_0^s f(\sigma)\mathrm{d}\sigma\right\}\mathrm{d}s}. \tag{5.2.24}$$

因为

$$\int_0^t f(s)\mathrm{d}s = [\lambda - (b + \varepsilon + c + \theta)]t - \frac{p\lambda \mathrm{e}^{T(b+e)}}{\mathrm{e}^{T(b+e)} - 1 + p}\int_0^t \mathrm{e}^{(b+e)(T[s/T]-s)}\mathrm{d}s, \tag{5.2.25}$$

且

$$\int_0^t \mathrm{e}^{(b+e)}(T[s/T] - s)\mathrm{d}s = \frac{(1 - \mathrm{e}^{(b+e)T})}{b + e}[s/T] + \frac{1}{b + e}\{1 - \mathrm{e}^{(b+e)(t-T[t/T])}\},$$

所以有

$$\int_0^t \mathrm{e}^{(b+e)(T[s/T]-s)}\mathrm{d}s = \frac{(1 - \mathrm{e}^{(b+e)T})}{b + e}[t/T]$$

和

$$\begin{aligned} \int_0^t f(s)\mathrm{d}s &\leqslant [\lambda - (b + \varepsilon + c + \theta)]t - \frac{(1 - \mathrm{e}^{(b+e)T})}{b + e}[t/T] \\ &= [\lambda - (b + \varepsilon + c + \theta) - \frac{p\lambda(\mathrm{e}^{T(b+e)} - 1)}{T(b + e)(\mathrm{e}^{T(b+e)} - 1 + p)}]t + g(t), \end{aligned} \tag{5.2.26}$$

这里

$$g(t) = \frac{p\lambda(\mathrm{e}^{T(b+e)} - 1)}{T(b + e)(\mathrm{e}^{T(b+e)} - 1 + p)}(t - T[t/T])$$

$$\leqslant \frac{p\lambda(\mathrm{e}^{T(b+e)}-1)}{(b+e)(\mathrm{e}^{T(b+e)}-1+p)}. \tag{5.2.27}$$

由(5.2.26),(5.2.27)及条件 $R^* < 1$ 可得

$$\lim_{t\to+\infty} \exp\left\{\int_0^t f(s)\mathrm{d}s\right\} = 0. \tag{5.2.28}$$

由(5.2.24),(5.2.28)可得:当 $R^* < 1$ 时,有 $i(t)\to 0(t\to+\infty)$.

下面证明:当 $R^* < 1$ 时,方程(5.2.19),(5.2.20)的任一解$(s(t),i(t))$都有 $s(t)\to\tilde{s}(t)(t\to+\infty)$.

事实上,令

$$W(t) = |s(t)-\tilde{s}(t)|,$$

则当 $t\neq t_n$ 时,有

$$\begin{aligned} D^+W(t) &= \mathrm{sign}(s(t)-\tilde{s}(t))(s'(t)-\tilde{s}'(t)) \\ &\leqslant -(b+e)|s-\tilde{s}| + (e-\theta)i + (\lambda-\varepsilon)si \\ &= -(b+e)W(t) + (e-\theta)i + (\lambda-\varepsilon)si. \end{aligned} \tag{5.2.29}$$

由(5.2.24)及条件 $R^* < 1$ 知,存在一个正的常数 M 使得下式成立.

$$i(t)\leqslant M\mathrm{e}^{\mathrm{H}t}, \tag{5.2.30}$$

这里

$$\mathrm{H} = (b+\varepsilon+c+\theta)-\lambda+\frac{p\lambda(\mathrm{e}^{T(b+e)}-1)}{T(b+e)(\mathrm{e}^{T(b+e)}-1+p)}.$$

又因为

$$W(t_n^+) = (1-p)W(t_n^-), \tag{5.2.31}$$

所以,由(5.2.29)、(5.2.30)和(5.2.31)式及引理5.1.1得:$\lim\limits_{t\to+\infty}W(t)=0$,即 $s(t)\to\tilde{s}(t)(t\to+\infty)$. ▌

§5.3 具有预防接种者类的SIS模型

前两节,我们分别考虑了具有脉冲预防接种的SIR和SIRS流行病模型无病周期解的稳定性及预防接种策略.本节主要考虑具有预防接种者类 V 的SIS传染病动力学模型.主要是 Sanyi Tang, Yanni Xiao, Lansun Chen 等人的工作[11].

5.3.1 连续预防接种SIS模型的建立及有关结论

当把总人口分为 S 类和 I 类时,其SIS传染病动力学模型为

$$\begin{cases} S' = \mu-\beta SI-\mu S+cI, \\ I' = \beta SI-(\mu+c)I. \end{cases} \tag{5.3.1}$$

总人口 N 为渐近常数,不妨设为1,即

$$N(t) = S(t) + I(t) = 1.$$

若对易感者 S 类进行连续预防接种,且把总人口 $N(t)$分为三类,即易感者类 S,染病者类 I,接种者类 V,则其传染病动力学方程为

$$\begin{cases} S' = \mu - \beta SI - (\mu + \varphi)S + cI + \theta V, \\ I' = \beta(S + \sigma V)I - (\mu + c)I, \\ V' = \varphi S - \sigma\beta VI - (\mu + \theta)V, \end{cases} \tag{5.3.2}$$

其中 θ 是接种免疫力丧失率系数,φ 是接种率系数或比例($0 \leqslant \varphi \leqslant 1$),$\beta$ 是 S 类疾病发生率系数,$\beta\sigma$ 是接种者 V 类疾病发生率系数($0 \leqslant \sigma \leqslant 1$),当 $\sigma = 0$ 时,意味着预防接种是完全有效的;当 $\sigma = 1$ 时,意味着预防接种是完全无效的,这里 $S + I + V = 1$.因此,方程组(5.3.2)可化为下面的等价系统

$$\begin{cases} I' = \beta[1 - I - (1 - \sigma)V]I - (\mu + c)I, \\ V' = \varphi(1 - I - V) - \sigma\beta VI - (\mu + \theta)V. \end{cases} \tag{5.3.3}$$

方程(5.3.3)有无病平衡点 $I_0 = 0$, $V_0 = \dfrac{\varphi}{\mu + \theta + \varphi}$,模型的基本再生数为

$$R_0(\varphi) = \frac{\beta}{\mu + c} \times \frac{\mu + \theta + \sigma\varphi}{\mu + \theta + \varphi}, \tag{5.3.4}$$

且易证,当 $R_0(0) < 1$ 时,无病平衡点(I_0, V_0)是全局渐近稳定的;当 $R_0 > 1$ 时,存在地方病平衡点(S_c, I_c, V_c),其中 $S_c + \sigma V_c = \dfrac{\mu + c}{\beta}$.

5.3.2　脉冲预防接种 SIS 模型及无病周期解存在性

当预防接种不是连续的,而是以周期 T 进行脉冲接种的,则系统(5.3.2)变为非自治的系统

$$\begin{cases} S'(t) = \mu - \beta SI - \mu S + cI + \theta V, & \\ I'(t) = \beta(S + \sigma V)I - (\mu + c)I, & t \neq nT, \\ V'(t) = -\sigma\beta VI - (\mu + \theta)V, & \\ S(nT^+) = (1 - \varphi)S(nT), & t = nT, \\ I(nT^+) = I(nT), & n = 0,1,2,\cdots, \\ V(nT^+) = V(nT) + \varphi S(nT). & \end{cases} \tag{5.3.5}$$

因为 $S + I + V = 1$,故(5.3.5)化为下面的等价系统

$$\begin{cases} I' = \beta[1 - I - (1 - \sigma)V]I - (\mu + c)I, & t \neq nT, \\ V' = -\sigma\beta VI - (\mu + \theta)V, & \\ I(nT^+) = I(nT), & t = nT, \\ V(nT^+) = \varphi + (1 - \varphi)V(nT) - \varphi I(nT). & \end{cases} \tag{5.3.6}$$

当方程组(5.3.6)存在无病周期解,其染病者数量 $I(t)$ 必恒为零,因此,在一个脉冲区间 $t_0=(n-1)T\leqslant t\leqslant nT$ 内必有

$$\begin{cases} V' = -(\mu+\theta)V, \\ V(nT^+) = \varphi + (1-\varphi)V(nT). \end{cases} \tag{5.3.7}$$

解(5.3.7)得

$$V(t) = V(t_0)e^{-(\mu+\theta)(t-t_0)}, t_0 = (n-1)T < t < nT. \tag{5.3.8}$$

在每一个脉冲点 $t=nT$ 处,有

$$V[(n+1)T] = \varphi + (1-\varphi)V(nT)e^{-(\mu+\theta)T} \triangleq F[V(nT)] \tag{5.3.9}$$

方程组(5.3.9)有惟一不动点

$$V^* = \frac{\varphi e^{(\mu+\theta)T}}{e^{(\mu+\theta)T} + \varphi - 1}. \tag{5.3.10}$$

在假设 $I=0$ 的情形下,有

$$\left|\frac{dF[V(n)]}{dV}\right|_{V(nT)=V^*} = (1-\varphi)e^{-(\mu+\theta)T} < 1, \tag{5.3.11}$$

故不动点 V^* 局部渐近稳定.不动点 V^* 意味着接种者 V 类在 $I(t)=0$ 的情形下,有 T 周期解.

事实上,在(5.3.8)中,取 $V(t_0)=V^*$,则周期解在 $t_0=(n-1)T\leqslant t\leqslant nT$ 内的表达式为

$$\tilde{I}(t) = 0, \tilde{V}(t) = \frac{\varphi e^{(\mu+\theta)T}}{e^{(\mu+\theta)T} + \varphi - 1}e^{-(\mu+\theta)(t-t_0)}, \tag{5.3.12}$$

且对任意 $t\geqslant 0$,都有 $\tilde{I}(t+T)=\tilde{I}(T)=0, \tilde{V}(t+T)=\tilde{V}(t)$.

5.3.3 无病周期解的稳定性

首先,用类似于研究方程(5.1.20)无病周期解局部稳定的方法,可得方程(5.3.6)无病周期解局部稳定的充要条件为

$$\frac{1}{T}\int_0^T [1 - \tilde{V}(s) + \sigma\tilde{V}(s)]ds < \frac{\mu+c}{\beta}, \tag{5.3.13}$$

即

$$\frac{1}{T}\int_0^T [\tilde{S}(t) + \sigma\tilde{V}(t)]dt < \frac{\mu+c}{\beta}, \tag{5.3.14}$$

这里利用 $\tilde{S}(t)=1-\tilde{V}(t)$,方程(5.3.3)的基本再生数为

$$R(T) = \frac{\beta}{(\mu+c)T}\int_0^T [\tilde{S}(t) + \sigma\tilde{V}(t)]dt.$$

从(5.3.14)可知,若 $\tilde{S}(t)+\sigma\tilde{V}(t)$ 在一个脉冲周期内的积分均值小于临界值 $S_c+\sigma V_c$,则无病周期解局部稳定.

把 $\tilde{V}(t)$代入(5.3.13)可得

$$\frac{T(\mu+\theta)\varphi+[T(\mu+\theta)-\varphi(1-\sigma)][\mathrm{e}^{(\mu+\theta)T}-1]}{T(\mu+\theta)[\mathrm{e}^{(\mu+\theta)T}+\varphi-1]}<\frac{\mu+c}{\beta}. \quad (5.3.15)$$

从(5.3.15)可求出使地方病消失的最大脉冲接种周期 $T_{\max}$,由(5.3.15)也可求得基本再生数

$$R(T)=\frac{\beta}{\mu+c}\times\frac{T(\mu+\theta)\varphi+[T(\mu+\theta)-\varphi(1-\sigma)][\mathrm{e}^{(\mu+\theta)T}-1]}{T(\mu+\theta)[\mathrm{e}^{(\mu+\theta)T}+\varphi-1]}<1.$$

构造函数 $W(t)=|V(t)-\tilde{V}(t)|$,并计算其上右导数得

$$\begin{cases}D^{+}W(t)=\operatorname{sign}[V(t)-\tilde{V}(t)][V'(t)-\tilde{V}'(t)]\\ \qquad\leqslant-(\mu+\theta)|V(t)-\tilde{V}(t)|+\sigma\beta I(t),\\ W(nT^{+})=|V(nT^{+})-\tilde{V}(nT^{+})|\\ \qquad\leqslant(1-\varphi)|V(nT)-\tilde{V}(nT)|+\varphi\sigma I(nT).\end{cases}$$

对上述脉冲微分不等式利用引理 5.1.1 可得:当 $R(T)\leqslant\frac{\beta}{\mu+c}<1$ 时,$W(t)\to0$ $(t\to\infty)$.从而可得如下结论

定理 5.3.1[11]　$R(T)\leqslant\frac{\beta}{\mu+c}<1$ 时,无病周期解$(0,\tilde{V}(t))$全局渐近稳定.

从上面的分析可知,当 $R(T)<1$ 时,无病周期解$(0,\tilde{V}(t))$是全局渐近稳定的;当 $R(T)>1$ 时,无病周期解不稳定;当 $R(T)=1$ 时,是一个临界值,它可能出现分支现象,详见文献[11].

§5.4　具有脉冲预防接种的 SEIR 传染病模型

对具有脉冲接种的 SEIR 传染病模型稳定性的研究是本节的主要研究内容.考虑的模型是双线性疾病发生率,且接触率分别是常数接触率和时变接触率.当接触率是时变接触率时,把它考虑成周期函数,预防接种是周期脉冲的,周期为 T.总人口也分常数总人口和非常数总人口两种情形,主要参考文献[10].

5.4.1　总人口是常数的 SEIR 脉冲接种传染病模型

当 SEIR 传染病模型包含脉冲接种时,能写成下面的形式

$$\begin{cases}S'(t)=m(1-S)-\beta(t)SI,\\ S(nT^{+})=(1-p)S(nT^{-}),\qquad n\in N_{+},\\ E'(t)=\beta(t)SI-(a+m)E,\\ I'(t)=aE-(g+m)E,\\ R(t)=1-S(t)-E(t)-I(t),\end{cases}\quad(5.4.1)$$

这里单位时间是 1 年,总人口 $N(t)$ 是常数,且认为是 1,则 $S(t),E(t),I(t),R(t)$ 分别为易感者,潜伏者,染病者和移出者的比例,p 为在时刻 $t=nT$,$n\in N_+$ 对易感者进行脉冲接种的比例($0\leqslant p\leqslant 1$),m 是自然死亡率,$1/a$ 是病毒潜伏时间,$1/g$ 是病程,$\beta(t)$ 是常数或周期函数,$\beta(t+1)=\beta(t)$,T 是两次脉冲接种之间的时间. 当 $\beta(t)$ 是常数时,取 $T\in R_+$;当 $\beta(t)$ 是周期函数时,取 $T\in N$. 因为 $R=1-S-E-I$,故我们仅考虑关于 S,E,I 的模型. 方程(4.4.1)的可行区域为

$$D=\{(S,E,I)\in R^3\mid 0\leqslant S,E,I\leqslant 1,\text{且}\,0\leqslant S+E+I\leqslant 1\}.$$

类似于前面几节模型的讨论,我们可得到无病周期解一定存在且为 $(S^*(t),0,0)$. 这里

$$S^*(t,m,T,p)=1-\frac{p\exp[m(T-\mathrm{mod}(t,T))]}{\exp(mT)-(1-p)}. \tag{5.4.2}$$

当 $p=0$ 时,系统(5.4.1)成为一般 SEIR 模型,相应 $(S^*(t,m,T,p))=(1,0,0)$,即无病平衡点. 因此,我们对模型(5.4.1)的讨论包含了一般的 SEIR 模型.

周期解的局部渐近稳定性

系统(5.4.1)在周期解 $(S^*,0,0)$ 的线性化系统为

$$\begin{cases} s'(t)=-ms-\beta(t)S^*(t,m,T,p)i,\\ s(nT^+)=(1-p)s(nT^-),\\ e'(t)=\beta(t)S^*(t,m,T,p)i-(a+m)e,\\ i'(t)=ae-(g+m)i. \end{cases} \tag{5.4.3}$$

系统(5.4.3)有零平衡点. 注意到(5.4.3)的后两个方程与 $s(t)$ 无关,且是一个含 T 周期系数的常微分线性方程组

$$\begin{cases} e'(t)=\beta(t)S^*(t,m,T,p)i-(a+m)e,\\ i'(t)=ae-(g+m)i. \end{cases} \tag{5.4.4}$$

它的 Floquet 矩阵的特征值 λ_1 和 λ_2 依赖于参数 p,m,T,a,g 及

$$\beta(t)=C_0+\sum_{k=1}^{\infty}C_k\cos(k\omega t+\varphi_k)$$

的傅里叶系数. 由 Floquet 矩阵知,系统(5.4.4)稳定的条件为

$$\max(|\lambda_1(m,T,p,a,g,C_0,C_1,\varphi_1,\cdots)|,\ |\lambda_2(m,T,p,a,g,C_0,C_1,\varphi_1,\cdots)|)<1. \tag{5.4.5}$$

显然,当参数满足(5.4.5)式时,有 $(e(t),i(t))\to(0,0)$,从而可得 $q(t)=\beta(t)S^*(t)i(t)\to 0$,故当 $t\in(nT,(n+1)T)$ 时,方程(5.4.3)的解 $s(t)$ 满足

$$s(t)=s(nT^+)\exp[-m(t-nT)]-\int_{nT^+}^{t}q(t)\exp(m(\tau-t))\mathrm{d}\tau. \tag{5.4.6}$$

当 $t=(n+1)T^+$ 时,有

$$s((n+1)T^+) = (1-p)\exp(-mT) \cdot \left[s(nT^+) - \int_{nT^+}^{(n+1)T^-} q(\tau)\exp(m(\tau - nT))\mathrm{d}\tau\right]. \quad (5.4.7)$$

注意到方程(5.4.7)仅有零平衡点,且因为 $(1-p)\exp(-mT)<1$,故平衡点是稳定的,且 $\lim\limits_{n\to+\infty} s(nT^+)=0$.

具体计算(5.4.5)可得(5.4.3)稳定的条件为

$$\frac{1}{T}\int_0^T \beta(\tau)S^*(\tau)\mathrm{d}\tau < \frac{(m+a)(m+g)}{a}. \quad (5.4.8)$$

当 $\beta(t)$ 是常数时,定义

$$R_0 = \frac{a\beta}{(m+a)(m+g)},$$

则 R_0 是通常的 SEIR 传染病模型的基本再生数,因此(5.4.8)式可写成

$$\frac{R_0}{T}\int_0^T S^*(\tau)\mathrm{d}\tau < 1. \quad (5.4.9)$$

当 $\beta(t) = C_0 + \sum\limits_{k=1}^{\infty}[C_k\cos(2k\pi t) + S_k\sin(2k\pi t)]$ 时,(5.4.8)可写成

$$\frac{1}{T}\int_0^T \beta(\tau)S^*(\tau)\mathrm{d}\tau = \frac{1}{mT}\frac{[\exp(mT)-1](mT-p)+pmT}{[\exp(mT)-(1-p)]}C_0 - \frac{p}{T}\frac{[\exp(mT)-1]}{[\exp(mT)-(1-p)]}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{mC_k+2\pi kS_k}{m^2+4\pi^2k^2}. \quad (5.4.10)$$

关于(5.4.1)无病周期解的全局稳定性分析将在后面进行.

5.4.2　总人口变化时 SEIR 脉冲接种传染病模型

前面一段考虑总人口不变的 SEIR 脉冲接种传染病模型,事实上,由于因病死亡等因素存在,总人口往往在发生变化.这一段,将考虑总人口在变化,且疾病的发生率是标准的 SEIR 脉冲接种传染病模型.

用 $\hat{S},\hat{E},\hat{I},\hat{R}$ 分别代表 t 时刻易感者、潜伏者、染病者和移出者的数量,$N(t)$ 是总人口.当考虑有因病死亡时,总人口一般满足方程

$$N'(t) = [b - m_1(N)]N - \alpha\hat{I}, \quad (5.4.11)$$

这里 b 是出生率,$m_1(N)$ 是死亡率.当 $m_1(N)=m$ 常数,$\alpha=0$ 时,$b>m$ 种群指数出生,$b=m$ 种群为常数,$b<m$ 种群指数递减.$m_1(N)$ 不是常数时,设 $m_1(N)=m(N)$ 是非减函数且有 Logistic 增长的平衡点 N^*,$m(N)\geqslant m(0)$.

相应的 SEIR 脉冲接种流行病模型为

$$\begin{cases}\hat{S}'(t) = bN - m_1\hat{S} - \dfrac{\beta(t)}{N}\hat{S}\hat{I},\\ \hat{S}(nT^+) = (1-p)\hat{S}(nT), \qquad n \in N_+,\\ \hat{E}'(t) = \dfrac{\beta(t)}{N}\hat{S}\hat{I} - (a+m_1)\hat{E},\\ \hat{I}'(t) = a\hat{E} - (g+m_1+\alpha)\hat{I},\\ \hat{R}(t) = N(t) - \hat{S}(t) - \hat{E}(t) - \hat{I}(t).\end{cases} \tag{5.4.12}$$

取变换$(\hat{S},\hat{E},\hat{I},\hat{R}) = N(S,E,I,R)$,则(5.4.11)及(5.4.12)相应变为

$$N' = [b - \alpha I - m(N)]N$$

及

$$\begin{cases}S'(t) = b(1-S) - [\beta(t)-\alpha]SI,\\ S(nT^+) = (1-p)S(nT^-), \qquad n \in N_+,\\ E'(t) = \beta(t)SI + \alpha EI - (a+b)E,\\ I'(t) = aE + \alpha I^2 - (g+b+\alpha)I.\end{cases} \tag{5.4.13}$$

(5.4.13)的可行域仍为 D,且存在无病周期解$(S^*(t;b,T,p),0,0)$(也称相对疾病剔除解).令 $E(t)=e(t)$,$I(t)=i(t)$,则(5.4.13)关于无病周期解的线性化系统为

$$\begin{cases}e'(t) = \beta(t)S^*(t,b,T,p)i - (a+b)e,\\ i'(t) = ae - (g+b+\alpha)i.\end{cases} \tag{5.4.14}$$

类似于(5.4.3)局部稳定性的讨论可得无病周期解$(S^*(t;b,T,p),0,0)$局部渐近稳定的条件为

$$\frac{a}{(b+a)(b+g+\alpha)}\int_0^T \beta(\tau)S^*(\tau,b,T,p)\mathrm{d}\tau < 1. \tag{5.4.15}$$

若方程(5.4.12)仅做变换 $S(t) = \dfrac{\hat{S}(t)}{N(t)}$,则(5.4.12)变为下面的方程

$$\begin{cases}S'(t) = b(1-S) - [\beta(t)-\alpha]S\dfrac{\hat{I}}{N},\\ S(nT^+) = (1-p)S(nT^-),\\ \hat{E}'(t) = \beta(t)S\hat{I} - (a+m_1)\hat{E},\\ \hat{I}'(t) = a\hat{E} - (m_1+g+\alpha)\hat{I},\\ N'(t) = [b - m_1(N)]N - \alpha\hat{I}.\end{cases} \tag{5.4.16}$$

系统(5.4.16)称为“媒介”系统,它的可行区域为

$$D_1 = \{(S,\hat{E},\hat{I},\hat{N}) \mid S \in [0,1], N > 0, \hat{E} \geqslant 0, \hat{I} \geqslant 0, \hat{E} + \hat{I} \leqslant N(1-S)\}.$$

相应的无病周期解为$(S,\hat{E},\hat{I}) = (S^*(t;b,T,p),0,0)$,也称为**疾病总剔除解**.

无病周期解的全局渐近稳定性

现在我们考虑无病周期解及总剔除周期解的全局稳定性.

定理 5.4.1[10] 当 $\beta(t) \geqslant \alpha \geqslant 0$ 时,方程(5.4.13)的无病周期解在区域 D 内全局渐近稳定的充分条件为

$$\max\{|\Phi_1|, |\Phi_2|\} < 1, \tag{5.4.17}$$

这里 Φ_1 与 Φ_2 是下面 T 周期线性系统的 Floquet 矩阵的特征值

$$\begin{cases} y_1'(t) = [\beta(t)S^*(t;b,T,p) + \alpha]y_2 - (b+a)y_1, \\ y_2'(t) = ay_1 - (b+g)y_2. \end{cases} \tag{5.4.18}$$

证明 考虑方程(5.4.13)的第一和第二个方程

$$\begin{cases} S'(t) = b(1-S) - [\beta(t) - \alpha]SI, \\ S(nT^+) = (1-p)S(nT^-), S(0) = S_0. \end{cases} \tag{5.4.19}$$

因为 $I(t), S(t)$是非负的,且 $\beta(t) \geqslant \alpha$,故有

$$b(1-S) - [\beta(t) - \alpha]SI \leqslant b(1-S). \tag{5.4.20}$$

求解下面的脉冲方程

$$\begin{cases} X'(t) = b(1-X), \\ X(nT^+) = (1-p)X(nT^-), \quad X(0) = S_0, \end{cases} \tag{5.4.21}$$

并利用脉冲微分不等式可得

$$S(t) \leqslant X(t), X(t) \to S^*(t), \text{当 } t \to \infty \text{ 时}. \tag{5.4.22}$$

即对 $\forall \varepsilon_1 > 0$,存在 $t_1 > 0$,使得当 $t \geqslant t_1$ 时有

$$S^*(t) - \varepsilon_1 \leqslant X(t) \leqslant S^*(t) + \varepsilon_1 \Rightarrow S(t) \leqslant S^*(t) + \varepsilon_1.$$

现在考虑(5.4.13)的子系统

$$\begin{cases} E'(t) = [\beta(t)S(t) + \alpha E]I - (a+b)E, \\ I'(t) = aE + \alpha I^2 - (g+b+\alpha)I. \end{cases} \tag{5.4.23}$$

系统(5.4.23)有零平衡点(0,0),因为$\dfrac{\partial E'}{\partial I} = \beta(t)S(t) > 0, \dfrac{\partial I'}{\partial E} = a > 0$.故(5.4.23)是合作系统,且有

$$\begin{cases} E'(t) = [\beta(t)S(t) + \alpha E]I - (a+b)E \\ \qquad \leqslant [\beta(t)X(t) + \alpha]I - (a+b)E, \\ I'(t) = aE + \alpha I^2 - (g+b+\alpha)I \\ \qquad \leqslant aE - (g+b)I. \end{cases} \tag{5.4.24}$$

现在考虑微分系统

$$\begin{cases} F'(t) = [\beta(t)X(t) + \alpha]L - (a + b)F, \\ L'(t) = aF - (g + b)L, \\ F(0) = E(0), \\ L(0) = I(0). \end{cases} \tag{5.4.25}$$

使用 Kamke 定理可得

$$E \leqslant F, I \leqslant L. \tag{5.4.26}$$

因为 $X(t) \to S^*(t)$,故方程(5.4.25)的极限方程具有(5.4.18)的形式,故当条件(5.4.17)式成立时,有 $F, L \to 0^+$,从而由(5.4.26)也可得 $E, I \to 0^+$. 又因当 $I(t) \to 0^+$ 时,系统(5.4.13)关于 $S(t)$ 的方程渐近自治系统成为

$$S' = b(1 - S), S(nT^+) = (1 - p)S(nT^-),$$

因而

$$S(t) \to S^*(t; b, T, p). \tag{5.4.27}$$

综合以上分析,可知$(S(t), E(t), I(t)) \to (S^*(t; b, T, p), 0, 0)$. ▌

推论 5.4.1 对于 $\alpha = 0$ 及 Logistic 种群增长,因为 $N \to N^* < \infty$,故定理 4.4.1对总剔除解也是成立的.

当种群指数增加时,我们注意到相对疾病剔除解和总疾病剔除解是不同的,因为当 $N \to +\infty, I \to 0$ 时,$\hat{I} = I(t)N(t)$ 是不确定的. 下面的定理是关于疾病总剔除解的全局稳定性.

定理 5.4.2[10] 设 $\beta(t) \geqslant \alpha$ 且当下列条件之一成立时

1) 种群动力学是指数增长且 $\alpha \geqslant 0$,

2) 种群动力学满足 Logistic 且 $\alpha > 0$,

则疾病总剔除解在 D_1 内全局渐近稳定的充分条件是

$$\max\{|\omega_1|, |\omega_2|\} < 1, \tag{5.4.28}$$

这里 ω_1 和 ω_2 是下面系统的 Floquet 矩阵的特征值

$$\begin{cases} y_1'(t) = \beta(t)S^*(t; b, T, p)y_2 - (m_0 + a)y_1, \\ y_2'(t) = ay_1 - (m_0 + g + \alpha)y_2, \end{cases} \tag{5.4.29}$$

其中当种群动力是 Logistic 时,$m_0 = m(0)$;当种群是指数增长时,$m_0 = m$.

证明 证明方法与定理 5.4.1 是类似的,因为 $m(N) \geqslant m(0)$,故有

$$\begin{cases} \hat{E}'(t) = \beta(t)S(t)\hat{I} - [m(N) + a]\hat{E} \leqslant \beta(t)X(t)\hat{I} - [m(0) + a]\hat{E}, \\ \hat{I}'(t) = a\hat{E} - [m(N) + g + \alpha]\hat{I} \leqslant a\hat{E} - [m(0) + g + \alpha]\hat{I}. \end{cases}$$

因此,(5.4.28)隐含$(\hat{E}, \hat{I}) \to (0,0)$,故方程 $N'(t) = [b - m(N)]N - \alpha\hat{I}$ 的渐近自治方程为$N' = [b - m(N)]N$. 由此得 $N \to +\infty$或 $N \to N^* > 0$.

这将导致$(\beta(t) - \alpha)S(t)\dfrac{\hat{I}}{N} \to 0$. 故由(5.4.16)的第一个方程可得 $S'(t) \to$

$b(1-S)$,因而 $S(t)\to S^*$.　▌

§5.5　出生具有脉冲的传染病动力学模型

研究动物种群的传染病模型,往往要考虑种群的动力学因素.对一些动物,特别是野生动物,其动力学因素中的出生是随季节性的变化而不同的,或者说其出生是集中在某个季节进行的,这样研究其种群动力学因素的传染病模型往往需要把其出生认为是脉冲出生,所建立的传染病模型就是具有脉冲出生的传染病模型.这方面主要文献为[6].

设 $N(t)$是种群的数量,$S(t)$和 $I(t)$分别是易感者和染病者的数量,$N=S+I$,$B(N)$和 $D(N)$分别为种群的出生率和死亡率系数,且设 $B'(N)\leqslant 0$, $D'(N)\geqslant 0$.设染病者动物种群有因病死亡率,其系数为 α.则种群动力学方程为

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=[B(N)-D(N)]N-\alpha I. \tag{5.5.1}$$

进一步设,$B(0)>D(0)$,且当疾病不存在时,种群环境容纳量为 K,即$B(K)=D(K)$.为保证 K 的存在惟一,需设$\lim\limits_{N\to\infty}[B(N)-D(N)]<0,B'(K)\neq D'(K)$.

考虑有垂直传染且有一般接触率的 SI 传染病模型

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=[B(N)-D(N)]S+(1-p)B(N)I-\beta\dfrac{C(N)}{N}SI,\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=pB(N)I+\beta\dfrac{C(N)}{N}SI-[\alpha+D(N)]I,\end{cases} \tag{5.5.2}$$

这里 p 是染病者母亲出生后代被传染的比例$0\leqslant p<1$,且设 $C'(N)\geqslant 0$.因 $N=S+I$,故我们只考虑(5.5.1)及(5.5.2)的第一个方程,并作变换 $Z=\dfrac{I}{N}$得

$$\begin{cases}\mathrm{d}N/\mathrm{d}t=[B(N)-D(N)-\alpha Z]N,\\ \mathrm{d}Z/\mathrm{d}t=-(1-p)B(N)Z+[\beta C(N)-\alpha](1-Z)Z.\end{cases} \tag{5.5.3}$$

关于模型(5.5.3)文献[16,17,18]已做详细讨论,有关结论归纳如下.

定义

$$R_0=\frac{pB(K)+\beta C(K)}{\alpha+D(K)}, \tag{5.5.4}$$

$$R_1=\frac{pB(0)+\beta C(0)}{\alpha+B(0)}, \tag{5.5.5}$$

$$R_2=\frac{pB(0)+\beta C(0)}{\alpha+B(0)+\dfrac{(\beta C(0)-\alpha)(B(0)-D(0))}{\alpha}}. \tag{5.5.6}$$

R_0 是基本再生数.系统(5.5.3)有四个平衡点,其性态如下:

1) $N=Z=0$ 是平凡平衡点,且总是不稳定;

2) $N=K, Z=0$ 是无病平衡点,且当 $R_0<1$ 时,它全局稳定;

3) $N=0, Z=Z_0=1-\frac{(1-p)B(0)}{\beta C(0)-\alpha}$ 是种群绝灭平衡点;当 $R_1>1$ 时,该平衡点存在,且当 $R_2>1$ 时,该平衡态全局稳定;

4) $N=N^+, Z=Z^+, 0<N^+<k, 0<Z^+<1$ 是地方病平衡点,该平衡点当 $R_0>1, R_1<1$ 或 $R_0>1, R_2<1$ 时,是存在惟一且稳定的.

5.5.1 具有脉冲出生的SI模型

对系统(5.5.3),我们假设出生率 $B(N)N$ 不是连续而是脉冲的,即在一些固定的整数时间点种群的增加量为 $B(N)N$,在其它时间点为零.且假设 $B'(N)\leqslant 0$ 及

(H_1) $\ln(1+B(0))>D(0)$,

(H_2) $\lim\limits_{N\to\infty}\ln(1+B(N))<\lim\limits_{N\to\infty}D(N)$.

假设(H_1)是为了保证种群在缺乏疾病时仍能持续生存.相应系统(5.5.3)变为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=-[D(N)+\alpha Z]N, \quad t\neq m, m=0,1,2,\cdots,\\ \dfrac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}t}=[\beta C(N)-\alpha](1-Z)Z,\\ N(m^+)=[1+B(N(m))]N(m),\\ Z(m^+)=\dfrac{1+\rho B(N(m))}{1+B(N(m))}Z(m).\end{cases} \tag{5.5.7}$$

上述方程组中第四个方程是由 $I(m^+)=I(m)[1+\rho B(N(m))]$ 得到的,ρ 是新生儿被传染的比例.

周期解的存在性

周期解的存在性等价于方程(5.5.7)的第一和第二个方程在区间(0,1)上满足边界条件

$$\begin{cases}N(0)=[1+B(N(1))]N(1),\\ Z(0)=\dfrac{1+\rho B(N(1))}{1+B(N(1))}Z(1)\end{cases} \tag{5.5.8}$$

的解的存在性.

若$(N(t),Z(t))$是方程(5.5.7)的第一和第二个方程在区间(0,1)上满足边界条件(5.5.8)的解,则方程(5.5.7)有周期解$(N_p(t),Z_p(t))=(N(t),Z(t))$,$t\in(0,1)$,且$(N_p(t+1),Z_p(t+1))=(N_p(t),Z_p(t))$,对一切非整的 t 成立.

当疾病不存在时,脉冲方程有一个周期的时变的环境容纳量.令 $Z(t)=0$,则方程(5.5.7)的第一个方程和(5.5.8)的第一个方程有解 $N(t)=K(t), t\in(0,1)$,这里 $K(t)$满足

$$\int_{K(1)}^{K(t)} \frac{\mathrm{d}N}{ND(N)} = 1 - t, \tag{5.5.9}$$

$$\int_{K(1)}^{K(t)(1+B(K(1)))} \frac{\mathrm{d}N}{ND(N)} = 1. \tag{5.5.10}$$

定义 $K_1 = K(1)$,方程(5.5.9)确定了一个函数 $K(t)$;方程(5.5.10)确定了 K_1 的值,因为(5.5.10)的左端是 K_1 的单调递减函数,故 K_1 被(5.5.10)惟一确定.

与方程组(5.5.3)的三个阈值 R_0, R_1, R_2 相类似,我们可定义(5.5.7)的三个阈值量

$$R_0^* = \frac{\ln(1+\rho B(K_1)) + \beta\int_0^1 C(K(t))\mathrm{d}t}{\alpha + \ln(1+B(K_1))}, \tag{5.5.11}$$

$$R_1^* = \frac{\ln(1+\rho B(0)) + \beta C(0)}{\alpha + \ln(1+B(0))}, \tag{5.5.12}$$

$$R_2^* = \frac{\ln(1+\rho B(0)) + \beta C(0)}{\alpha + \ln(1+B(0)) + \dfrac{\beta C(0)-\alpha}{\alpha}[\ln(1+B(0)) - D(0)]}. \tag{5.5.13}$$

方程组(5.5.7)的第一和第二个方程组成的系统满足边界边条件(5.5.8),且至少有三个可能的解:

1) 平凡解 $N=Z=0$,该解总存在且对任何参数都是不稳定的;

2) 无病解 $Z=0, N=K(t)$,该解对任何参数都存在且可证当 $R_0^*>1$ 时不稳定;

3) 种群绝灭解 $N=0, Z=Z_0(t)$,这里

$$Z_0(t) = \frac{1}{1 + \dfrac{1-Z_0(1)}{Z_0(1)}\exp[(\beta C(0)-\alpha)(1-t)]}, \tag{5.5.14}$$

$$Z_0(1) = \frac{\exp[\beta C(0)-\alpha] - \dfrac{1+B(0)}{1+\rho B(0)}}{\exp[\beta C(0)-\alpha] - 1}. \tag{5.5.15}$$

绝灭解存在需 $R_1^*>1$.事实上,$R_1^*>1$ 隐含 $\exp[\beta C(0)-\alpha] > \dfrac{1+B(0)}{1+\rho B(0)} > 1$.从而 $0<Z_0(1)<1$,因此解存在.我们还可证明当 $R_2^*>1$ 时该解是稳定的.

解的局部稳定性

下面研究方程(5.5.7)周期 1 解的局部稳定性.设$(N_p(t), Z_p(t))$是(5.5.7)的周期 1 解.令$(N(t), Z(t)) = (N_p(t)+n(t), Z_p(t)+z(t))$,则

$$\begin{bmatrix} n(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \boldsymbol{\Phi}(t)\begin{bmatrix} n(0) \\ z(0) \end{bmatrix},$$

这里 $\boldsymbol{\Phi}$ 满足方程

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix} -[D(N_p) + \alpha Z_p + N_p D'(N_p)] & -\alpha N_p \\ \beta C'(N_p)(1 - Z_p)Z_p & [\beta C(N_p) - \alpha](1 - 2Z_p) \end{bmatrix}\boldsymbol{\Phi},$$

$\boldsymbol{\Phi}(0) = E$(单位矩阵).由(5.5.7)的后两个方程可知

$$\begin{bmatrix} n(m^+) \\ z(m^+) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + B(N_p(m)) + N_p(m)B'(N_p(m)) & 0 \\ \dfrac{\rho - 1}{[1 + B(N_p(m))]^2}B'(N_p(m))Z_p(m) & \dfrac{1 + \rho B(N_p(m))}{1 + B(N_p(m))} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} n(m) \\ z(m) \end{bmatrix}.$$

由定理2.5.1知,若

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 1 + B(N_p(1)) + N_p(1)B'(N_p(1)) & 0 \\ \dfrac{\rho - 1}{[1 + B(N(_p(1))]^2}B'(N_p(1))Z_p(1) & \dfrac{1 + \rho B(N_p(1))}{1 + B(N_p(1))} \end{bmatrix}\boldsymbol{\Phi}(1)$$

的两个特征值的绝对值都小于1,则周期1解局部渐近稳定.

平凡解的稳定性

对于平凡解 $N = Z = 0$,相应矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(t)$满足

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix} -D(0) & 0 \\ 0 & \beta C(0) \end{bmatrix}\boldsymbol{\Phi}, \quad \boldsymbol{\Phi}(0) = E.$$

从而可求得

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} (1 + B(0))\exp(-D(0)) & 0 \\ 0 & \dfrac{1 + \rho B(0)}{1 + B(0)}\exp[\beta C(0) - \alpha] \end{bmatrix}.$$

$\boldsymbol{M}$ 的特征值是对角线元素.由假设(H_1)可知,$(1 + B(0))\exp(-D(0)) > 1$.故(0,0)不稳定.

无病周期解的稳定性

为了研究无病周期解的稳定性,我们进一步做下面的假设

$$(\mathrm{H}_3)\ \frac{1 + B(K_1) + K_1 B'(K_1)}{1 + B(K_1)}\exp\left[-\int_0^1 K(t)D'(K(t))\mathrm{d}t\right] > -1.$$

注意到,$B'(K_1) < 0$,$D'(K) > 0$,因此假设(H_3)的不等式左端是小于1的.对无病周期解 $N = K(t) \neq 0$,$Z = 0$,其小扰动系统的基解矩阵满足方程

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix} -\Delta(t) & -\alpha K(t) \\ 0 & \beta C(K(t)) - \alpha \end{bmatrix}\boldsymbol{\Phi}, \quad \boldsymbol{\Phi}(0) = E,$$

这里

$$\Delta(t) = \left.\frac{\mathrm{d}(ND(N))}{\mathrm{d}N}\right|_{N=K},$$

故有

$$\boldsymbol{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} \exp\left(-\int_0^t \Delta(\tau)\mathrm{d}\tau\right) & -\alpha\exp\left(-\int_0^t \Delta(\tau)d\tau\right)\int_0^t K(\tau)\exp(-\alpha\tau) \\ & \int_0^\tau (\beta C(K(\xi)) + \Delta(\xi))\mathrm{d}\xi)\mathrm{d}\tau \\ 0 & \exp\left(-\alpha t + \beta\int_0^t C(K(\tau))\mathrm{d}\tau\right) \end{bmatrix}.$$

该解的稳定性由下面矩阵的特征值决定

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 1 + B(K_1) + K_1 B'(K_1) & 0 \\ 0 & \dfrac{1+\rho B(K_1)}{1+B(K_1)} \end{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}(1).$$

$\boldsymbol{M}$ 的特征值为

$$\lambda_1 = (1 + B(K_1) + K_1 B'(K_1))\exp\left(-\int_0^1 \Delta(t)\mathrm{d}t\right),$$

$$\lambda_2 = \frac{1+\rho B(K_1)}{1+B(K_1)}\exp\left(-\alpha + \beta\int_0^1 C(K(t))\mathrm{d}t\right).$$

当 $Z=0$ 时，由方程组(5.5.7)的第一个方程和(5.5.8)的第一个方程可得

$$-\int_0^1 D(K(t))\mathrm{d}t = \ln(1 + B(K_1)),$$

从而得

$$\lambda_1 = \frac{1 + B(K_1) + K_1 B'(K_1)}{1 + B(K_1)}\exp\left\{-\int_0^1 K(t)D'(K(t))\mathrm{d}t\right\},$$

故由假设(H_3)可得：$|\lambda_1|<1$；当 $R_0^*<1$ 时，可得 $|\lambda_2|<1$；当 $R_0^*>1$ 时，有 $\lambda_2>1$，从而可得下面的定理.

定理 5.5.1[6]　若(H_3)成立，则当 $R_0^*<1$ 时，无病周期 1 解$(K(t),0)$是渐近稳定；当 $R_0^*>1$ 时，该解不稳定.

种群绝灭解的稳定性

当 $R_1^*>1$ 时，种群绝灭解 $N=0, Z=Z_0(t)\neq 0$ 存在. 关于$(0,Z_0(t))$小扰动解的基解矩阵满足

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix} -(D(0)+\alpha Z_0(t)) & 0 \\ \beta C'(0)(1-Z_0(t))Z_0(t) & [\beta C(0)-\alpha][1-2Z_0(t)] \end{bmatrix}\boldsymbol{\Phi},$$

$$\boldsymbol{\Phi}(0) = E.$$

相应的 $\boldsymbol{M}$ 矩阵的特征值为

$$\lambda_1 = (1 + B(0))\exp\left[-D(0) - \alpha\int_0^1 Z_0(t)\mathrm{d}t\right],$$

$$\lambda_2 = \frac{1+\rho B(0)}{1+B(0)}\exp\left[(\beta C(0)-\alpha)\left(1-2\int_0^1 Z_0(t)\mathrm{d}t\right)\right].$$

令 $N=0, Z=Z_0$. 对(5.5.7)第二个方程在(0,1)上积分得

$$\ln\left(\frac{1+B(0)}{1+\rho B(0)}\right) = (\beta C(0)-\alpha)\left(1-\int_0^1 Z_0(t)\mathrm{d}t\right).$$

因此, λ_1 和 λ_2 变为

$$\lambda_1 = (1+B(0))\left(\frac{1+B(0)}{1+\rho B(0)}\right)^{\frac{\alpha}{\beta C(0)-\alpha}}\exp[-(D(0)+\alpha)],$$

$$\lambda_2 = \frac{1+B(0)}{1+\rho B(0)}\exp[-(\beta C(0)-\alpha)].$$

由(5.5.12)知, $R_1^*>1$ 隐含 $\ln\lambda_2<0$. 故有 $0<\lambda_2<1$. 由(5.5.13)可得

$$\lambda_1 = \exp\left[-\frac{\alpha(\ln(1+\rho B(0))+\beta C(0))}{\beta C(0)-\alpha}\left(1-\frac{1}{R_2^*}\right)\right].$$

从而可得:若 $R_2^*>1$, 则 $\lambda_1<1$; 若 $R_2^*<1$, 则 $\lambda_1>1$. 即有下面定理.

定理 5.5.2[6] 当 $R_1^*>1$ 时, 存在绝灭周期解$(0, Z_0(t))$, 且当 $R_2^*>1$ 时, 该解稳定; 当 $R_2^*<1$ 时, 该解不稳定.

5.5.2 对种群疾病的控制方法

对野生动物种群,我们可以采取两种不同的控制疾病传播的方法. 方法之一是对弱者进行剔除,降低动物种群的密度以便减少疾病的传播;方法之二是对动物的易感者类进行预防接种. 不管采取哪种方法,都需要从系统的无病周期解稳定出发来控制疾病.

剔除方法

设对动物种群以常数率 c 进行剔除, 则无病周期 1 解$(K_c(t), 0)$为满足边界条件的方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}K_c}{\mathrm{d}t} = -[D(K_c)+c]K_c, t\in(0,1),\\ K_c(0) = [1+B(K_c(1))]K_c(1)\end{cases} \tag{5.5.16}$$

的解 $K_c(t)$.

若

$$R_c^* = \frac{\ln[1+\rho B(K_c(1))]+\beta\int_0^1 C(K_c(t))\mathrm{d}t}{\alpha+\ln[1+B(K_c(1))]} < 1,$$

则$(K_c(t), 0)$是局部稳定的, 剔除的阈值 c 可通过令 $R_c^*=1$ 求得.

预防接种方法

对动物种群易感者进行预防接种以便对疾病进行控制. 设种群的出生是脉

冲的,预防接种是连续的. q 是对易感者进行接种率系数, V 是被接种的动物所占的比例,则周期 1 解满足下面的方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=-[D(N)+\alpha Z]N,\\ \dfrac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}t}=[\beta C(N)-\alpha](1-Z)Z-\beta C(N)VZ,\\ \dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=q(1-V-Z)+\alpha VZ\end{cases}$$

及边界条件

$$\begin{cases}N(0)=[1+B(N(1))]N(1),\\ Z(0)=\dfrac{1+\rho B(N(1))}{1+B(N(1))}Z(1),\\ V(0)=\dfrac{V(1)}{1+B(N(1))}.\end{cases}$$

无病周期 1 解为 $N=K(t),Z=0,V=V_0(t)$,其中, $K(t)$ 是满足(5.5.9)和(5.5.10)的解, $V_0(t)$ 为

$$V_0(t)=1-\frac{B(K_1)\exp(-qt)}{1-\exp(-q)+B(K_1)}.\tag{5.5.17}$$

关于无病周期 1 解的小扰动系统的基解矩阵满足方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}}{\mathrm{d}t}=\begin{bmatrix}-\Delta(t) & -\alpha K(t) & 0\\ 0 & (1-V_0(t))\beta C(K(t))-\alpha & 0\\ 0 & -q+\alpha V_0(t) & -q\end{bmatrix}\boldsymbol{\Phi},\tag{5.5.18}$$

这里 $\boldsymbol{\Phi}(0)=E$. 无病周期 1 解的稳定性由下面矩阵特征值决定.

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}(1+B(K_1)+B'(K_1))K_1 & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{1+\rho B_1(K_1)}{1+B(K_1)} & 0\\ \dfrac{(1-\exp(-q))B'(K_1)}{(1+B(K_1))(1-\exp(-q)+B(K_1))} & 0 & \dfrac{1}{1+B(K_1)}\end{bmatrix}\boldsymbol{\Phi}(1),$$

其中(5.5.18)的解具有形式

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=\begin{bmatrix}\exp(-\int_0^t\Delta(\tau)\mathrm{d}\tau) & \varphi_{12} & 0\\ 0 & \exp(-\alpha t+\beta\int_0^t(1-V_0(\tau))C(K(\tau))\mathrm{d}\tau & 0\\ 0 & \varphi_{32} & \exp(-qt)\end{bmatrix}.$$

故 $\boldsymbol{M}$ 的特征值为对角线元素,稳定条件为

$$0<\lambda_1=[1+B(K_1)+B'(K_1)]K_1\exp\left(-\int_0^1\Delta(t)\mathrm{d}t\right)<1,$$

$$0 < \lambda_2 = \frac{1+\rho B(K_1)}{1+B(K_1)}\exp\left(-\alpha+\beta\int_0^1(1-V_0(t))C(K(t))\mathrm{d}t\right) < 1,$$

$$0 < \lambda_3 = \frac{\exp(-q)}{1+B(K_1)} < 1.$$

由假设(H_3)知,上述第一和第三个不等式总成立.而 $\lambda_2 < 1$ 等价于

$$R_q^* = \frac{\ln(1+\rho B(K_1))+\beta\int_0^1(1-V_0(t))C(K(t))\mathrm{d}t}{\alpha+\ln(1+B(K_1))} < 1. \qquad (5.5.19)$$

由(5.5.19)可得

$$\int_0^1 C(K(t))V_0(t)\mathrm{d}t > \frac{\ln(1+\rho B(K_1))+\beta}{\beta}\left(1-\frac{1}{R_0^*}\right).$$

从上式可选择 q 的大小,使疾病消除.

参考文献

[1] V Lakshmikantham, D D Bainov, P S Simeonov. Theory of Impulsive Differential Equations. World Scientific, 1989

[2] Drumi Bainov, Pavel Simeonov. Impulsive Differential Equations: Periodic Solutions and Applications. Longman Scientific and Technical ,1993

[3] D D Bainov, P S Simeonov. Impulsive Differential Equations: Asymptotic Properties of the Solutions. World Scientific, 1995

[4] S O Ale, B O Oyelami. Impulsive systems and their applications. INT. J. Math. Educ. Sci. TechNot, 2000, 31: 539~544

[5] G Ballinger, X Liu. On boundedness of solutions of Impulsive systems. Nonlinear studies, 1996, 11: 121

[6] M G Roberts, R R Kao. The dynamics of an infectious disease in a population with birth pules. Math. Biosci., 1998, 149: 23~36

[7] B Shulgin, L Stone, Z Agur. Pulse vaccination strategy in the SIR epidemic model. Bull. Math. Biology, 1998, 60: 1123~1148

[8] L Stone, B Shulgin, Z Agur. Theoretical examination of the pulse vaccination policyin the SIR epidemic model. Math. Computer Modelling, 2000, 31: 207~215

[9] 靳 祯. 在脉冲作用下的生态和流行病模型的研究. 西安交通大学博士论文, 2001

[10] Alberto D'Onofrio. Stability properties of pulse vaccination strategy in SEIR epidemic model. Math. Biosci., 2002, 179: 57~72

[11] Sanyi Tang, Yanni Xiao, Lansun Chen. The dynamics of SIS epidemic models with pulse vaccination(to appear)

[12] Liu Xinzhi. Impulsive stabilizability of autonomous systems. J. Math. Anal and Appl., 1994, 187: 17~39

[13] G Ballinger, X Liu. Permanence of population growth models with impulsive effects. Math.

Comput. Modelling. 1997, 26: 59～72

[14] X Liu. Stability results for impulsive differential systems with applications to population growth models. Dynamics and stability of Systems, 1994, 9: 163～174

[15] J R Yan, J H Shen. Impulsive stabilizaction of functional differential equations by Lyapunov-Razumikhin functions. Nonlinear Analysis, 1999, 37: 245～255

[16] J Zhou, H W Hethcote. Population size dependent incidence in models for disease without immunity. J. Math. Biol., 1994, 32: 809～834

[17] M G Roberts, J Jowett. An SEI model with density dependent demographics and epidemiology. IMA J. Math. Appl. Med. Biol., 1996, 13: 245

[18] O Diekmann, M Kretzschmar. Patterns in the effects of infections diseases on population growth. J. Math. Biol., 1991, 32: 539

[19] M C Schuette, H W Hethcote. Modeling the effects of varicella vaccination programs on the incidence of chickenpox and shingles. Bull. Math. Biol., 1999, 61: 1031～1064

[20] V Rouderfer, N Becker, H W Hethcote. Waning immunity and its effects on vaccination schedules. Math. Biosci., 1994, 124: 59～82

[21] V Rouderfer, N Becker. Assessment of two-dose vaccination schedules: Availability for vaccination and catch-up. Math. Biosci., 1995, 129: 41～66

第 6 章 具有年龄结构的传染病模型

在对生物种群和疾病的传播状况进行建模和分析时,我们需要进行许多假设将实际问题简化,使得我们在数据收集、模型建立、参数估计、模型分析和应用方面能够较方便地进行.在前面所讨论的绝大部分传染病模型中,我们是把人口或生物群体分成易感者、患者、移除者等若干类,且认为在每一类中的成员无差异,即他们在被感染、治愈、死亡等方面完全相同,这样建立起来的模型容易分析,已得到很多研究结果.但这样的模型在假设的合理性、在信息量方面与实际需要之间存在着一定的差距,特别是当涉及到与人口或生物的年龄有关的传染病时,这种缺陷尤为突出,故需要引入具有年龄结构的传染病模型.

本章讨论的具有年龄结构的传染病模型的主要特点是将人口或生物个体按其生理年龄进行分类,以便更好地反映个体的生理特征和影响疾病传播方面的差异,这些模型在描述与年龄有关的疾病的传播规律时将更加有效和实用.本章先讨论具有年龄结构的种群模型,然后再分别建立和研究具有年龄结构的离散和连续传染病模型.为了叙述方便,我们在这一章中将生物种群统称为人口,这一章的建模思想、研究方法也适用于其它生物种群中传染病的传播规律研究.

§6.1 具有年龄结构的人口模型

由于不同年龄的人口在生育和死亡方面存在着很大的差异,就需要在人口模型中引入年龄结构.从 Sharp[1] 和 Lotka[2] 早期的工作开始,具有年龄结构的人口模型研究已经有了非常丰富的结果[3~9].本节介绍具有年龄结构的人口模型的一些主要结果.

6.1.1 具有年龄结构的离散人口模型

设一个国家或地区人口的最大寿命为 A,将区间 $[0,A]$ 分成 n 个相等的子区间,每个子区间的长度为 $h=\frac{A}{n}$,从 t_0 开始将时间也按长度为 h 的间隔进行划分,记 $t_j=jh,j=0,1,2,\cdots$.记 $t=t_j$ 时年龄在区间 $\left[\frac{(k-1)A}{n},\frac{kA}{n}\right)$ 的人口的数量为 $x_k(t_j),k=1,2,\cdots,n,j=0,1,2,\cdots$,则 t_j 时刻该国家或地区的人口总数为 $x(t_j)=\sum\limits_{j=1}^{n}x_k(t_j)$.设该国家或地区在时间区间 $[t_j,t_{j+1})$ 内各年龄区间

内社会成员生育的子女数和死亡的人数与现有的人数比例，即在$[t_j, t_{j+1})$内年龄在$\left[\frac{(k-1)A}{n}, \frac{kA}{n}\right)$内社会成员生育的子女数为$b_k(x(t_j))x_k(t_j)$，死亡的人数为$d_k(x(t_j))x_k(t_j)$，其中$b_k(x(t_j))$和$d_k(x(t_j))$分别是与人口总数有关的年龄别生育率和死亡率．根据人口的年龄随着时间同步增长这一事实，我们可以得到下列的离散模型

$$\begin{aligned} &x_1(t_{j+1}) = \sum_{k=1}^{n} b_k(x(t_j))x_k(t_j), \\ &x_{k+1}(t_{j+1}) = p_k(x(t_j))x_k(t_j), \qquad k = 1,2,\cdots,n-1, \\ &p_k(x(t_j)) = 1 - d_k(x(t_j)), \qquad j = 1,2,\cdots, \end{aligned} \tag{6.1.1}$$

其中$p_k(x(t_j))$称为年龄别存活率．当我们知道了人口参数$b_k(x(t_j))$、$d_k(x(t_j))$和某一年的人口分布后，就可用模型(6.1.1)进行递推得出以后各时段人口的数量，也可利用模型(6.1.1)对人口发展变化的趋势进行分析．

线性模型的预测与性态分析

当(6.1.1)中的生育率、存活率与人口总数无关时，就得到了线性模型

$$\begin{aligned} &x_1(t_{j+1}) = \sum_{k=1}^{n} b_k x(t_j), \\ &x_{k+1}(t_j) = p_k x_k(t_j), \\ &k = 1,2,\cdots,n-1, \quad j = 1,2,\cdots. \end{aligned} \tag{6.1.2}$$

线性模型(6.1.2)可以用来对人口的发展变化过程进行预测．例如我们取$A = 100$，$n = 100$，$h = 1$，取1982年中国第三次人口普查的数据作为初始值，也利用这一年中国人口的年龄别生育率和死亡率作为人口参数代入模型(6.1.2)中，可以求出以后各年份各年龄组中国人口的数量，再将各年龄组的人相加即可得到每年全国总人口的预测值．表6.1给出了预测值、统计值、绝对误差和相对误差[10]．

表6.1　用离散模型预测的中国人口总数

年份	模型预测值(万)	实际统计值(万)	绝对误差(万)	相对误差(%)
1982	101541	101541	—	—
1983	103058	102495	563	0.55
1984	104561	103475	1086	1.05
1985	106068	104532	1536	1.47
1990	114757	113368	1389	1.25
2000	135620	129533	6087	4.70

从表6.1中看出,用模型(6.1.2)预测中国人口的变化情况在短期内是相当精确的.我们可以通过更换参数和初始值的方法来改进结果,如每次全国人口普查后,我们可以把全国新的生育率、死亡率及人口分布代入模型(6.1.2)之中去,重新进行预测,在两次人口普查中间即可得到相当精确的预测结果.

通过数值计算可以对一定时期内人口的发展变化过程进行预测,为了弄清时间趋于无穷时人口变化的趋势,我们需要对模型(6.1.2)解的性态进行分析.记

$$\boldsymbol{x}(t_j) = \begin{pmatrix} x_1(t_j) \\ x_2(t_j) \\ \vdots \\ x_n(t_j) \end{pmatrix}, \qquad L = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_{n-1} & b_n \\ p_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & p_{n-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

将模型(6.1.2)写为向量形式得

$$\boldsymbol{x}(t_{j+1}) = L\boldsymbol{x}(t_j). \tag{6.1.3}$$

(6.1.3)通常称为Leslie模型[11~13].模型(6.1.3)解的渐近性态完全由矩阵L的特征值和特征向量确定.L是一个非负矩阵,次对角线上的元素均为正数,第一行的元素中至少有几个相连的元素大于零,故L是一个不可约本原矩阵,由熟知的非负矩阵的Frebenius定理[14]知,L有一个正的单重特征值λ_1,它大于其它特征值的模,且λ_1有一个正的特征向量,在此基础上可以得到下面的定理.

定理6.1.1[15] 设λ_1是L的正特征值,$\boldsymbol{v}_1$是矩阵L属于λ_1的单位正特征向量.则对模型(6.1.3)的任何正初值$\boldsymbol{x}(t_0)$有

(1) $\lim\limits_{t_j\to+\infty}\dfrac{\boldsymbol{x}(t_j)}{\|\boldsymbol{x}(t_j)\|} = \boldsymbol{v}_1$;

(2) 当$\lambda_1 < 1$时,$\lim\limits_{t_j\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}x_k(t_j) = 0$;

(3) 当$\lambda_1 > 1$时,$\lim\limits_{t_j\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}x_k(t_j) = +\infty$;

(4) 当$\lambda_1 = 1$时,$\lim\limits_{t_j\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}x_k(t_j) = c$,

其中$\|x(t_j)\|$表示向量$\boldsymbol{x}(t_j)$的模.

由于Leslie矩阵的正特征值不容易计算,且此正特征值的生态学意义不明显.故我们定义

$$N = b_1 + b_2p_1 + b_3p_1p_2 + \cdots + b_np_1p_2\cdots p_{n-1}.$$

N称为模型(6.1.3)的净生育率,其人口学含义是一个社会成员一生之中生育子女的平均数.由净生育率N的实际含义可以猜测,当$N < 1$时,人口会趋于

零;当 $N > 1$ 时,人口会无限增长;当 $N = 1$ 时,人口才会有可能达到稳定状态.这样的猜想由下面的定理予以证实.

定理 6.1.2[16] 设 λ_1 是矩阵 L 的正特征值,N 是模型(6.1.3)的净生育率,则 $\lambda_1 > 1$、$\lambda_1 = 1$、$\lambda_1 < 1$ 分别与 $N > 1$、$N = 1$、$N < 1$ 等价.

非线性模型的平衡解与稳定性

线性模型在长期预测和性态分析时有一定的不足之处,其中关于生育率和死亡率为常数的假设也不甚合理,需要对其进行改进.我们在此处仅考虑一种特殊的非线性模型,假设死亡率为常数,各年龄组的生育率与人口总数有关,即取 $b_k(x(t_j)) = b_k\varphi(x(t_j))$,其中 b_k 是常数,$\varphi(z)$ 是 z 的连续可微的非负函数,所得到的非线性模型为

$$\begin{aligned} &x_1(t_{j+1}) = \varphi(x(t_j))\sum_{k=1}^{n} b_k x_k(t_j), \\ &x_{k+1}(t_{j+1}) = p_k x_k(t_j), \\ &k = 1,2,\cdots,n-1, \quad j = 1,2,\cdots. \end{aligned} \tag{6.1.4}$$

在模型(6.1.4)的分析中,与时间无关的平衡解起着非常重要的作用,我们先计算它的平衡解.设(6.1.4)的平衡解为 $x_k(t_j) = x_k^*$,代入(6.1.4)后由其后 $n-1$ 个方程得:

$$\begin{aligned} x_2^* &= p_1 x_1^*, \\ x_3^* &= p_1 p_2 x_1^*, \\ &\cdots\cdots \\ x_n^* &= p_1 p_2 \cdots p_{n-1} x_1^*. \end{aligned}$$

再将这些关系代入(6.1.4)的第一个方程得

$$x_1^* = x_1^*\varphi(x^*)(b_1 + b_2 p_1 + b_3 p_1 p_2 + \cdots + b_n p_1 p_2 \cdots p_{n-1}).$$

由此可见,模型(6.1.4)总有零平衡解:$x_k^* = 0, k = 1,2,\cdots,n$. (6.1.4)的正平衡解由方程

$$\varphi(x^*) = N_0 \tag{6.1.5}$$

的正根确定,其中 $N_0 = (b_1 + b_2 p_1 + b_3 p_1 p_2 + \cdots + b_n p_1 p_2 \cdots p_{n-1})^{-1}$.根据人口的发展变化过程,我们一般假设 $\varphi(z)$ 是一个单调减的函数或有单峰的函数.利用方程(6.1.5)可以得到下面关于非线性模型(6.1.4)正平衡态存在性的定理[9].

定理 6.1.3 设 $\varphi(z)$ 是连续可导的非负函数,满足 $\lim\limits_{z\to+\infty}\varphi(z) = 0$.

1) 若 $\varphi(z)$ 关于 z 严格单调减,则当 $\varphi(0) > N_0$ 时,模型(6.1.4)有惟一的正平衡解 x^*;若 $\varphi(0) \leqslant N_0$,则模型(6.1.4)无正平衡解.

2) 若有 $z_0 > 0$,使得当 $0 < z < z_0$ 时,$\varphi'(z) > 0$,当 $z > z_0$ 时,$\varphi'(z) <$

0.则当 $\varphi(0) > N_0$ 时,模型(6.1.4)有惟一的正平衡解;当 $\varphi(0) < N_0,\varphi(z_0) > N_0$ 时,模型(6.1.4)有两个正平衡解 x_{01}^* 和 x_{02}^*,$0 < x_{01}^* < z_0, x_{02}^* > z_0$;当 $\varphi(z_0) = N_0$ 时,模型(6.1.4)仅有一个正平衡解 $x^* = z_0$;当 $\varphi(z_0) < N_0$ 时,模型(6.1.4)无正平衡解.

定理6.1.3分别给出了当 $\varphi(z)$ 是单调减函数和单峰函数时模型(6.1.4)正平衡解的存在性.这两种类型的函数的第一个反映了生育率随人口总数增加而单调减少的密度制约情况,第二个反映了当总人口数较少时,人口的生育率随人口总数增加而增加,而当人口总数增加到一定程度时由于资源等限制使得人口的生育率将随着人口总数的增加而减少这一现象.定理6.1.3的证明只要利用连续函数的介值定理和单调性即可.图6.1给出了定理6.1.3的几何解释.

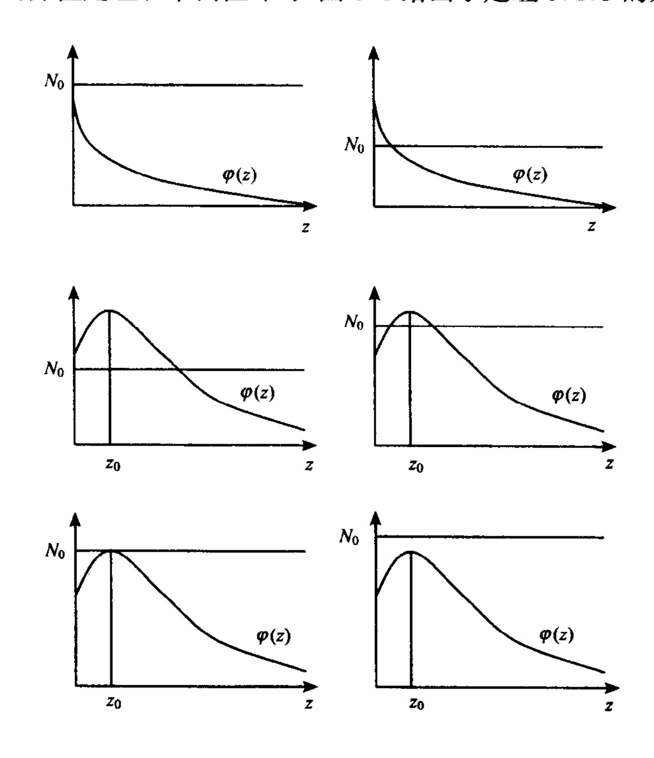


图6.1 $\varphi(z)$ 为单调函数或单峰函数时模型(6.1.4)的平衡解

非线性模型(6.1.4)平衡解的稳定性有下面两个定理.

定理6.1.4 设 $\varphi(z)$ 是 z 的非负连续可微函数,且满足 $\lim\limits_{z\to+\infty}\varphi(z) = 0$,$\varphi'(z) \leqslant 0$,则当 $\varphi(0) < N_0$ 时(6.1.4)的零平衡解是全局渐近稳定的;当 $\varphi(0) > N_0$ 时,(6.1.4)的零平衡解是不稳定的.

证明 由(6.1.4)的后 $n-1$ 个方程,我们可以得出

$$x_2(t_j)=p_1x_1(t_{j-1}),$$
$$x_3(t_j)=p_2p_1x_1(t_{j-2}),$$
$$\cdots\cdots$$
$$x_n(t_j)=p_{n-1}p_{n-2}p_2p_1x_1(t_{j-n+1}).$$

将这些表达式代入(6.1.4)中的第一个方程得到关于 $x_1(t_j)$ 的非线性差分方程

$$x_1(t_{j+1})=\varphi(x(t_j))\sum_{k=1}^{n}b_kp_{k-1}\cdots p_1x_1(t_{j-k+1}),\tag{6.1.6}$$

其中 $p_0=1,x(t_j)=\sum_{k=1}^{n}p_{k-1}\cdots p_1x_1(t_{j-k+1})$.引入下面的记号

$$x_1(t_{j-k+1})=x_{j-k+1},\quad j=1,2,\cdots,n,$$
$$\beta_1=b_1,\beta_2=b_2p_1,\cdots,\beta_k=b_kp_{k-1}p_{k-2}\cdots p_1,\qquad k=3,4,\cdots,n,$$
$$\gamma_1=1,\gamma_2=p_1,\cdots,\gamma_k=p_{k-1}p_{k-2}\cdots p_1,$$

将(6.1.6)简记为

$$x_{j+1}=\varphi(x(t_j))(\beta_1x_j+\beta_2x_{j-1}+\cdots+\beta_nx_{j-n+1}),\tag{6.1.7}$$
$$x(t_j)=\gamma_1x_j+\gamma_2x_{j-1}+\cdots+\gamma_nx_{j-n+1}.$$

由 $\beta_k\geqslant 0(k=1,2,\cdots,n)$ 及 $\varphi(z)$ 的单调性可以得出

$$x_{j+1}\leqslant\varphi(0)(\beta_1x_j+\beta_2x_{j-1}+\cdots+\beta_nx_{j-n+1}).\tag{6.1.8}$$

令 $\bar{x}=\max\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$,则由(6.1.8)得

$$x_j\leqslant\frac{\varphi(0)}{N_0}\bar{x}_1,\qquad j=n+1,n+2,\cdots,2n,$$
$$x_j\leqslant\left(\frac{\varphi(0)}{N_0}\right)^2\bar{x}_1,\quad j=2n+1,2n+2,\cdots,3n.$$

重复这一过程可以得到

$$x_j\leqslant\left(\frac{\varphi(0)}{N_0}\right)^m\bar{x}_1,\qquad j=mn+1,mn+2,\cdots,(m+1)n.$$

所以,当 $\varphi(0)<N_0$ 时,$\frac{\varphi(0)}{N_0}<1,\lim\limits_{j\to+\infty}x_j=\lim\limits_{j\to+\infty}x_1(t_j)=0$,故非线性模型(6.1.4)的零解是全局渐近稳定性的;当 $\varphi(0)>N_0$ 时,我们在(6.1.4)的零平衡解处将它进行线性化,对应的差分方程(6.1.7)的线性化系统为

$$x_{j+1}=\varphi(0)(\beta_1x_j+\beta_2x_{j-1}+\cdots+\beta_nx_{j-n+1}),\tag{6.1.9}$$

线性化系统(6.1.9)的特征方程为

$$\lambda^n=\varphi(0)(\beta_1\lambda^{n-1}+\beta_2\lambda^{n-2}+\cdots+\beta_{n-1}\lambda+\beta_n),$$

即

$$1=\varphi(0)\left(\frac{\beta_1}{\lambda}+\frac{\beta_2}{\lambda^2}+\cdots+\frac{\beta_n}{\lambda^n}\right),$$

且当 $\lambda=1$ 时，$\varphi(0)\left(\frac{\beta_1}{\lambda}+\frac{\beta_2}{\lambda^2}+\cdots+\frac{\beta_n}{\lambda^n}\right)\bigg|_{\lambda=1}=\frac{\varphi(0)}{N_0}>1$，故(6.1.9)的特征方程至少有一个大于 1 的特征值，所以(6.1.4)的零解是不稳定的. ∎

定理 6.1.5 设 $\varphi(z)$ 是 z 的非负连续可微函数，$\lim\limits_{z\to+\infty}\varphi(z)=0$，且有正数 z_0，使得当 $z<z_0$ 时，$\varphi'(z)>0$，当 $z>z_0$ 时，$\varphi'(z)<0$. 则当 $\varphi(0)<N_0$ 时，模型(6.1.4)的零平衡解是渐近稳定的；当 $\varphi(z_0)<N_0$ 时，(6.1.4)的零解是全局渐近稳定的；当 $\varphi(0)>N_0$ 时，(6.1.4)的零解是不稳定的.

定理 6.1.5 中全局稳定的证明与定理 6.1.4 中的类似，局部稳定性可以通过将模型在零解处线性化后考察线性化系统的特征根得出. 有关理论可参阅文献[17,18].

非线性模型(6.1.4)正平衡解的稳定性讨论比较困难，对函数 $\varphi(z)$ 的不同假设可以得出很多结论，例如文献[19]讨论了非线性矩阵模型正平衡的分支及小分支解的稳定性，文献[20]讨论了非线性矩阵模型稳定年龄结构的存在性，文献[21]讨论了非线性模矩阵模型正平衡解稳定的必要条件，并给出例子说明必要条件不一定充分. 对更一般的非线性模型，可以出现周期解或浑沌现象[22,23].

6.1.2 具有年龄结构的连续人口模型

具有年龄结构的连续模型的建模思路、分析方法与离散模型类似，但在模型的描述、解的存在惟一性等方面要比离散模型困难，需要更加深入的数学基础. 在 §2.2 中已经仔细给出了建模过程和线性模型解的性态的研究，在这儿给出周期模型和非线性模型研究的一些结果.

具有年龄结构的线性周期模型

与时间无关的具有年龄结构的线性模型的研究已经比较完善[24,25]，但与时间 t 有关的模型的研究还有大量的工作需要进行[26,27]. 在此我们讨论一个周期线性系统的周期解分支与稳定性问题. 考虑模型出生率与时间有关的线性模型

$$\begin{aligned}&\frac{\partial p(a,t)}{\partial a}+\frac{\partial p(a,t)}{\partial t}=-\mu(a)p(a,t),\qquad 0<a<A,t>0,\\&p(0,t)=n_0\int_{A_1}^{A_2}\beta(a)(1+\varepsilon\omega(t))p(a,t)\mathrm{d}a,\\&p(a,0)=p_0(a),\end{aligned}\tag{6.1.10}$$

其中 A 是一个社会成员的最大寿命，$[A_1,A_2]$ 为生育年龄区间，$0<A_1<A_2<A$，$\mu(a)$ 是人口的年龄为 a 的死亡率，$n_0\beta(a)(1+\varepsilon\omega(t))$ 是人口在 t 时刻的年

龄为 a 的生育率，$p_0(a)$ 是人口的初始年龄分布函数，n_0 和 ε 是常数.

模型(6.1.10)由于在生育率中含有与时间有关的函数，故它没有平衡解，当 $p(t)$ 为周期函数时，我们可以寻求其周期解并讨论该周期解的稳定性.我们假设

(A1)　$\omega(t)$ 是连续可微的周期函数，$\omega(t+1)=\omega(t)$，$\int_0^1\omega(t)\mathrm{d}t=0$，$\|\omega(t)\|=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|\omega(t)|\leqslant 1$.

(A2)　$\mu(a)$ 在 $[0,A)$ 连续，$\mu(a)>0$，$\lim\limits_{a\to A^-}\int_0^a\mu(s)\mathrm{d}s=+\infty$. $\pi(a)=\exp(-\int_0^a\mu(s)\mathrm{d}s)$，定义 $\pi(A)=0$，则 $\pi(a)$ 是 $[0,A]$ 上的单调减连续函数，$\pi(0)=1,\pi(A)=0$.

(A3)　$\beta(a)$ 是非负连续函数，当 $a\in(A_1,A_2)$ 时，$\beta(a)>0$，当 $a\leqslant A_1$ 或 $a\geqslant A_2$ 时，$\beta(a)=0$ 且 $\int_{A_1}^{A_2}\beta(a)\pi(a)\mathrm{d}a=1$.

对模型(6.1.10)利用特征线法求解，可以得到在 t 时刻出生的社会成员在一生之中生育的子女数为

$$n(t)=n_0\int_{A_1}^{A_2}\beta(a)\pi(a)(1+\varepsilon\omega(t+a))\mathrm{d}a,$$

即 $n(t)$ 为 t 时刻出生的社会成员的净生育率，在一个周期内出生的社会成员的平均净生育率为

$$n_0=\int_0^1 n(t)\mathrm{d}t=n_0\int_{A_1}^{A_2}\beta(a)\pi(a)\mathrm{d}a.$$

为了求得(6.1.10)的周期解，我们作变换

$$p(a,t)=\pi(a)+v(a,t),\qquad n_0=1+\lambda(\varepsilon).$$

将它们代入(6.1.10)的前两个方程中，计算后得到 $v(a,t)$ 和 $\lambda(\varepsilon)$ 所满足的方程为

$$\begin{aligned}&\frac{\partial v(a,t)}{\partial a}+\frac{\partial v(a,t)}{\partial t}=-\mu(a)v(a,t),\\&v(0,t)=\int_{A_1}^{A_2}\beta(a)v(a,t)\mathrm{d}a+\varepsilon\omega(t)\left(1+\int_{A_1}^{A_2}\beta(a)v(a,t)\mathrm{d}a\right)\\&\qquad+\lambda(\varepsilon)(1+\varepsilon\omega(t))\left(1+\int_{A_1}^{A_2}\beta(a)v(a,t)\mathrm{d}a\right).\end{aligned}\tag{6.1.11}$$

(6.1.11)的通解为 $v(a,t)=\pi(a)B(t-a)$，其中 $B(t)$ 是一个任意可微函数.为了让 $v(a,t)$ 满足(6.1.11)的后一个方程，$B(t)$ 必须满足下面的积分方程

$$B(t)=\int_{A_1}^{A_2}\beta(a)\pi(a)B(t-a)\mathrm{d}a+h(t), \tag{6.1.12}$$

其中

$$h(t)=\varepsilon\omega(t)\left(1+\int_{A_1}^{A_2}\beta(a)\pi(a)B(t-a)\mathrm{d}a\right)$$
$$+\lambda(\varepsilon)(1+\varepsilon\omega(t))\left(1+\int_{A_1}^{A_2}\beta(a)\pi(a)B(t-a)\mathrm{d}a\right). \tag{6.1.13}$$

模型(6.1.10)周期解的存在性与积分方程(6.1.12)周期解的存在性等价.为了讨论(6.1.12)周期解的存在性,我们定义连续可微函数空间 P^1 和其子空间 P_0^1.

$$P^1=\{h(t)\mid h(t)\text{ 连续可微},h(t+1)=h(t),$$
$$\|h(t)\|=\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|h(t)|\},$$
$$P_0^1=\{h(t)\mid h(t)\in P^1,\int_0^1 h(t)\mathrm{d}t=0\}.$$

为了使(6.1.13)中定义的 $h(t)$ 属于 P_0^1,对于任意 $B(t)\in P_0^1$ 我们选取

$$\lambda(\varepsilon)=\frac{-\varepsilon\int_{A_1}^{A_2}\beta(a)\pi(a)\int_0^1\omega(t)B(t-a)\mathrm{d}t\mathrm{d}a}{1+\varepsilon\int_{A_1}^{A_2}\beta(a)\pi(a)\int_0^1\omega(t)B(t-a)\mathrm{d}t\mathrm{d}a},$$

将这个 $\lambda(\varepsilon)$ 代入(6.1.13)得到与 ε 和 $B(t)$ 有关的函数记为 $h(\varepsilon,B(t))$,再将其代入到(6.1.12)得到关于 $B(t)$ 的一个非线性方程

$$B(t)=\int_{A_1}^{A_2}\beta(a)\pi(a)B(t-a)\mathrm{d}a+h(\varepsilon,B(t)). \tag{6.1.14}$$

由于对任意 $B(t)\in P_0^1$, $h(\varepsilon,B(t))\in P_0^1$,利用文献[26]中关于积分方程周期解存在的定理,我们可以得到线性周期模型(6.1.10)周期解的存在性和零解的稳定性.

定理6.1.6[28] 若假设A1、A2和A3成立,则有正数 ε_0 和在 $[-\varepsilon_0,\varepsilon_0]$ 中定义的函数 $\lambda=\lambda(\varepsilon)$,使得模型(6.1.10)有非平凡周期解;当 $0<\lambda<\lambda(\varepsilon)$ 时,(6.1.10)的零解全局渐近稳定,而当 $\lambda>\lambda(\varepsilon)$ 时,(6.1.10)的零解不稳定.

具有年龄结构的非线性模型

具有年龄结构的非线性模型自1974年Gurtin和MacCamy[29]的开创性工作以后,已经有十分丰富的研究成果[30~32].我们仅介绍死亡和生育率与人口总数有关的一个非线性模型的研究结果.其它的非线性模型的研究思路类似.考察非线性模型

$$\frac{\partial p(a,t)}{\partial a}+\frac{\partial p(a,t)}{\partial t}=-\mu(a,P(t))p(a,t),\qquad 0<a<A,$$

$$
\begin{aligned}
&p(0,t) = \int_{A_1}^{A_2} \beta(a,P(t))p(a,t)\mathrm{d}a = B(t), \qquad t > 0, \\
&p(a,0) = p_0(a), \\
&P(t) = \int_0^A \gamma(a)p(a,t)\mathrm{d}a.
\end{aligned} \tag{6.1.15}
$$

设模型(6.1.15)中的函数满足下列条件:

(H1)　$\mu(a,P) > 0, a \in [0,A), P \geqslant 0, \dfrac{\partial \mu(a,P)}{\partial P}$ 关于(a,P)一致有界,

$$\left|\frac{\partial \mu(a,P)}{\partial P}\right| \leqslant \mu_p^*, \qquad \int_0^A \mu(a,P)\mathrm{d}a = +\infty,$$

记 $\pi(a,P) = \exp\left(-\int_0^a \mu(\tau,P)\mathrm{d}\tau\right)$.

(H2)　$\beta(a,P) \geqslant 0$,当 $a \in (A_1,A_2)$ 时,$\beta(a,P) > 0$,当 $a \notin (A_1,A_2)$ 时,$\beta(a,P) = 0$,$\beta(a,P)$ 和$\dfrac{\partial \beta(a,P)}{\partial P}$关于$(a,P)$一致有界,$|\beta(a,P)| \leqslant \beta^*$,$\left|\dfrac{\partial \beta(a,P)}{\partial P}\right| \leqslant \beta_p^*$.

(H3)　$\gamma(a) \geqslant 0$,连续有界,$\gamma(a) \leqslant \gamma^*$.

(H4)　$p_0(a) \geqslant 0$,连续,当 $a \in [0,A)$ 时,$p_0(a) > 0, p_0(A) = 0, P_0(0) = \int_0^A \beta(a,P_0)p_0(a)\mathrm{d}a$,其中 $P_0 = \int_0^A \gamma(a)p_0(a)\mathrm{d}a$. 沿着特征线对模型(6.1.15)的第一个方程积分可得

$$
p(a,t) = \begin{cases} p_0(a-t)\exp\left(-\int_0^t \mu(a-t+\tau,P(\tau))\mathrm{d}\tau\right), & a \geqslant t, \\ B(t-a)\exp\left(-\int_0^a \mu(\tau,P(t-a+\tau))\mathrm{d}\tau\right), & a < t. \end{cases}
$$

再将这一 $p(a,t)$ 的表达式代入(6.1.15)中 $B(t)$ 和 $P(t)$ 的表达式中,整理后得 $B(t)$ 和 $P(t)$ 所满足的积分方程组为($t \leqslant A_1$):

$$
\begin{aligned}
P(t) = &\int_0^a \gamma(a)B(t-a)\exp\left(-\int_0^a \mu(\tau,P(t-a+\tau))\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}a \\
&+ \int_t^A \gamma(a)p_0(a-t)\exp\left(-\int_0^t \mu(a-t+\tau,P(\tau))\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}a, \\
B(t) = &\int_{A_1}^{A_2} \beta(a,P(t))p_0(a-t)\exp\left(-\int_0^t \mu(a-t+\tau,P(\tau))\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}a.
\end{aligned} \tag{6.1.16}
$$

当 $t \leqslant A_1$ 时,模型(6.1.15)解的存在惟一性就和积分方程组(6.1.16)解的存在惟一性等价. 利用(6.1.16)的右端构造算子,在适当的空间中验证所构造的

算子是一个压缩映射,就可以得到(6.1.16) 解局部的存在惟一性,利用与常微分方程组类似的延拓方法,在假设 H1 ~ H4 成立的条件下就可以将(6.1.16) 的解延拓到 $t \geqslant 0$,最后再返回去就得到了模型(6.1.15) 的解在 $t \geqslant 0$ 上的存在惟一性[5,32].

接下来讨论模型(6.1.15) 的平衡解的存在性. 显然,$p(a,t) = 0$ 是(6.1.15) 的平衡解,称它为零平衡解或平凡平衡解. 设 $p_\infty(a)$ 是(6.1.15) 的非零平衡解,则 $p_\infty(a)$ 必须满足

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}p_\infty(a)}{\mathrm{d}a} &= -\mu(a,P_\infty)p_\infty(a), \\ p_\infty(0) &= \int_{A_1}^{A_2} \beta(a,P_\infty)p_\infty(a)\mathrm{d}a, \\ P_\infty &= \int_0^A \gamma(a)p_\infty(a)\mathrm{d}a. \end{aligned} \tag{6.1.17}$$

由(6.1.17) 的第一个方程可以得出

$$p_\infty(a) = p_\infty(0)\exp\left(-\int_0^a \mu(\tau,P_\infty)\mathrm{d}\tau\right).$$

将 $p_\infty(a)$ 的表达式代入(6.1.17) 的后两个方程中去,再利用非零平衡解的 $p_\infty(0) \neq 0$ 可得 P_∞ 满足的方程为

$$\int_0^A \beta(a,P_\infty)\exp\left(-\int_0^a \mu(\tau,P_\infty)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}a = 1. \tag{6.1.18}$$

将(6.1.18)任何一个正解代入 $p_\infty(a)$ 的表达式后就可以得到模型(6.1.15) 的一个正平衡解. 我们定义模型(6.1.15) 的净生育率为

$$n(P) = \int_0^A \beta(a,P)\exp\left(-\int_0^a \mu(\tau,P)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}a.$$

$n(P)$ 的人口学含义是当人口总数为常量 P 时,每个社会成员一生中生育子女的数目. 从实际情况看,当一个社会的人口要达到平衡状态时,一个很自然的要求是每个社会成员平均一生中生育的子女数为 1. 所以,方程(6.1.18) 从人口学的角度看是很自然的一个要求. 从方程 $n(P) = 1$ 解出 P_∞ 后,就可以得到(6.1.15) 的平衡解

$$p_\infty(a) = \frac{P_\infty}{\int_0^A \gamma(a)\exp\left(-\int_0^a \mu(\tau,P_\infty)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}a}\exp\left(-\int_0^a \mu(\tau,P_\infty)\mathrm{d}\tau\right).$$

与离散的非线性模型类似,$n(P)$ 通常取两种形式,单调递减或单峰函数. 例如我们取 $\mu(a,P) = \mu_0(a)$,$\beta(a,P) = \beta_0(a)\mathrm{e}^{\varepsilon P(1-P/k)}$,此时

$$n(P) = \int_0^A \beta_0(a)\mathrm{e}^{\varepsilon P(1-P/k)}\exp\left(-\int_0^a \mu_0(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}a = n(0)\mathrm{e}^{\varepsilon P(1-P/k)}.$$

$n(P)$ 在 $P = k/2$ 时取得最大值,$n(\frac{k}{2}) = n(0)e^{ek/4}$, $\lim\limits_{P\to+\infty} n(P) = 0$. 所以,当 $n(0) > 1$ 时,模型(6.1.15) 有惟一的正平衡解;当 $n(0) < 1$, $n(0)e^{ek/4} > 1$ 时,模型(6.1.15) 恰有两个正平衡解;当 $n(0)e^{ek/4} = 1$ 时,模型(6.1.15) 恰有 1 个正平衡解;而当 $n(0)e^{ek/4} < 1$ 时,模型(6.1.15) 没有正平衡解.

对较一般的函数 $\mu(a,P)$ 和 $\beta(a,P)$,方程 $n(P) = 1$ 的求解也是十分困难的,常用的一种方法就是讨论 $n(P) = 1$ 的根的分支问题. 令 $F(P) = \frac{n(P)}{n(0)}$,将方程 $n(P) = 1$ 改写为等价的方程

$$n(0)F(P) = 1. \tag{6.1.19}$$

由于 $F(0) = 1$,故当 $n(0) = 1$ 和 $F'(0) \neq 0$ 时,就很有可能当 $P > 0$ 且 P 很小时得到(6.1.19) 的解. 事实上,令

$$\begin{aligned}
&n(0) = 1 + \varepsilon,\\
&P = P_1\varepsilon + P_2\varepsilon^2 + P_3\varepsilon^3 + \cdots,\\
&F(P) = 1 + F'(0)P + \frac{F''(0)}{2}P^2 + \cdots.
\end{aligned}$$

将这些表达式代入(6.1.19) 中,由低到高比较 ε 的同次幂的系数得

$$\begin{aligned}
&\varepsilon \quad 1 + F'(0)P_1 = 0,\\
&\varepsilon^2 \quad F'(0)P_2 + \frac{F''(0)}{2}P_1^2 + F'(0)P_1 = 0, \cdots .
\end{aligned}$$

于是,可以得出 $P_1 = -\frac{1}{F'(0)}$, $P_2 = \frac{-P_1}{F'(0)} - \frac{F''(0)}{2F'(0)}P_1^2, \cdots$. 这样就得到了模型(6.1.15) 正平衡解的分支. 对非线性模型正平衡解分支有兴趣的读者可以参阅文献[9,33].

平衡解稳定性的研究也是通过线性化的方法进行的. 先将非线性模型(6.1.15) 在平衡解展开,忽略其高次项,得到线性化系统,与 §2.2 中类似寻找线性化系统的形如 $f(a)e^{\lambda t}$ 的解,从 λ 的实部大于零或小于零来判断平衡解的稳定性. 例如,当 $\mu(a,P) = \mu_0(a)$, $\gamma(a) = 1$ 时,令

$$p(a,t) = p_\infty(a) + \xi(a,t), \qquad P(t) = P_\infty + \eta(t),$$

将模型(6.1.15) 在平衡解 $p_\infty(a)$ 处线性化为

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\xi(a,t)}{\partial a} + \frac{\partial\xi(a,t)}{\partial t} = -\mu_0(a)\xi(a,t),\\
&\xi(0,t) = \int_0^A \beta(a,P_\infty)\xi(a,t)\mathrm{d}a + \eta(t)\int_0^A \frac{\partial\beta(a,P_\infty)}{\partial P}p_\infty(a)\mathrm{d}a, \qquad (6.1.20)\\
&\eta(t) = \int_0^A \xi(a,t)\mathrm{d}a.
\end{aligned}$$

令 $\xi(a,t)=\xi(a)e^{\lambda t}$,代入(6.1.20)得

$$\xi'(a)=-(\mu(a)+\lambda)\xi(a),$$

$$\xi(0)=\int_0^A \beta(a,P_\infty)\xi(a)\mathrm{d}a+\int_0^A \xi(a)\mathrm{d}a\int_0^a \frac{\partial\beta(a,P_\infty)}{\partial P}p_\infty(a)\mathrm{d}a,$$

$$\eta(t)=e^{\lambda t}\int_0^A \xi(a)\mathrm{d}a.$$

求解得,$\xi(a)=\xi(0)\exp\left(-\lambda a-\int_0^a \mu_0(\tau)\mathrm{d}\tau\right)$,代入 $\xi(0)$ 的表达式得

$$1=\int_0^A \beta(a,P_\infty)\exp\left(-\lambda a-\int_0^a \mu_0(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}a$$
$$+\int_0^A \frac{\partial\beta(a,P_\infty)}{\partial P}p_\infty(a)\mathrm{d}a\int_0^A \exp\left(-\lambda a-\int_0^a \mu_0(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}a. \quad (6.1.21)$$

(6.1.21)就是线性化系统(6.1.20)的特征方程,由特征方程可以得到下面的稳定性定理.

定理 6.1.7[34] 当 $\int_0^A \frac{\partial\beta(a,P_\infty)}{\partial P}p_\infty(a)\mathrm{d}a>0$ 时,(6.1.15)的平衡解 $p_\infty(a)$ 是不稳定的;而当 $\int_0^A \frac{\partial\beta(a,P_\infty)}{\partial P}p_\infty(a)\mathrm{d}a<0$,并且 $\left|\int_0^A \frac{\partial\beta(a,P_\infty)}{\partial P}p_\infty(a)\mathrm{d}a\right|$ 充分小时,模型(6.1.15)的平衡解 $p_\infty(a)$ 是稳定的.

具有年龄结构的人口模型还有许多问题值得到探讨,如平衡解的全局稳定性[35]、非自治非线性周期模型周期解的存在性与稳定性[36]、具有年龄结构种群模型的数值解[37,38]、更一般的种群模型的建模与研究[39,40],这些方面的研究工作与常微分方程模型的研究现状相比,还有相当大的差距.

§6.2 具有年龄结构的离散传染病模型

与连续的传染病模型相比,离散传染病模型的研究要少得多.文献[41]用一个离散传染病模型来预测流感在英格兰和威尔士的流行情况,文献[42]研究了离散的SI、SIS、SIR模型,发现离散SI、SIR的性态与其对应的连续模型类似,但离散SIS模型可以呈显更复杂的动力学性态.文献[43]对确定和随机的离散SIS和SIR模型进行了比较.文献[44]研究了一个具有人口动力学的离散SIS模型.文献[45]发现一个离散SIS模型的平衡态稳定性在一定范围内随参数变化的现象.文献[46]用一个离散模型去估计一种医疗措施的有效性.流行病建模与研究的专著[47]也对离散传染病模型进行了简单介绍.

由于许多传染病数据都是按天、周、月或年收集的,故离散模型在参数估计和初值选取方面比连续模型方便.离散模型建立了以后,解关于初值问题的存

在惟一性容易得到，这是离散模型的又一优点．离散模型还可以比连续模型展示更丰富的动力学性态，许多无法求解或理论分析的连续模型往往需要化为离散模型进行数值模拟．所以，建立和分析离散传染病模型就更加实用．当然，离散模型的分析研究中也存在很多困难，这主要是因为连续模型中求导、积分等处理连续变量的有效方法难以使用．在这一节中我们先讨论离散 SIS 和 SIR 模型的性态，接下来建立和分析的年龄结构的离散 SIS、SIR 模型，最后给出离散传染病模型应用的一个例子．

6.2.1　离散 SIS 和 SIR 模型

取时间的长度为 1，这可以是 1 年、1 月、1 周、1 天、1 小时等，考察在 $t=0,1,2,\cdots$，这些离散时间点上传染病的传播情况．记 t 时刻一个地区的易感者人数为 $S(t)$，患者人数为 $I(t)$，并设该地区的总人口数为常数，$S(t)+I(t)=N$．在忽略出生、死亡和迁移时离散的 SIS 模型为[43]

$$
\begin{aligned}
S(t+1) &= S(t)-\frac{\beta}{N}S(t)I(t)+\gamma I(t),\\
I(t+1) &= I(t)+\frac{\beta}{N}S(t)I(t)-\gamma I(t),
\end{aligned}
\tag{6.2.1}
$$

其中 β 为单位时间内每个病人与其它成员的接触数，γ 为病人的恢复率．我们假设

$$
0<\beta<1,\qquad 0<\gamma<1. \tag{6.2.2}
$$

当(6.2.2)成立时，容易验证对任何非负初始值 $S(0)$ 和 $I(0)$，$S(0)+I(0)=N$，必有 $S(t)\geqslant 0$，$I(t)\geqslant 0$ 和 $S(t)+I(t)=N$．即(6.2.1)的解存在、非负和惟一．

为了研究(6.2.1)解的性态，我们用 $S(t)=N-I(t)$ 代入(6.2.1)的第二个方程中，进行整理后得

$$
I(t+1)=I(t)\left(1+\beta-\gamma-\frac{\beta}{N}I(t)\right). \tag{6.2.3}
$$

我们仅研究(6.2.3)初值满足 $0\leqslant I(t)\leqslant N$ 的解的性态即可．定义模型(6.2.1)的再生数为 $R_0=\dfrac{\beta}{\gamma}$，$R_0$ 是一个病人在患病期间内平均感染的人数．通过简单计算可以看出，当 $R_0\leqslant 1$ 时，模型(6.2.1)只有无病平衡解 $E^0(N,0)$，当 $R_0>1$ 时，(6.2.1)除过无病平衡解外还有地方病平衡解 $E^*=(S^*,I^*)=\left(\dfrac{N}{R_0},(1-\dfrac{1}{R_0})N\right)$．利用 R_0 就可以给出离散 SIS 模型(6.2.1)的渐近性态．

定理 6.2.1[42]　设条件(6.2.2)成立．则当 $R_0<1$ 时，模型(6.2.1)的无病平衡解是全局渐近稳定的，而当 $R_0>1$ 时，模型(6.2.1)的无病平衡解是不稳定

的,地方病平衡解是全局渐近稳定的.

证明 我们只需证明(6.2.3)的零解或正解 I^* 相应的结论即可.当 $I(0)=0$ 时,由(6.2.3)容易看出 $I(t)\equiv 0$,当 $I(0)>0$ 时,由于 $0<I(t)\leqslant N$,且由(6.2.3)得

$$\frac{I(t+1)}{I(t)}=1+\beta-\gamma-\frac{\beta}{N}I(t)\leqslant 1+\beta-\gamma.$$

所以,当 $R_0<1$ 时,$\frac{I(t+1)}{I(t)}<1$,$I(t)$ 单调减趋于零.当 $R_0>1$ 时,(6.2.3)的正平衡解 I^* 存在,满足

$$I^*=I^*\left(1+\beta-\gamma-\frac{\beta}{N}I^*\right).$$

定义(6.2.3)的 Liapunov 函数为 $V(I(t))=(I(t)-I^*)^2$,对任意 $I(t)>0$,计算可得

$$\begin{aligned}\Delta V(I(t))&=V(I(t+1))-V(I(t))\\&=\frac{\beta}{N}I(t)\left(-2+\frac{\beta}{N}I(t)\right)(I(t)-I^*)^2\leqslant 0.\end{aligned}$$

由 LaSalle 不变性原理得[48],(6.2.3)的正平衡解 I^* 在 $0<I(t)\leqslant N$ 内是全局渐近稳定的,当然,此时(6.2.3)的零平衡解是不稳定的. ∎

接下来讨论一个有出生和死亡的离散 SIR 模型[43].

$$\begin{aligned}&S(t+1)=S(t)+\mu N-\frac{\beta}{N}S(t)I(t)-\mu S(t),\\&I(t+1)=I(t)+\frac{\beta}{N}S(t)I(t)-(\mu+\gamma)I(t),\\&R(t+1)=R(t)+\gamma I(t)-\mu R(t),\\&S(0)\geqslant 0,I(0)\geqslant 0,R(0)\geqslant 0,S(0)+I(0)+R(0)=N,\end{aligned}\tag{6.2.4}$$

其中 μ 是单位时间的生育率和死亡率.我们假设所有的新生儿都是易感者,在单位时间内被感染得病的人与病人与易感者的数量之积成比例,单位时间内生育、死亡的各类人数均与现有人口成比例,单位时间内治愈的人数与现有的病人数成比例,治愈的病人具有终身免疫力而进入了移出者类.

在 SIR 模型(6.2.4)中,我们要求 $0<\beta<1$,$0<\mu+\gamma<1$,这样,对任何满足 $S(0)+I(0)+R(0)=N$ 的一组非负的初始值,由(6.2.4)的递推关系可以得出,对所有 t,各类人口 $S(t)$、$I(t)$、$R(t)$ 均非负,且 $S(t)+I(t)+R(t)=N$,即总人口保持不变.对(6.2.4)定义再生数 $R_1=\frac{\beta}{\mu+\gamma}$.由此得到,当 $R_1<1$ 时,模型(6.2.4)仅有无病平衡解 $E^0(N,0,0)$,而当 $R_1>1$ 时,模型(6.2.4)除过无病平衡解 E^0 外,还有地方病平衡解 $E^*\left(\frac{N}{R_1},\frac{\mu N}{\beta}(R_1-1),\frac{\gamma N}{\beta}(R_1-1)\right)$.(6.2.4)平衡解

的渐近性态如下:

定理6.2.2[42]　设$0<\beta<1,0<\mu+\gamma<1$.则当$R_1<1$时,模型(6.2.4)的无病平衡解是全局渐近稳定的,而当$R_1>1$时,(6.2.4)的无病平衡解是不稳定的.其地方病平衡解当$R_1>1,R_1-1$充分小时是渐近稳定的.

证明　当定理6.2.2的条件成立时,$I(t)\geqslant 0$对于所有$t=0,1,2,\cdots$.由于$0\leqslant S(t)\leqslant N$,所以

$$\frac{I(t+1)}{I(t)}=1+\frac{\beta}{N}S(t)-\mu-\gamma\leqslant 1+\beta-\mu-\gamma<1.$$

故$I(t)$单调减趋于零.由(6.2.4)中关于$R(t)$的方程得,

$$R(t+1)=(1-\mu)R(t)+\gamma I(t).$$

从$t=0$开始递推,利用$I(t)$的单调性,经过计算和比较得

$$\begin{aligned}
R(1)&=(1-\mu)R(0)+\gamma I(0),\\
R(2)&=(1-\mu)R(1)+\gamma I(1)\\
&\leqslant(1-\mu)^2R(0)+(1-\mu)\gamma I(0)+\gamma I(0),\\
&\cdots\cdots\\
R(t)&=(1-\mu)^tR(0)+\gamma I(0)[1+(1-\mu)+\cdots+(1-\mu)^{t-1}]\\
&=(1-\mu)^tR(0)+\frac{\gamma I(0)(1-(1-\mu)^t)}{\mu}\\
&\leqslant(1-\mu)^tR(0)+\frac{\gamma}{\mu}I(0),
\end{aligned}$$

所以,对任意给定的ε,当$R(0)$、$I(0)$充分小时,$R(t)$就可以任意小.即(6.2.4)的无病平衡解关于$R(t)$是稳定的,同理可以推出.

$$R(t+k)\leqslant(1-\mu)^kR(t)+\frac{\gamma}{\mu}I(t).$$

由于$R(t)$有界,$I(t)$趋于零,故$\lim\limits_{t\to+\infty}R(t)=0$.由此得$\lim\limits_{t\to+\infty}I(t)=0$, $\lim\limits_{t\to+\infty}R(t)=0$, $\lim\limits_{t\to+\infty}S(t)=N$.即(6.2.4)的无病平衡解当$R_1<1$时是全局渐近稳定的.

为了研究(6.2.4)当$R_1>1$时平衡解的稳定性,我们利用总人口数不变这一事实而略去(6.2.4)的第三个方程,仅考虑前两个方程组成的方程组的平衡解稳定性.为此,将它分别在两个平衡点线性化,利用线性化系统的特征根模的大小来分析其稳定性,在无病平衡点E^0的线性化系统为

$$\begin{aligned}
S(t+1)&=(1-\mu)S(t)-\beta I(t),\\
I(t+1)&=(1+\beta-(\mu+\gamma))I(t).
\end{aligned}\tag{6.2.5}$$

线性化系统的两个特征根分别为$\lambda_1=1-\mu$和$\lambda_2=1+\beta-\mu-\gamma$.当$R_1>1$时,$\beta>\mu+\gamma$,故$\lambda_2>1$,所以(6.2.4)的无病平衡解是不稳定的.

(6.2.4)的前两个方程在地方病平衡解E^*处的线性化系统为

$$\begin{aligned} S(t+1) &= (1-\mu R_1)S(t) - (\mu+\gamma)I(t), \\ I(t+1) &= \mu(R_1-1)S(t) + I(t). \end{aligned} \tag{6.2.6}$$

线性化系统(6.2.6)的特征方程为

$$\lambda^2 - (2-\mu R_1)\lambda + 1 - \mu R_1 + (\mu+\gamma)\mu(R_1-1) = 0.$$

它的根为

$$\lambda = 1 - \frac{\mu}{2}R_1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{\mu^2 R_1^2 - 4\mu(\mu+\gamma)(R_1-1)}.$$

由于 $0<\mu<1$，当 $R_1>1$，R_1-1 充分小时，$0<\mu^2R_1^2-4\mu(\mu-\gamma)(R_1-1)<\mu^2R_1^2$，所以，此时两个特征根满足 $-1<\lambda_1,\lambda_2<1$，(6.2.4)的地方病平衡解是渐近稳定的. ▌

6.2.2 具有年龄结构的离散传染病模型

对一些感染与年龄有关的疾病，在模型中引入年龄结构就比较合适. 将人口的最大年龄区间等分为 $m+1$ 个子区间，每个区间的长度为 $\frac{A}{m+1}$，我们把这样的区间称为一个单位时间. 将时间坐标也按相等的区间划分，将 t 时刻年龄在区间 $\left[\frac{jA}{m+1},\frac{(j+1)A}{m+1}\right)$ 的人口数量记为 $N_j(t)$，$j=0,1,\cdots,m$，$t=0,1,2,\cdots$. 记 b_j 为 $\left[\frac{jA}{m+1},\frac{(j+1)A}{m+1}\right)$ 区间内人口的生育率，d_j 为死亡率，$p_j=1-d_j$ 为存活率，则按上节的方法可得有年龄结构的人口模型为

$$\begin{aligned} &N_0(t+1) = \sum_{k=0}^{m} b_k N_k(t), \\ &N_{j+1}(t+1) = p_j N_j(t), \qquad j=0,1,\cdots,m-1, t=0,1,2,\cdots, \\ &N_j(0) = N_{j0}, \qquad j=0,1,2,\cdots,m. \end{aligned}$$

我们关心的主要问题是建立和研究具有年龄结构的传染病模型，所以假设各年龄组中的人口已经达到了稳定值，由前一节的讨论知，此时要求净生育率为 1，即

$$n = b_0 + b_1p_0 + b_2p_0p_1 + \cdots + b_mp_0p_1\cdots p_{m-1} = 1,$$

各年龄区间的人口数为 $N_0, N_1=N_0p_0, N_2=N_0p_0p_1, \cdots, N_m=N_0p_0p_1p_{m-1}$.

将各年龄区间的人口分为易感者和患者两类，记 t 时刻年龄在区间 $\left[\frac{jA}{m+1},\frac{(j+1)A}{m+1}\right)$ 中的易感者和患者人数分别为 $S_j(t)$ 和 $I_j(t)$，这两类人口之间的关系见图 6.2.

设在区间 $\left[\frac{kA}{m+1},\frac{(k+1)A}{m+1}\right)$ 内的一个病人在单位时间内与位于

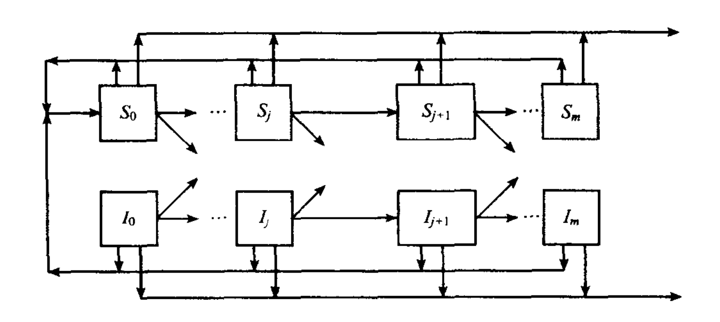


图 6.2　易感者与患者之间的转换关系示意图

$\left[\frac{jA}{m+1},\frac{(j+1)A}{m+1}\right)$ 区间的社会成员的接触数为 $\beta_k\lambda_j$，在区间 $\left[\frac{jA}{m+1},\frac{(j+1)A}{m+1}\right)$ 内的病人在一个单位时间内的恢复率为 γ_j，则根据图 6.2 所描述的关系可得到具有年龄结构的 SIS 离散模型为

$$
\begin{aligned}
&S_0(t+1)=\sum_{k=0}^{m}b_j(S_j(t)+I_j(t)),\\
&I_0(t+1)=0,\\
&S_{j+1}(t+1)=p_jS_j(t)-\lambda_j\sum_{k=0}^{m}\beta_kI_k(t)\frac{S_j(t)}{N_j(t)}+\gamma_jI_j(t),\quad j=0,1,\cdots,m-1,\\
&I_{j+1}(t+1)=p_jI_j(t)+\lambda_j\sum_{k=0}^{m}\beta_kI_k(t)\frac{S_j(t)}{N_j(t)}-\gamma_jI_j(t),\quad j=0,1,\cdots,m-1,\\
&S_j(0)=S_{j0}\geqslant 0,\ I_j(0)=I_{j0}\geqslant 0,\quad S_{j0}+I_{j0}=N_j,\qquad j=0,1,\cdots,m.
\end{aligned}
\tag{6.2.7}
$$

根据传染病问题的实际背景，我们假设

$$
d_j+\gamma_j\leqslant 1,\quad d_j+\frac{\lambda_j}{N_j}\sum_{k=0}^{m}\beta_kN_k\leqslant 1,\quad j=0,1,\cdots,m,\tag{6.2.8}
$$

(6.2.8) 中的第一组不等式的实际含义是第 j 个区间 $\left[\frac{jA}{m+1},\frac{(j+1)A}{m+1}\right)$ 内病人在一个单位时间内死亡和治愈的数目所占的比例不会超过 1，第二组等式的含义是在一个单位时间内第 j 个区间 $\left[\frac{jA}{m+1},\frac{(j+1)A}{m+1}\right)$ 内的易感者死亡和被感染得病的人数所占的比例不会超过 1. 在这些十分自然的条件之下，我们可以得到模型(6.2.7) 解的非负性.

定理 6.2.3　设条件(6.2.8) 成立，则模型(6.2.7) 的所有解非负，且满足 $S_j(t)+I_j(t)=N_j$，$j=0,1,\cdots,m$，$t=0,1,2,\cdots$.

证明 由于所有参数和初值非负,取 $t=0$ 得出

$$S_0(1)=\sum_{j=0}^{m}b_j(S_j(0)+I_j(0))=\sum_{j=0}^{m}b_jN_j=N_0,$$

$$I_{j+1}(1)=(p_j-\gamma_j)I_j(0)+\lambda_j\sum_{k=0}^{m}\beta_kI_k(0)\frac{S_j(0)}{N_j}\geqslant 0,\quad j=0,1,\cdots,m-1,$$

$$S_{j+1}(1)=\left(p_j-\frac{\lambda_j}{N_j}\sum_{k=0}^{m}\beta_kI_k(0)\right)S_j(0)+\gamma_jI_j(0)\geqslant 0,\quad j=0,1,\cdots,m-1,$$

$$I_{j+1}(1)+S_{j+1}(1)=p_j(I_j(0)+S_j(0))=p_jN_j=N_{j+1},\ j=0,1,\cdots,m-1.$$

利用数学归纳法就可以证明上面的分析对所有的 $t\geqslant 0$ 成立. ▌

定理6.2.3给出了模型(6.2.7)解的合理性,为了分析(6.2.7)解的性态,我们用 $S_j(t)+I_j(t)=N_j$ 代入(6.2.7)中,略去关于 $S_j(t)$ 的方程,得到关于患者人数的模型如下.

$$\begin{aligned}&I_0(t+1)=0,\\&I_{j+1}(t)=(p_j-\gamma_j)I_j(t)+\lambda_j\sum_{k=1}^{m}\beta_kI_k(t)\left(1-\frac{I_j(t)}{N_j}\right),\quad j=0,1,\cdots,m-1,\\&I_j(0)=I_{j0},\ 0\leqslant I_{j0}\leqslant N_j,\qquad j=0,1,\cdots,m.\end{aligned}\tag{6.2.9}$$

为了讨论方便,记

$$\boldsymbol{I}(t)=\begin{bmatrix}I_1(t)\\I_2(t)\\I_3(t)\\\vdots\\I_m(t)\end{bmatrix},\qquad F=\begin{bmatrix}\beta_1&\beta_2&\beta_3&\cdots&\beta_{m-1}&\beta_m\\\beta_1&\beta_2&\beta_3&\cdots&\beta_{m-1}&\beta_m\\\beta_1&\beta_2&\beta_3&\cdots&\beta_{m-1}&\beta_m\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\\beta_1&\beta_2&\beta_3&\cdots&\beta_{m-1}&\beta_m\end{bmatrix},$$

$$T=(T_{i,j})_{m\times n},\ T_{i,i}=\lambda_{i-1},\qquad i=1,2,\cdots,m,$$

$$B=(B_{i,j})_{m\times n},\ B_{i+1,i}=p_i-\gamma_i,\qquad i=1,2,\cdots,m-1,$$

$$G(\boldsymbol{I}(t))=(G_{i,j})_{m\times n},\ G_{i+1,i}=\lambda_iI(t)/N_i,\qquad i=1,2,\cdots,m-1,$$

其余的 $T_{i,j}$,$B_{i,j}$ 和 $G_{i,j}=0$. 模型(6.2.9)的向量形式为

$$\boldsymbol{I}(t+1)=B\boldsymbol{I}(t)+TF\boldsymbol{I}(t)-G(\boldsymbol{I}(t))F\boldsymbol{I}(t),\quad t=0,1,2,\cdots.\tag{6.2.10}$$

记(6.2.10)与时间无关的平衡解为 $\boldsymbol{I}$,即 $\boldsymbol{I}$ 满足方程

$$\boldsymbol{I}=B\boldsymbol{I}+TF\boldsymbol{I}-G(\boldsymbol{I})F\boldsymbol{I}.\tag{6.2.11}$$

显然,(6.2.11)有零平衡解 $\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0}$,即模型(6.2.7)的无病平衡解. 为了求出(6.2.11)的正平衡解,即模型(6.2.7)的地方病平衡解,我们记 $x=\sum_{k=1}^{m}\beta_kI_k$,则

$0 \leqslant x \leqslant \sum_{k=1}^{m} \beta_k N_k$. 再记

$$\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_{m-1} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda_1/N_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2/N_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_{m-1}/N_{m-1} & 0 \end{bmatrix}.$$

将(6.2.11) 重新整理后得

$$\boldsymbol{I} = B\boldsymbol{I} + xE\boldsymbol{\lambda} - xQ\boldsymbol{I},$$

其中 E 是 $m \times m$ 阶单位矩阵. 由于矩阵 $E - B + xQ$ 可逆, 由此可以得出 $\boldsymbol{I}$ 的表达式,

$$\boldsymbol{I} = x(E - B + xQ)^{-1}\boldsymbol{\lambda}.$$

由于 x 是由 $\boldsymbol{I}$ 的各个分量的一个线性组合, 所以 $\boldsymbol{I}$ 没有真正解出. 记 $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m)^{\tau}$, 则 x 是 $\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{I}$ 的数量积, 即 x 必须满足方程

$$f(x) = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m)(E - B + xQ)^{-1}\boldsymbol{\lambda} = 1.$$

通过较仔细的计算可以得到 $f(x)$ 的具体表达式

$$\begin{aligned} f(x) = {} & \beta_1\lambda_0 + \beta_2(\lambda_1 + \lambda_0 q_1(x)) \\ & + \beta_3(\lambda_2 + \lambda_1 q_2(x) + \lambda_0 q_1(x) q_2(x)) + \cdots \\ & + \beta_m(\lambda_{m-1} + \lambda_{m-2} q_{m-1}(x) + \lambda_{m-3} q_{m-2}(x) q_{m-1}(x) + \cdots \\ & + \lambda_1 q_2(x) q_3(x) \cdots q_{m-1}(x) + \lambda_0 q_1(x) q_2(x) \cdots q_{m-1}(x)), \end{aligned}$$

其中 $q_j = q_j(x) = p_j - \gamma_j - x\lambda_j/N_j$, $j = 1, 2, \cdots, m-1$. 引入记号

$$a_j = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m)[(E - B)^{-1}Q]^j (E - B)^{-1}\boldsymbol{\lambda}, \quad j = 0, 1, \cdots, m-1,$$

将上面关于 x 的方程改写为

$$\begin{aligned} a_0 - 1 = {} & a_1 x - a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots \\ & + (-1)^{m-1} a_{m-2} x^{m-2} + (-1)^m a_{m-1} x^{m-1}. \end{aligned} \tag{6.2.12}$$

定义模型(6.2.7) 的再生数为

$$R_3 = f(0) = a_0.$$

再生数 R_3 的含义是指一个病人在整个患病期间平均感染的人数. 下面是关于(6.2.7) 地方病平衡解的分支结果.

定理6.2.4　具有年龄结构的离散传染病模型(6.2.7) 当 $R_3 > 1$、$R_3 - 1$ 充分小时有小的地方病平衡解.

证明　(6.2.7) 地方病平衡解的存在性与(6.2.10) 正平衡解的存在性等价, 这又与关于方程(6.2.12) 正根的存在性等价. 当 $R_3 > 1$、$R_3 - 1$ 充分小时, (6.2.12) 左端是一个充分小的正数, 又由于(6.2.12) 的右端当 x 充分小时是 x

的增函数,所以,当定理 6.2.4 的条件成立时,利用分支理论可得(6.2.12) 存在惟一的正根 x.通过 x 即可得(6.2.10) 的正平衡解为

$$\begin{aligned} I_1 &= x\lambda_0, \\ I_2 &= x(\lambda_1 + \lambda_0 q_1(x)), \\ &\cdots\cdots \\ I_m &= x(\lambda_{m-1} + \lambda_{m-2}q_{m-1}(x) + \lambda_{m-3}q_{m-2}(x)q_{m-3}(x) + \cdots \\ &\quad + \lambda_1 q_2(x)q_3(x)\cdots q_{m-1}(x) + \lambda_0 q_1(x)q_2(x)\cdots q_{m-1}(x)). \end{aligned}$$ ▌

接下来利用线性化方法讨论(6.2.10) 无病平衡解的稳定性.(6.2.10) 在 $\boldsymbol{I} = \boldsymbol{0}$ 的线性系统为

$$\boldsymbol{I}(t+1) = B\boldsymbol{I}(t) + TF\boldsymbol{I}(t), \quad t = 0,1,2,\cdots. \tag{6.2.13}$$

由于

$$B + TF = B + \begin{bmatrix} \lambda_0\beta_1 & \lambda_0\beta_2 & \lambda_0\beta_3 & \cdots & \lambda_0\beta_{m-1} & \lambda_0\beta_m \\ \lambda_2\beta_1 & \lambda_1\beta_2 & \lambda_1\beta_3 & \cdots & \lambda_1\beta_{m-1} & \lambda_1\beta_m \\ \lambda_2\beta_1 & \lambda_2\beta_2 & \lambda_2\beta_3 & \cdots & \lambda_2\beta_{m-1} & \lambda_2\beta_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \lambda_{m-1}\beta_1 & \lambda_{m-1}\beta_2 & \lambda_{m-1}\beta_3 & \cdots & \lambda_{m-1}\beta_{m-1} & \lambda_{m-1}\beta_m \end{bmatrix}$$

是一个非负矩阵,关于非负矩阵的 Frebenious 定理指出 $B + TF$ 仅有一个正的特征值 ρ_0 和属于 ρ_0 的正特征向量 $\boldsymbol{v}$,$B + TF$ 其它特征值ρ 的模都不会超过ρ_0,即 $|\rho| \leqslant \rho_0$.所以(6.2.13) 的稳定性完全由 $B + TF$ 的正特征值ρ_0 确定.ρ_0 和 $\boldsymbol{v}$ 满足的方程为

$$(B + TF)\boldsymbol{v} = \rho_0 E\boldsymbol{v}.$$

由于 $E - B$ 可逆,$B + TF$ 的正特征值$\rho_0 = 1$ 的充分必要条件是

$$(E - B)^{-1}TF\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v},$$

即矩阵$(E - B)^{-1}TF$ 具有特征值 1.通过较仔细的代数运算可以得出

$$(E - B)^{-1}TF = \begin{bmatrix} \beta_1\omega_1 & \beta_2\omega_1 & \beta_3\omega_1 & \cdots & \beta_m\omega_1 \\ \beta_1\omega_2 & \beta_2\omega_2 & \beta_3\omega_2 & \cdots & \beta_m\omega_2 \\ \beta_1\omega_3 & \beta_2\omega_3 & \beta_3\omega_3 & \cdots & \beta_m\omega_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \beta_1\omega_m & \beta_2\omega_m & \beta_3\omega_m & \cdots & \beta_m\omega_m \end{bmatrix},$$

其中$\omega_1 = \lambda_0$,

$$\begin{aligned} \omega_2 &= \lambda_1 + \lambda_0 q_1(0), \\ \omega_3 &= \lambda_2 + \lambda_1 q_2(0) + \lambda_0 q_1(0)q_2(0), \\ &\cdots\cdots \end{aligned}$$

$$\omega_m = \lambda_{m-1} + \lambda_{m-2}q_{m-1}(0) + \lambda_{m-3}q_{m-2}(0)q_{m-1}(0) + \cdots + \lambda_1 q_2(0)q_3(0)\cdots q_{m-1}(0) + \lambda_0 q_1(0)q_2(0)\cdots q_{m-1}(0).$$

矩阵$(E - B)^{-1}TF$ 的特征方程为

$$\rho^{m-1}(\beta_1\omega_1 + \beta_2\omega_2 + \cdots + \rho_m\omega_m - \rho) = 0.$$

$(E - B)^{-1}TF$ 惟一的正特征值为

$$\rho_0 = \beta_1\omega_1 + \beta_2\omega_2 + \cdots + \rho_m\omega_m = (\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)(E - B)^{-1}\boldsymbol{\lambda} = R_3.$$

R_3 是模型(6.2.10),也即模型(6.2.7) 的基本再生数,根据 R_3 的大小,可以得到下面的定理.

定理 6.2.5 具有年龄结构的离散传染病模型(6.2.7) 的无病平衡解当 $R_3 < 1$ 时是全局渐近稳定的,而当 $R_3 > 1$ 时是不稳定的.

证明 我们仅需证明(6.2.10) 的无病平衡解有类似的结论即可.由前面的分析和 R_3 的定义得知,当 $R_3 < 1$ 时,(6.2.10) 的无病平衡解是稳定的,而当 $R_3 > 1$ 时,(6.2.10) 的无病平衡解是不稳定的.为了得到 $R_3 < 1$ 时无病平衡解的全局稳定性,我们用比较原理.事实上,对于同一个初始值 $\boldsymbol{I}(0)$ 和任意一个患者的年龄分布 $\boldsymbol{I}(t)$,由于 $G(\boldsymbol{I}(t))F\boldsymbol{I}(t) \geqslant 0$,故由(6.2.10) 定义的 $\boldsymbol{I}(t)$ 必须满足

$$\boldsymbol{I}(t + 1) \leqslant B\boldsymbol{I}(t) + TF\boldsymbol{I}(t). \tag{6.2.14}$$

(6.2.14) 与(6.2.10) 在无病平衡解 $\boldsymbol{I}(t) = \boldsymbol{0}$ 的线性化系统(6.2.13) 的差别仅是将等号换为不等号.故对同样的初始值,满足不等式(6.2.14) 的 $\boldsymbol{I}(t)$ 一定不会超过满足线性系统(6.2.13) 的 $\boldsymbol{I}(t)$.而当 $R_3 < 1$ 时,线性系统(6.2.13) 的无病平衡解是稳定的,也是全局渐近稳定的.所以,由比较原理得,(6.2.7) 的无病平衡解也是全局渐近稳定的. ▌

接下来研究模型(6.2.10) 地方病平衡解 $\boldsymbol{I}^*$ 的稳定性.令 $\boldsymbol{z}(t) = \boldsymbol{I}(t) - \boldsymbol{I}^*$,(6.2.10) 在 $\boldsymbol{I}^*$ 处的线性化系统为

$$\boldsymbol{z}(t + 1) = (B + TF - M(\boldsymbol{I}^*)F - M(x^*))\boldsymbol{z}(t), \quad t = 0,1,2,\cdots, \tag{6.2.15}$$

其中 $x^* = \beta_1 I_1^* + \beta_2 I_2^* + \cdots + \beta_m I_m^*$,

$M(x^*) = (M_{ij})_{m\times n}$, $M_{i+1,i} = \lambda_i x^*/N_i$, $i = 1,2,\cdots,m - 1$,

$M(x^*)$ 的其它元素均为零.

通过较长的代数运算得到矩阵 $TF - M(\boldsymbol{I}^*)F$ 为

$$\begin{bmatrix} \lambda_0\beta_1 & \lambda_0\beta_2 & \cdots & \lambda_0\beta_m \\ \lambda_1\beta_1\left(1-\frac{I_1^*}{N_1}\right) & \lambda_1\beta_2\left(1-\frac{I_1^*}{N_1}\right) & \cdots & \lambda_1\beta_m\left(1-\frac{I_1^*}{N_1}\right) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_{m-1}\beta_1\left(1-\frac{I_{m-1}^*}{N_{m-1}}\right) & \lambda_{m-1}\beta_2\left(1-\frac{I_{m-1}^*}{N_{m-1}}\right) & \cdots & \lambda_{m-1}\beta_m\left(1-\frac{I_{m-1}^*}{N_{m-1}}\right) \end{bmatrix},$$

矩阵 $B-M(x^*)$ 的形式为

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ p_1-\gamma_1-\frac{\lambda_1 x^*}{N_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & p_2-\gamma_2-\frac{\lambda_2 x^*}{N_2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & p_{m-1}-\gamma_{m-1}-\frac{\lambda_{m-1}x^*}{N_{m-1}} & 0 \end{pmatrix}.$$

当条件 $p_j-\gamma_j-\frac{\lambda_j x^*}{N_j}\geqslant 0(j=1,2,\cdots,m-1)$ 成立时,矩阵 $B-M(x^*)$、$TF-M(\boldsymbol{I}^*)F$ 和 $B+TF-M(\boldsymbol{I}^*)F-M(x^*)$ 都是非负矩阵,线性化系统(6.2.15)的稳定性可以由矩阵

$$B+TF-M(\boldsymbol{I}^*)F-M(x^*)$$

特征值模的大小来决定. 与前面无病平衡解稳定性的分析类似,非负矩阵 $B+TF-M(\boldsymbol{I}^*)F-M(x^*)$ 的特征值模的大小完全由它的正特征值的大小控制. 而 $B+TF-M(\boldsymbol{I}^*)F-M(x^*)$ 正特征值是否大于 1 或小于 1 与非负矩阵

$$(E-(B-M(x^*)))^{-1}(TF-M(\boldsymbol{I}^*)F)$$

的特征值是否大于 1 或小于 1 等价. 经过仔细的计算等到矩阵 $(E-(B-M(x^*)))^{-1}(TF-M(\boldsymbol{I}^*)F)$ 的正特征值为

$$R_4=\beta_1 u_1(x^*)+\beta_2 u_2(x^*)+\cdots+\beta_m u_m(x^*),$$

其中　$u_1(x^*)=\lambda_0$,

$$u_2(x^*)=\lambda_1\left(1-\frac{I_1^*}{N_1}\right)+\lambda_0 q_1(x^*),$$

$$\cdots\cdots$$

$$u_m(x^*)=\lambda_{m-1}\left(1-\frac{I_{m-1}^*}{N_{m-1}}\right)+\lambda_{m-2}\left(1-\frac{I_{m-2}^*}{N_{m-2}}\right)q_{m-1}(x^*)+\cdots$$

$$+\lambda_1\left(1-\frac{I_1^*}{N_1}\right)q_2(x^*)q_3(x^*)\cdots q_{m-1}(x^*)$$

$$+ \lambda_0 q_1(x^*) q_2(x^*) \cdots q_{m-1}(x^*).$$

与前面的分析类似,可知(6.2.7) 地方病平衡解的稳定性由下面的定理给出.

定理 6.2.6 当 $R_4 < 1$ 时,模型(6.2.7) 的地方病平衡解是稳定的,而当 $R_4 > 1$ 时,(6.2.7) 的地方病平衡解是不稳定的.

6.2.3 有接种免疫的带年龄结构的离散传染病模型

接种免疫可以减少易感者的比例,有效地控制或根绝某一种传染病在一个地区的传播,这是传染病防治的一个有效措施.现在已经有了许多模型来研究在进行接种免疫时疾病的传播规律.此处我们建立接种时有年龄结构的传染病模型,并分析其解的渐近性态.

与 6.2.2 节中对年龄和时间的分割相同,我们分别记 t 时段年龄为 j 的易感者、患者和免疫者的人数分别为 $S_j(t)$、$I_j(t)$ 和 $V_j(t)$, $j = 0,1,\cdots,m$, $t = 0,1,2,\cdots$. 设所研究人口中的生育、死亡、感染和患者治愈的情况与前面 6.2.2 节中相同,在任何时段对第 j 年龄段的易感者的接种率为 θ_j,即 θ_j 比例的易感者经过接种免疫后进入了免疫者类,他们不再被感染患病.在这些假设下得到的数学模型为

$$\begin{aligned}
&S_0(t+1) = (1-\theta_0)\sum_{j=0}^{m} b_j(S_j(t) + I_j(t) + V_j(t)),\\
&I_0(t+1) = 0,\\
&V_0(t+1) = \theta_0 \sum_{j=0}^{m} b_j(S_j(t) + I_j(t) + V_j(t)),\\
&S_{j+1}(t+1) = (p_j - \theta_j)S_j(t) - \lambda_j \sum_{k=0}^{m} \beta_k I_k(t) \frac{S_j(t)}{N_j(t)} + \gamma_j I_j(t), \qquad (6.2.16)\\
&I_{j+1}(t+1) = p_j I_j(t) + \lambda_j \sum_{k=0}^{m} \beta_k I_k(t) \frac{S_j(t)}{N_j(t)} - \gamma_j I_j(t), \quad j = 0,1,\cdots,m-1,\\
&V_{j+1}(t+1) = p_j V_j(t) + \theta_j S_j(t), \qquad j = 0,1,\cdots,m-1,\\
&S_j(0) = S_{j0}, \quad I_j(0) = I_{j0}, \quad V_j(0) = V_{j0}, \qquad j = 0,1,\cdots,m.
\end{aligned}$$

在(6.2.16)中,如果所有年龄段的接种率相同,即 $\theta_0 = \theta_1 = \cdots = \theta_m$,(6.2.16) 就是按比例接种的传染病模型,如果仅有一个 $\theta_{j0} > 0$,其余的 $\theta_j = 0$,则模型(6.2.16) 就是一个脉冲接种的传染病模型.这表明(6.2.16) 可以方便地描述不同接种免疫策略下的疾病传播情况.

与 6.2.2 中对模型(6.2.7) 的讨论类似,我们可以得到,当条件

$$d_j + \gamma_j \leqslant 1, \quad d_j + \theta_j + \frac{\lambda_j}{N_j}\sum_{k=0}^{m}\beta_k N_k \leqslant 1, \quad j = 0,1,\cdots,m \qquad (6.2.17)$$

成立时,模型(6.2.16) 的解非负,下面我们总假设此条件成立.我们仍然假设总

人口达到了平衡状态,即

$$S_j(t)+I_j(t)+V_j(t)=N_j,\quad j=0,1,\cdots,m. \tag{6.2.18}$$

模型(6.2.16) 可以转化为关于患者和免疫者的方程组.

$$\begin{aligned}
&I_0(t+1)=0,\\
&V_0(t+1)=\theta_0\sum_{j=0}^{m}b_jN_j,\\
&I_{j+1}(t+1)=p_jI_j(t)+\lambda_j\sum_{k=0}^{m}\beta_kI_k(t)\frac{N_j-I_j(t)-V_j(t)}{N_j}-\gamma_jI_j(t),\\
&V_{j+1}(t+1)=p_jV_j(t)+\theta_j(N_j-I_j(t)-V_j(t)),\quad j=0,1,\cdots,m-1,\\
&I_j(0)=I_{j0},\quad V_j(0)=V_{j0},\qquad j=0,1,\cdots,m.
\end{aligned} \tag{6.2.19}$$

定义

$$\begin{aligned}
&\mathbf{V}(t)=(V_1(t),V_2(t),\cdots,V_m(t))^T,\\
&\boldsymbol{c}=(\theta_0N_0,\theta_1N_1,\cdots,\theta_{m-1}N_{m-1})^T,\\
&A=(a_{ij})_{m\times m},\quad a_{i+1,i}=\theta_i,\qquad i=1,2,\cdots,m-1,\\
&D=(D_{ij})_{m\times m},\quad D_{i+1,i}=p_i-\theta_i,\qquad i=1,2,\cdots,m-1,\\
&M(\boldsymbol{I}(t)+\mathbf{V}(t))=(M_{i,j})_{m\times m},\quad M_{i+1,i}=\lambda_i\frac{I_i(t)+V_i(t)}{N_i},\\
&\qquad\qquad i=1,2,\cdots,m-1,
\end{aligned}$$

其余的 $a_{i,j},D_{i,j}$ 和 $M_{i,j}=0$.将(6.2.19) 写成向量形式

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{I}(t+1)=(B+TF-M(\boldsymbol{I}(t)+\mathbf{V}(t))F)\boldsymbol{I}(t),\\
&\mathbf{V}(t+1)=D\mathbf{V}(t)-A\boldsymbol{I}(t)+\boldsymbol{c}.
\end{aligned} \tag{6.2.20}$$

由于有接种的模型(6.2.20) 比较复杂,我们在此仅讨论它的无病平衡解的稳定性.令 $I_j(t)=I_j^0=0$,代入(6.2.19) 中可以得到(6.2.19) 的无病平衡态 $E^0(\boldsymbol{I}^0,\mathbf{V}^0)$,其中 $\boldsymbol{I}^0$ 和 $\mathbf{V}^0$ 为

$$\begin{aligned}
&I_j^0=0,\qquad j=1,2,\cdots,m,\\
&V_0^0=\theta_0\sum_{j=0}^{m}b_jN_j,\\
&V_1^0=\theta_0N_0+(p_0-\theta_0)\theta_0\sum_{k=0}^{m}b_kN_k,\\
&V_j^0=(p_{j-1}-\theta_{j-1})V_{j-1}^0+\theta_{j-1}N_{j-1},\qquad j=2,3,\cdots,m.
\end{aligned}$$

令 $\boldsymbol{i}(t)=\boldsymbol{I}(t),\boldsymbol{v}(t)=\mathbf{V}(t)-\mathbf{V}^0$,模型(6.2.20) 在无病平衡解 E^0 的线性化系统为

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{i}(t+1)=(B+TF-M(\mathbf{V}^0)F)\boldsymbol{i}(t),\\
&\boldsymbol{v}(t+1)=D\boldsymbol{v}(t)-A\boldsymbol{i}(t).
\end{aligned} \tag{6.2.21}$$

令 A_0 是所有元素均为 0 的 $m \times m$ 矩阵，A_1 是 $2m \times 2m$ 矩阵，

$$A_1 = \begin{pmatrix} B + TF - M(\boldsymbol{V}^0)F & A_0 \\ -A & D \end{pmatrix}.$$

则线性化系统(6.2.21)的稳定性完全由 A_1 特征值模的大小所确定. 又因为 A_0 是一个 0 矩阵，A_1 的特征值就是由矩阵 $B + TF - M(\boldsymbol{V}^0)F$ 和矩阵 D 的特征值构成. 显然可以得出 D 的所有特征值均为零，所以(6.2.20)的无病平衡解 E^0 的稳定性完全由 $B + TF - M(\boldsymbol{V}^0)F$ 特征值模的大小确定. $B + TF - M(\boldsymbol{V}^0)F$ 是一个非负矩阵，它的正特征值不会小于它的其余特征值的模. 而 $B + TF - M(\boldsymbol{V}^0)F$ 的正特征值是否小于 1 或大于 1 又与 $(I - B)^{-1}(TF - M(\boldsymbol{V}^0)F)$ 的正特征值 是否小于 1 或大于 1 等价. 经过计算后得 $(I - B)^{-1}(TF - M(\boldsymbol{V}^0)F)$ 的正特征值为 R_5，

$$R_5 = \beta_1\sigma_1 + \beta_2\sigma_2 + \cdots + \beta_m\sigma_m,$$

其中

$$\sigma_1 = \lambda_0,$$

$$\sigma_2 = \lambda_1\left(1 - \frac{V_1^0}{N_1}\right) + \lambda_0 q_1(0),$$

$$\cdots\cdots$$

$$\sigma_m = \lambda_{m-1}\left(1 - \frac{V_{m-1}^0}{N_{m-1}}\right) - \lambda_{m-2}\left(1 - \frac{V_{m-2}^0}{N_{m-2}}\right)q_{m-1}(0) + \cdots$$

$$+ \lambda_1\left(1 - \frac{V_1^0}{N_1}\right)q_2(0)q_3(0)\cdots q_{m-1}(0) + q_1(0)q_2(0)\cdots q_{m-1}(0).$$

于是，(6.2.20)的正平衡解的稳定性由下面的定理给出.

定理 6.2.7　设条件(6.2.17)成立，则模型(6.2.20)的无病平衡解当 $R_5 < 1$ 时是稳定的，当 $R_5 > 1$ 时是不稳定的.

关于离散传染病模型在一些具体疾病的应用可参阅文献[49,50]. 在这一节的最后，我们介绍一个离散传染病模型，它用来研究 AIDS 病在同性恋人口中的传播过程[51].

6.2.4　一个具有年龄结构的离散 AIDS 病模型

AIDS 病是目前在世界范围内传播比较严重的疾病之一，且到目前为止还没有任何十分有效的预防和治疗措施. 世界卫生组织和各国政府及医疗部门已经对 AIDS 病的传播进行了大量的研究，也有了许多数学模型描述不同情况下 AIDS 病的传播过程[52,53,54]. 在这儿我们用一个更加复杂的模型来研究 AIDS 病在同性恋人口中的传播规律.

由于 AIDS 病是由 HIV 病毒感染所引起的，且感染者在被感染后病毒在人体的潜伏期很长，而且没有有效的治疗措施，被感染者当病毒在体内增加到一定的数量时发病，故我们先将一个社区的同性恋总人口分为易感者、HIV 感染者和 AIDS 病患者 3 类．由于在同性恋人口中 HIV 的传播主要是通过性行为进行的，故我们又将各类同性恋人口分为高危群体和一般群体两种．高危群体是指有多个或经常更换性伴侣的同性恋人口，一般群体是指单一或有相对固定的性伴侣的同性恋人口．由于 HIV 病毒在体内潜伏的时间比较长，在不同的时期 HIV 感染者传播疾病的能力大小不同，我们又需要将 HIV 感染者分成不同的感染阶段．我们需要在模型中用到下列记号或参数：

N—— 初始的同性恋人口，

$X_i(t)$——t 时段第 i 年龄组的高危易感者数量，

$Y_{ij}(t)$——t 时段第 i 年龄组处于 HIV 第 j 感染阶段的高危感染者数量，

$A_i(t)$——t 时段第 i 年龄组的高危 AIDS 病患者数量，

$W_i(t)$——t 时段第 i 年龄组的一般易感者数量，

$V_{ij}(t)$——t 时段第 i 年龄组处于 HIV 第 j 感染阶段的一般感染者数量，

$Z_i(t)$——t 时段第 i 年龄组的一般 AIDS 病患者数量，

NG—— 年龄组的总数量，

α—— 传染参数，

β—— 每次接触的感染率，

c—— 每年的平均性接触数，

γ—— 从 HIV 感染者到 AIDS 的转移率，

ω—— 由 AIDS 病导致的死亡率，

ν_1,ν_2,ν_3—— 每类从高危群体到一般群体的转移率，

ν_0—— 从一般易感者到高危易感者的转移率，

μ_i—— 各年龄组除 AIDS 以外的死亡率，

θ_i—— 转移到下一个年龄组的转移率，

λ—— 到第一个年龄组的进入率，

P—— 直接到高危群体的比例，

a—— 从高危易感者直接到高危感染者病人的比例，

b—— 从高危感染者直接到高危 AIDS 病人的比例，

g—— 从一般感染者直接到高危 AIDS 病人的比例．

根据 HIV 病毒在同性恋人口群体中的传播情况，我们设一社区的人口在 15 岁时以比例 λ 进入同性恋群体，且直接进入高危群的比例 $P=0$，即所有新进入的均在一般群体中．然后易感者均以转移率 ν_0 进入高危群体，到 20 岁时，所有易

感者都在高危群体中. 我们设在初始人口中, 15 岁的易感者全在一般群体, 16 岁的易感者有 20% 在高危群体中, 17 岁的易感者有 40% 在高危群体中, 18 岁的易感者有 80% 在高危群体中, 19 岁的易感者已全部在高危群体中. 初始人口中 19 ~ 49 岁的易感者全是在高危群体中, 50 岁的易感者中 90% 在高危群体中, 以后每年减少 10% , 到 59 岁时, 所有的易感者又都在一般群体中.

将各类人口按 5 岁一个年龄组分为 15 ~ 19, 20 ~ 24, …, 55 ~ 59 及 60 岁以上几个年龄组, 时间以年为单位. 经过一年后, 有一部分人还停留在同组和同类人口中, 有些死亡或转移到别的类或组中, 也有些进入这一组. 例如对第一组的高危易感者组, 第 $t+1$ 年的数量等于第 t 年该组人的数量, 加上新进入的数量、加上从同年龄组的一般易感者转移来的, 减去转移到一般群体的数量, 减去转移到下一个年龄组中的数量, 再减去死亡的数量. 根据 HIV 在同性恋人口中的传播规律, 可以写出下面三组方程, 分别描述 HIV 在第一年龄组、中间年龄组和最后一个年龄组的同性恋人口群体中的传播规律.

对第一个年龄组的模型为:

$$
\begin{aligned}
X_1(t+1) &= X_1(t) + P\lambda N + \nu_0 W_1(t) - \alpha X_1(t) - (\nu_1 + \theta_1 + \mu_1)X_1(t),\\
W_1(t+1) &= W_1(t) + (1-P)\lambda N + \nu_1 X_1(t) - (\nu_0 + \theta_1 + \mu_1)W_1(t),\\
Y_{11}(t+1) &= Y_{11}(t) + a\alpha X_1(t) - (\gamma + \nu_2 + \theta_1 + \mu_1)Y_{11}(t),\\
Y_{1j}(t+1) &= Y_{1j}(t) + \gamma Y_{1(j-1)}(t) - (\gamma + \nu_2 + \theta_1 + \mu_1)Y_{1j}(t),\\
V_{11}(t+1) &= V_{11}(t) + (1-a)\alpha X_1(t) + \nu_2 Y_{11}(t) - (\gamma + \theta_1 + \mu_1)V_{11}(t),\\
V_{1j}(t+1) &= Y_{1j}(t) + \nu_2 Y_{1j}(t) + \gamma V_{1(j-1)}(t) - (\gamma + \theta_1 + \mu_1)V_{1j}(t),\\
A_1(t+1) &= A_1(t) + b\gamma Y_{1m}(t) + g\gamma V_{1m}(t) - (\nu_3 + \theta_1 + \omega + \mu_1)A_1(t),\\
Z_1(t+1) &= Z_1(t) + (1-b)\gamma Y_{1m}(t) + (1-g)\gamma V_{1m}(t) - \nu_3 A_1(t)\\
&\quad - (\theta_1 + \omega + \mu_1)Z_1(t),
\end{aligned}
\tag{6.2.22}
$$

其中

$$
\alpha = \beta c \frac{\sum_{i=1}^{NG-1}(Y_i(t) + A_i(t))}{\sum_{i=1}^{NG-1}(X_i(t) + Y_i(t) + A_i(t))},
$$

$$
Y_i(t) = \sum_{j=0}^{m} Y_{ij}(t), \qquad V_i(t) = \sum_{j=0}^{m} V_{ij}(t).
$$

对中间年龄组的模型为:

$$
\begin{aligned}
X_i(t+1) &= X_i(t) + \theta_{(i-1)}X_{(i-1)}(t) + \nu_0 W_i(t) - \alpha X_i(t)\\
&\quad - (\nu_1 + \theta_i + \mu_i)X_i(t),\\
W_i(t+1) &= W_i(t) + \theta_{(i-1)}W_{(i-1)}(t) + \nu_1 X_i(t) - (\nu_0 + \theta_i + \mu_i)W_i(t),\\
Y_{i1}(t+1) &= Y_{i1}(t) + a\alpha X_i(t) + \theta_{(i-1)}Y_{(i-1)1}(t)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\quad - (\gamma + \nu_2 + \theta_i + \mu_i) Y_{i1}(t), \\
Y_{ij}(t+1) &= Y_{ij}(t) + \gamma Y_{i(j-1)}(t) + \theta_{(i-1)} Y_{(i-1)j}(t) \\
&\quad - (\gamma + \nu_2 + \theta_i + \mu_i) Y_{ij}(t), \\
V_{i1}(t+1) &= V_{i1}(t) + (1-a)\alpha X_i(t) + \nu_2 Y_{i1}(t) + \theta_{(i-1)} V_{(i-1)1}(t) \\
&\quad - (\gamma + \theta_i + \mu_i) V_{i1}(t), \\
V_{ij}(t+1) &= V_{ij}(t) + \nu_2 Y_{ij}(t) + \gamma V_{i(j-1)}(t) + \theta_{(i-1)} V_{(i-1)j}(t) \\
&\quad - (\gamma + \theta_i + \mu_i) V_{ij}(t), \\
A_i(t+1) &= A_i(t) + b\gamma Y_{im}(t) + g\gamma V_{im}(t) + \theta_{(i-1)} A_{(i-1)}(t) \\
&\quad - (\nu_3 + \theta_i + \omega + \mu_i) A_i(t), \\
Z_i(t+1) &= Z_i(t) + (1-b)\gamma Y_{im}(t) + (1-g)\gamma V_{im}(t) + \nu_3 A_i(t) \\
&\quad + \theta_{(i-1)} Z_{(i-1)}(t) - (\theta_i + \omega + \mu_i) Z_i(t).
\end{aligned}
\tag{6.2.23}
$$

对最后一个年龄组的模型为:

$$
\begin{aligned}
W_{NG}(t+1) &= W_{NG}(t) + \theta_{(NG-1)}(X_{(NG-1)}(t) + W_{(NG-1)}(t)) \\
&\quad - \mu_{NG} W_{NG}(t), \\
V_{NG}(t+1) &= V_{NG1}(t) + \theta_{(NG-1)}(Y_{(NG-1)1}(t) + V_{(NG-1)}(t)) \\
&\quad - (\gamma + \mu_{NG}) V_{NG1}(t), \\
V_{NGj}(t+1) &= V_{NGj}(t) + \theta_{(NG-1)}(Y_{(NG-1)j}(t) + V_{(NG-1)j}(t)) \\
&\quad + \gamma V_{NG(j-1)}(t)) - (\gamma + \mu_{NG}) V_{NGj}(t), \\
Z_{NG}(t+1) &= Z_{NG}(t) + \gamma V_{NGm}(t) + \theta_{(NG-1)}(A_{(NG-1)}(t) \\
&\quad + Z_{(NG-1)}(t)) - (\omega + \mu_{NG}) Z_{NGj}(t).
\end{aligned}
\tag{6.2.24}
$$

实际统计值　　　　模型预测值

图 6.3 1983 ~ 1993 年伦敦大都市及周围地区

在模型(6.2.22) ~ (6.2.24)中,可以根据HIV感染者体内CD4的水平或其它特征将HIV感染者分成了m个阶段.模型(6.2.22) ~ (6.2.24)很复杂,理论分析比较困难,可以通过计算机模拟来分析同性恋人口中HIV的传播情况.例如,在20世纪80年代和90年代初期,伦敦大都市及周围地区的AIDS主要是在同性恋人群中传播的.收集模型(6.2.22) ~ (6.2.24)中所需要的相关数据,估计模型中的参数,可以对该地区AIDS的传播情况进行预测和分析.图6.3中给出了1983 ~ 1993年该地区AIDS病的实际统计值的图形和用模型(6.2.22) ~ (6.2.24)预测的值.由图6.3看出,模型预测的结果是相当不错的[51].

§6.3　具有年龄结构的连续传染病模型

具有年龄结构的连续传染病模型研究已经有了大量的研究结果[55,56,57].与其它传染病模型的建模思想类似,也是把人口分为易感者、患者和免疫者等类型,给出这几类人口之间相互转化的关系.所不同的是每一类的人口都是用年龄密度分布函数来刻画的.我们记t时刻年龄为a的总人口的年龄密度分布函数为$p(a,t)$,即t时刻年龄在$[a_1,a_2]$区间内的人口数为$\int_{a_1}^{a_2} p(a,t)\mathrm{d}a$,总人口的年龄密度分布函数$p(a,t)$满足6.1节中的方程(6.1.10)或(6.1.15).我们在这一节中主要关心的是疾病的传播规律,所以我们总假设总人口的年龄密度分布函数达到了其稳定状态,即$p(a,t) = p_\infty(a)$.

将总人口分为易感者、患者和免疫者3类,分别记t时刻这3类人口的年龄密度分布函数为$s(a,t)$,$i(a,t)$和$r(a,t)$,则在任何时刻t,总有

$$s(a,t) + i(a,t) + r(a,t) = p_\infty(a). \tag{6.3.1}$$

在具有年龄结构的连续传染病建模中一个很重要的问题就是新病人产生的方式,这涉及到传染力函数的确定和是否有垂直传染.传染力函数的一个一般形式是

$$\lambda(a,t) = \int_0^A k(a,a',t)i(a',t)\mathrm{d}a',$$

其中$k(a,a',t)$描述t时刻年龄为a'的患者感染年龄为a的易感者的情况.根据$\lambda(a,t)$形式的不同、是否有垂直传染、是否有免疫接种可以把模型分成不同的类型进行研究.下面就介绍几个基本的模型、研究方法和结果.

6.3.1　疾病仅在同年龄组间进行传播的模型

假设一种疾病仅在同一年龄组之间感染和传播,取$k(a,a',t) = \delta(a -$

$a')k_0(a)$,其中 $\delta(x)$ 为 Dirac 函数,由此得到的传染力函数 $\lambda(a,t)$ 为

$$\lambda(a,t) = k_0(a)i(a,t). \tag{6.3.2}$$

再假设所研究的疾病没有免疫,此时 $r(a,t) \equiv 0$. 类似于常微分方程模型建立的方法,可以得到具有年龄结构的仅在同年龄组间传播的 SIS 传染病模型为

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial s(a,t)}{\partial a} + \frac{\partial s(a,t)}{\partial t} = -\mu(a)s(a,t) - \lambda(a,t)s(a,t) + \gamma(a)i(a,t),\\
&\frac{\partial i(a,t)}{\partial a} + \frac{\partial i(a,t)}{\partial a} = \lambda(a,t)s(a,t) - (\mu(a) + \gamma(a))i(a,t),\\
&s(0,t) = \int_0^A \beta(a)(s(a,t) + (1-q)i(a,t))\mathrm{d}a,\\
&i(0,t) = \int_0^A q\beta(a)i(a,t)\mathrm{d}a,\\
&s(a,0) = s_0(a), \qquad i(a,0) = i_0(a).
\end{aligned} \tag{6.3.3}$$

模型中的 $\mu(a)$ 和 $\beta(a)$ 分别是各类人口的年龄别死亡率和出生率,$\gamma(a)$ 是病人的恢复率,A 是人口的最大寿命,$0 \leqslant q \leqslant 1$ 是常数,$s_0(a)$ 和 $i_0(a)$ 分别是易感者和患者的初始年龄分布函数. 这些函数满足

(H1)　$\mu(a)$ 在 $[0,A)$ 连续,$\mu(a) > 0$, $\lim\limits_{a \to A^-} \int_0^a \mu(a)\mathrm{d}a = +\infty$. 定义 $\pi(a) = \exp\left(-\int_0^a \mu(\tau)\mathrm{d}\tau\right)$, $\pi(A) = 0$,则 $\pi(a)$ 是 $[0,A]$ 上的单调减连续函数,$\pi(0) = 1$, $\pi(A) = 0$.

(H2)　$\beta(a)$ 是非负连续函数,当 $a \in (A_1, A_2)$ 时,$\beta(a) > 0$, $a \leqslant A_1$ 或 $a \geqslant A_2$ 时,$\beta(a) = 0$,其中 $0 \leqslant A_1 < A_2 \leqslant A$,且 $\int_{A_1}^{A_2} \beta(a)\pi(a)\mathrm{d}a = 1$.

(H3)　$k_0(a)$ 和 $\gamma(a)$ 是 $[0,A]$ 的非负连续函数.

(H4)　$s_0(a)$ 和 $i_0(a)$ 是 $[0,A]$ 的非负连续函数满足 $s_0(a) + i_0(a) = p_\infty(a)$.

利用总人口数不变和(6.3.2) 中 $\lambda(a,t)$ 的表达式,将模型化为关于患者年龄分布密度函数 $i(a,t)$ 所满足的方程组

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial i(a,t)}{\partial a} + \frac{\partial i(a,t)}{\partial t} = [k_0(a)(p_\infty(a)\\
&\qquad\qquad - i(a,t)) - (\mu(a) + \gamma(a))]i(a,t),\\
&i(0,t) = q\int_0^A \beta(a)i(a,t)\mathrm{d}a,\\
&i(a,0) = i_0(a).
\end{aligned} \tag{6.3.4}$$

当假设(H1) ~ (H4) 成立时,(6.3.4) 的解在 $t \in [0, +\infty)$ 上存在惟一[56].

下面我们重点讨论(6.3.4)解的渐近性态. 利用特征线法可以求得(6.3.4)的解为

$$i(a,t)=\begin{cases} i_1(a,t), & a \geqslant t, \\ i_2(a,t), & a < t, \end{cases} \tag{6.3.5}$$

其中

$$i_1(a,t)=\frac{i_0(a-t)\exp\left(\int_0^t \alpha(a-t+\sigma)\mathrm{d}\sigma\right)}{1+i_0(a-t)\int_0^t k_0(a-t+\tau)\exp\left(\int_0^\tau \alpha(a-t+\sigma)\mathrm{d}a\right)\mathrm{d}\tau},$$

$$i_2(a,t)=\frac{i(0,t-a)\exp\left(\int_0^a \alpha(\sigma)\mathrm{d}\sigma\right)}{1+i(0,t-a)\int_0^a k_0(\tau)\exp\left(\int_0^\tau \alpha(\sigma)\mathrm{d}\sigma\right)\mathrm{d}\tau},$$

$$\alpha(\sigma)=-\mu(\sigma)-\gamma(\sigma)+k_0(\sigma)p_\infty(\sigma).$$

由(6.3.4)解的表达式(6.3.5)看出,当 $q=0$ 时 $i(0,t)=0$,即没有垂直传染时 $i(a,t)=0$,所以当 $t \geqslant A$ 时,必有 $i(a,t)=0$,即疾病肯定消失.

当有垂直传染时,我们令 $u(t)=i(0,t)$. 当 $t \geqslant 2A$ 时,$u(t)$ 满足的方程为

$$u(t)=q\int_0^A \frac{\beta(a)u(t-a)\exp\left(\int_0^a \alpha(\sigma)\mathrm{d}\sigma\right)}{1+u(t-a)\int_0^a k_0(\tau)\exp\left(\int_0^\tau \alpha(\sigma)\mathrm{d}\sigma\right)\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}a. \tag{6.3.6}$$

模型(6.3.3)平衡解的存在及稳定性与(6.3.6)平衡解的存在及惟一性等价. 定义

$$R_0=q\int_0^A \beta(a)\exp\left(\int_0^a \alpha(\sigma)\mathrm{d}\sigma\right)\mathrm{d}a.$$

令(6.3.6)中的 $u(t)$ 为常量,容易得出方程(6.3.6)当 $R_0<1$ 时只有平衡解 $u^0=0$,而当 $R_0>1$ 时,(6.3.6)还有一个惟一的正平衡解 $u^*>0$. 再将(6.3.6)的平衡解 u^0 或 u^* 代回到(6.3.3)中可以得到该模型的无病平衡解和地方病平衡解,其稳定性态如下.

定理 6.3.1[58] 当 $R_0<1$ 时,(6.3.3)只有无病平衡解,$s^0(a,t)=p_\infty(a)$,$i^0(a,t)=0$,它是全局渐近稳定的;当 $R_0>1$ 时,(6.3.3)的无病平衡解不稳定,它有地方病平衡解 $s^*(a,t)=p_\infty(a)-i^*(a)$,$i^*(a)=$

$$\frac{u^*\exp\left(\int_0^a \alpha(\sigma)\mathrm{d}\sigma\right)}{1+u^*\int_0^a k_0(\tau)\exp\left(\int_0^\tau \alpha(\sigma)\mathrm{d}\sigma\right)\mathrm{d}\tau}$$

,该地方病平衡解是全局渐近稳定的.

6.3.2 疾病在不同年龄组间传播的模型

接下来我们考虑疾病在各个年龄组之间的传播情况，此时我们假设没有垂直传染，$q=0$，且 $k(a,a')=k_1(a)k_2(a')$，即

$$\lambda(a,t)=k_1(a)\int_0^A k_2(a')i(a',t)\mathrm{d}a'. \tag{6.3.7}$$

我们要求 $k_1(a)$ 和 $k_2(a')$ 是$[0,A]$上的非负连续函数，利用总人口不变和由(6.3.7)给出的 $\lambda(a,t)$ 的表达式，可以得出在各个年龄组之间传播的SIS模型关于 $i(a,t)$ 的方程为

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial i(a,t)}{\partial a}+\frac{\partial i(a,t)}{\partial t}=-(\mu(a)+\gamma(a))i(a,t)\\
&\qquad\qquad+(p_\infty(a)-i(a,t))k_1(a)\int_0^A k_2(a')i(a',t)\mathrm{d}a',\\
&i(0,t)=0,\\
&i(a,0)=i_0(a).
\end{aligned} \tag{6.3.8}$$

再利用变换 $v(a,t)=i(a,t)/p_\infty(a)$，将(6.3.8)化为

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial v(a,t)}{\partial a}+\frac{\partial v(a,t)}{\partial t}=F(v(a,t)),\\
&v(0,t)=0,\\
&v(a,0)=i_0(a)/(p_\infty(a),\\
&F(v(a,t))=-\gamma(a)v(a,t)\\
&\qquad\qquad+(1-v(a,t))k_1(a)\int_0^A k_2(a')p_\infty(a')v(a',t)\mathrm{d}a'.
\end{aligned} \tag{6.3.9}$$

模型(6.3.9)解的惟一性、平衡解的存在性、渐近性态及数值方法在文献[59,60]中进行了全面的研究.所用的方法十分典型，是将模型(6.3.9)转化为一个算子半群[61]，再讨论其解的存在惟 一性及渐近性态.我们在此用类似的思想对这一具体系统进行讨论.

沿着(6.3.9)的特征线积分，可以得出 $v(a,t)$ 满足的积分方程为

$$v(a,t)=\begin{cases}v_0(a-t)+\displaystyle\int_0^t F(v(a-t+\tau,\tau))\mathrm{d}\tau, & a\geqslant t,\\ \displaystyle\int_0^a F(v(\tau,t-a+\tau))\mathrm{d}\tau, & a<t.\end{cases} \tag{6.3.10}$$

先建立(6.3.9)解的比较原理.记

$$K=\{f(a,t)\mid f(a,t)\text{ 连续},f(0,t)=0,0\leqslant f(a,t)\leqslant 1\},$$

$$\eta^*=1+\max_{0\leqslant a\leqslant A}\gamma(a)+\max_{0\leqslant a\leqslant A}k_1(a)\int_0^A k_2(a')p_\infty(a')\mathrm{d}a'.$$

则有下面的定理和比较原理.

定理 6.3.2[59]　有常数 $\eta, 0<\eta<1$,使得对任意 $v_1(a,t), v_2(a,t)\in K$, $v_1(a,t)\leqslant v_2(a,t)$ 必有

$$v_1(a,t)+\eta F(v_1(a,t))\leqslant v_2(a,t)+\eta F(v_2(a,t)),$$

且 $v_i(a,t)+\eta F(v_i(a,t))\in K, i=1,2.$

证明　取 $\eta=1/\eta^*$,则当 $v_1(a,t)\leqslant v_2(a,t)$ 时

$$\begin{aligned}
&v_1(a,t)+\eta F(v_1(a,t))\\
&=v_1(a,t)-\eta\gamma(a)v_1(a,t)\\
&\quad+\eta(1-v_1(a,t))k_1(a)\int_0^A k_2(a')p_\infty(a')v_1(a',t)\mathrm{d}a'\\
&\leqslant v_1(a,t)(1-\eta\gamma(a))\\
&\quad+\eta(1-v_1(a,t))k_1(a)\int_0^A k_2(a')p_\infty(a')v_2(a',t)\mathrm{d}a'\\
&=\eta k_1(a)\int_0^A k_2(a')p_\infty(a')v_2(a',t)\mathrm{d}a'\\
&\quad+v_1(a,t)\left(1-\eta\gamma(a)-\eta k_1(a)\int_0^A k_2(a')p_\infty(a')v_2(a',t)\mathrm{d}a'\right)\\
&\leqslant \eta k_1(a)\int_0^A k_2(a')p_\infty(a')v_2(a',t)\mathrm{d}a'\\
&\quad+v_2(a,t)\left(1-\eta\gamma(a)-\eta k_1(a)\int_0^A k_2(a')p_\infty(a')v_2(a',t)\mathrm{d}a'\right)\\
&=v_2(a,t)+F(v_2(a,t)).
\end{aligned}$$

取 $v_0(a,t)=0$,则 $v_0(a,t)+F(v_0(a,t))=0\in K$,取 $v_3(a,t)=1$,则 $v_3(a,t)+\eta F(v_3(a,t))=1-\eta\gamma(a)\leqslant 1$. 于是对任意 $v_1(a,t)$、$v_2(a,t)\in K$,必有 $0\leqslant v_i(a,t)+\eta F(v_i(a,t))\leqslant 1$,即 $v_i(a,t)+F(v_i(a,t))\in K, i=1,2.$ ∎

定理 6.3.3[59]　设 $v_1(a,t)$ 和 $v_2(a,t)$ 分别是方程组(6.3.9)满足条件 $v_1(a,0)=v_{10}(a)\leqslant v_2(a,0)=v_{20}(a)$ 的解,其中 $v_{10}(a), v_{20}(a)\in K$. 则必有(1) $v_i(a,t)\in K, i=1,2$;(2) $v_1(a,t)\leqslant v_2(a,t), t\geqslant 0$;(3) 当 $0<\xi<1$ 时(6.3.9)满足 $v(a,0)=\xi v_{10}(a)$ 的解 $v(a,t)$ 必满足 $\xi v_1(a,t)\leqslant v(a,t)$.

证明　(6.3.9)中的第一个方程等价于

$$\frac{\partial v(a,t)}{\partial a}+\frac{\partial v(a,t)}{\partial t}=-\frac{v(a,t)}{\eta}+\frac{1}{\eta}(v(a,t)+\eta F(v(a,t))).$$

故(6.3.9)解满足积分方程(6.3.10)等价于 $v(a,t)$ 满足下面的积分方程.

$$v(a,t)=\begin{cases}\exp\left(\frac{-t}{\eta}\right)v_0(a-t)+\frac{1}{\eta}\int_0^t\exp\left(\frac{\tau-t}{\eta}\right)\\ \quad\cdot(v(a-t+\tau,\tau)+\eta F(v(a-t+\tau,\tau)))\mathrm{d}\tau, & a\geqslant t,\\ \frac{1}{\eta}\int_0^a\exp\left(\frac{\tau-a}{\eta}\right)\\ \quad\cdot(v(\tau,t-a+\tau)+\eta F(v(\tau,t-a+\tau)))\mathrm{d}\tau, & a<t.\end{cases}\tag{6.3.11}$$

构造积分方程(6.3.11)解的迭代序列如下：

$$v^0(a,t)=v_0(a),$$

$$v^{(n+1)}(a,t)=\exp(-\frac{t}{\eta})v_0(a-t)+\frac{1}{\eta}\int_0^t\exp\left(\frac{\tau-t}{\eta}\right)$$
$$\cdot(v^{(n)}(a-t+\tau,\tau)+\eta F(v^{(n)}(a-t+\tau,\tau)))\mathrm{d}\tau,\ a\geqslant t,$$

$$v^{(n+1)}(a,t)=\frac{1}{\eta}\int_0^a\exp\left(\frac{\tau-a}{\eta}\right)(v^{(n)}(\tau,t-a+\tau)$$
$$+\eta F(v^{(n)}(\tau,t-a+\tau)))\mathrm{d}\tau,\qquad a<t.$$

当 $v^{(n)}(a,t)\in K$ 时，由定理(6.3.2)知

$$v^{(n)}(a,t)+\eta F(v^{(n)}(a,t))\in K.$$

当 $a\geqslant t$ 时，$v^{(n+1)}(a,t)\geqslant 0$，且

$$v^{(n+1)}(a,t)\leqslant\exp\left(-\frac{t}{\eta}\right)v_0(a-t)+\frac{1}{\eta}\int_0^t\exp\left(\frac{\tau-t}{\eta}\right)\mathrm{d}\tau$$
$$=\exp\left(-\frac{t}{\eta}\right)v_0(a,t)+1-\exp\left(-\frac{t}{\eta}\right)\leqslant 1,$$

当 $a<t$ 时，$v^{(n+1)}(a,t)\geqslant 0$，且

$$v^{(n+1)}(a,t)\leqslant 1-\exp\left(-\frac{a}{\eta}\right)\leqslant 1.$$

所以，当 $0\leqslant v_0(a)\leqslant 1$，必有 $v^{(n+1)}(a,t)\leqslant 1$，显然 $v^{(n+1)}(a,t)\geqslant 0$，故 $v^{(n+1)}(a,t)\in K$.

由于 $F(v)$ 的定义容易看出 $F(v)$ 关于变量 v 是Lipschitz连续的，利用类似于常微分方程解的存在惟一性证明过程中的方法可以得到函数序列 $v^{(n)}(a,t)$ 在 K 中一致收敛到积分方程(6.3.11)的解函数 $v(a,t)$，结论(1)得证. 利用定理6.3.2和 $v_{10}(a)\leqslant v_{20}(a)$ 可以得到，对任意自然数 n 有 $v_1^{(n)}(a,t)\leqslant v_2^{(n)}(a,t)$，对此不等式两边取极限即可得到 $v_1(a,t)\leqslant v_2(a,t)$. 结论(2)成立.

当 $0<\xi<1$ 时，由 $F(v(a,t))$ 的定义得

$$F(\xi v(a,t))$$
$$=-\gamma(a)\xi v(a,t)+(1-\xi v(a,t))k_1(a)\int_0^A k_2(a')p_\infty(a')\xi v(a',t)\mathrm{d}a'$$

$$= \xi F(v(a,t)) + (1-\xi)v(a,t)k_1(a)\int_0^A k_2(a')p_\infty(a)\xi v(a',t)\mathrm{d}a'$$

$$\geqslant \xi F(v(a,t)),$$

所以有 $\xi v(a,t) + \eta F(\xi v(a,t)) \geqslant \xi(v(a,t) + \eta F(v(a,t)))$,再利用迭代序列逐步比较可以得出对应的解满足 $\xi v_1(a,t) \leqslant v(a,t)$. 定理 3.3.3 证毕. ▌

接下来讨论(6.3.9)与时间无关的平衡解的存在性. 显然 $v(a,t) \equiv 0$ 是(6.3.9)的解,我们称它为无病平衡解,(6.3.9)的正平衡解 $v(a,t) = v(a)$ 称为地方病平衡解. 将 $v(a,t) = v(a)$ 代入(6.3.9)的第一个式子中得到 $v(a)$ 满足的方程为

$$\frac{\mathrm{d}v(a)}{\mathrm{d}t} = -\gamma(a)v(a) + (1-v(a))k_1(a)V,$$

其中 $V = \int_0^A k_2(a')p_\infty(a')v(a')\mathrm{d}a'$. 由(6.3.9)的第三式得 $v(0) = 0$. 对这个关于 $v(a)$ 的常微分方程求解得

$$v(a) = \int_0^a k_1(x)V\exp\left(-\int_x^a(\gamma(\tau) + k_1(\tau)V)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}x. \tag{6.3.12}$$

再将 $v(a)$ 代入 V 的表达式中得到 V 所满足的方程为

$$\int_0^A k_2(a')p_\infty(a')\int_0^{a'} k_1(x)V\exp\left(-\int_x^{a'}(\gamma(\tau) + k_1(\tau)V)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}a' = 1. \tag{6.3.13}$$

定义

$$R_2 = \int_0^A k_2(a')p_\infty(a')\int_0^{a'} k_1(x)\exp\left(-\int_x^{a'}(\gamma(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}a'.$$

R_2 就可以作为判断模型(6.3.9)地方病平衡解存在与否的阈值,也是无病平衡解和地方病平衡解稳定的阈值.

定理 6.3.4[59] 若 $R_2 < 1$,则(6.3.9)的无病平衡解是全局渐近稳定的;若 $R_2 > 1$,则(6.3.9)的无病平衡解是不稳定的,(6.3.9)有惟一的地方病平衡解,且它是全局渐近稳定的.

证明 由于我们所研究问题的背景,我们仅考虑(6.3.9)初值满足 $0 \leqslant v(a,0) \leqslant 1$ 的解的渐近性态,且要求 $v(a,0)$ 在$(0,A)$内大于零,定理6.3.4中的全局稳定性就是针对初始值满足这些条件的解给出的.

由前面的分析看出,(6.3.9)是否有正平衡解等价于(6.3.13)是否有正根. 由于(6.3.13)的左端关于 V 单调减,且当 V 趋于正无穷大时趋于零,故当 $R_2 < 1$ 时,(6.3.13)无正实根,当 $R_2 > 1$ 时,(6.3.13)有惟一的正实根. 即(6.3.9)当 $R_2 < 1$ 时无正平衡解,当 $R_2 > 1$ 时有惟一的正平衡解.

当 $R_2 < 1$ 时,为了研究(6.3.9)无病平衡解的全局稳定性,利用特征线法得

到(6.3.9)解的另一种表达式

$$\begin{aligned} v(a,t) &= v_0(a-t)\exp\left(-\int_0^t \sigma(a-t+\tau,\tau)\mathrm{d}\tau\right) \\ &\quad + \int_0^t k_1(a-t+\tau)\int_0^A k_2(a')p_\infty(a')v(a',\tau)\mathrm{d}a' \\ &\quad \cdot \exp\left(-\int_\tau^t \sigma(a-t+\theta,\theta)\mathrm{d}\theta\right)\mathrm{d}\tau, \qquad a \geqslant t, \qquad (6.3.14) \\ v(a,t) &= \int_0^a k_1(\tau)\int_0^A k_2(a')p_\infty(a')v(a',t-a+\tau)\mathrm{d}a' \\ &\quad \cdot \exp\left(-\int_\tau^a \sigma(\theta,t-a+\theta)\mathrm{d}\theta\right)\mathrm{d}\tau, \quad a < t, \end{aligned}$$

其中 $\sigma(x,y) = \gamma(x) + k_1(x)\int_0^A k_2(a')p_\infty(a')v(a',y)\mathrm{d}a'$. 记 $\omega(t) = \int_0^A k_2(a')p_\infty(a')v(a',t)\mathrm{d}a'$,则当 $t > A$ 时 $v(a,t)$ 的表达式就是(6.3.14)的后一部分,且它可以表示为

$$\begin{aligned} v(a,t) &= \int_0^a k_1(\tau)\omega(t-a+\tau) \\ &\quad \cdot \exp\left(-\int_\tau^a (\gamma(\theta) + k_1(\theta)\omega(t-a+\theta))\mathrm{d}\theta\right)\mathrm{d}\tau, \qquad a > t. \end{aligned} \tag{6.3.15}$$

当 $t > A$ 时,$\omega(t)$ 所满足的方程为

$$\begin{aligned} \omega(t) &= \int_0^A k_2(a')p_\infty(a')\int_0^{a'} k_1(\tau)\omega(t-a'+\tau) \\ &\quad \cdot \exp\left(-\int_\tau^{a'} (\gamma(\theta) + k_1(\theta)\omega(t-a'+\theta))\mathrm{d}\theta\right)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}a', \quad t > a. \end{aligned} \tag{6.3.16}$$

对自然数 $n > 1$,记 $\omega_n = \max\limits_{nA \leqslant t \leqslant (n+1)A} \omega(t)$, $L_n = \max\{\omega_{n-1},\omega_n\}$,则当 $R_2 < 1$ 时,由(6.3.16)得

$$\begin{aligned} \omega(t) &\leqslant \int_0^A k_2(a')p_\infty(a')\int_0^{a'} k_1(\tau)\omega(t-a'+\tau) \\ &\quad \cdot \exp\left(-\int_\tau^{a'} \gamma(\theta)\mathrm{d}\theta\right)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}a' \\ &\leqslant R_2 \max_{t-A \leqslant \tau \leqslant t} \omega(\tau). \end{aligned}$$

所以,当 $nA \leqslant t \leqslant (n+1)A$ 时,$\omega(t) \leqslant R_2 \max\limits_{(n-1)A \leqslant t \leqslant (n+1)A} \omega(t)$,于是得到 $\omega(t) \leqslant R_2 \max\{\omega_{n-1},\omega_n\}$. 又因为 $R_2 < 1$,故 $\omega_n < L_n = \omega_{n-1}$,即 $\omega_n < \omega_{n-1}$,ω_n 单调减,且 $\omega_n < R_2\omega_{n-1}$,由此递推得出 $\lim\limits_{n\to+\infty} \omega_n = 0$. 从 $t > A$ 时 $v(a,t)$ 的表达式

(6.3.15) 得到, $\lim_{t\to+\infty} v(a,t)=0$, 再从 $v(a,t)$ 的表达式(6.3.14) 得出模型(6.3.9) 的无病平衡解是稳定的,这样就证明了(6.3.9) 的无病平衡解当 $R_2<1$ 时是全局稳定的.

当 $R_2>1$ 时,(6.3.9) 的惟一地方病平衡解由(6.3.12) 给出. 对(6.3.9) 的任一满足当 $0\leqslant a<A$ 时 $v(a,0)>0$ 解 $v(a,t)$,由(6.3.14) 和 $\omega(t)$ 的表达式可以推出当 $0\leqslant t\leqslant A$ 时,$\omega(t)>0$,再由(6.3.15) 可以推出当 $0<a<A$ 时,$v(a,A)>0$. 重复这一过程可以推出当 $0\leqslant t\leqslant 3A$ 时,$\omega(t)>0$,记 $\omega^0=\min\limits_{A\leqslant t\leqslant 2A}\omega(t)$, $\omega^*=\max\limits_{A\leqslant t\leqslant 2A}\omega(t)$,于是有

$$v(a,2A)\geqslant\int_0^a k_1(\tau)\omega^0\exp\left(-\int_\tau^a(\gamma(\theta)+\omega^* k_1(\theta)\mathrm{d}\theta\right)\mathrm{d}\tau. \tag{6.3.17}$$

比较(6.3.17) 和(6.3.12) 的形式看出,可以找到正数 $0<\xi<1$,使得 $v(a,2A)\geqslant\xi v(a)$. 即对(6.3.9) 的这一个解 $v(a,t)$ 有

$$\xi v(a)\leqslant v(a,2A)\leqslant 1.$$

由定理 6.3.3 知,对(6.3.9)$t=0$ 时初值为 $\xi v(a)$ 和 1 的解 $v_\xi(a,t)$ 和 $v_1(a,t)$,必有

$$v_\xi(a,t)\leqslant v(a,t+2A)\leqslant v_1(a,t).$$

由 $v(a)$ 是(6.3.9) 的平衡解这一事实得 $\xi v(a)\leqslant v_\xi(a,t)$,即 $v_\xi(a,t)$ 是 t 的单调增函数. 又由于 $v_1(a,t)<1$,故 $v_1(a,t)$ 是 t 的单调减函数,故 $v_\xi(a,t)$ 和 $v_1(a,t)$ 对应的 $\omega_\xi(t)$ 和 $\omega_1(t)$ 分别单调增和单调减,故都有极限 $\lim\limits_{t\to+\infty}\omega_\xi(t)=\omega_\xi^0\leqslant\lim\limits_{t\to+\infty}\omega_1(t)=\omega_1^0$,从 $\omega(t)$ 所满足的方程(6.3.16) 看出,此方程当 $R_2>1$ 时仅有惟一的正常数解. 故 $\omega_\xi^0=\omega_1^0=\xi^*$. 由此可以得出与 $v(a,t)$ 对应的 $\omega(t)$ 也趋于这一极限, $\lim\limits_{t\to+\infty}\omega(t)=\xi^*$. 再利用 $t>A$ 时(6.3.9) 解的表达式(6.3.15) 可以得出 $\lim\limits_{t\to+\infty}v(a,t)=v(a)$,即(6.3.9) 地方病平衡解是全局吸引的. 地方病平衡解的局部稳定性是可以通过线性化方法得到的. 所以(6.3.9) 的地方病平衡解是全局渐近稳定的. 定理 6.3.4 证毕. ▌

当总人口数随时间变化或模型的参数随时间变化时带年龄结构的 SIS 模型的研究也已经有了不少结果[62,63].

6.3.3　具有接种的年龄结构传染病模型

接种免疫是控制疾病传播的一个重要手段,接种传染病模型的研究已经有了大量的结果,但大部分都是假设按比例进行接种[64],即各年龄组的易感者人口均按一定的比例接种,这对流感等一些疾病的防治是合适的,我们先讨论按比例接种的问题. 将总人口分为易感者、患者和免疫者三类,分别记各类人口的年

龄密度分布函数为 $s(a,t)$、$i(a,t)$ 和 $r(a,t)$，假设总人口的年龄密度分布函数达到了稳定状态，即

$$s(a,t)+i(a,t)+r(a,t)=p_\infty(a). \tag{6.3.18}$$

再假设各年龄组的易感者是按相同的比例进行接种而获得了免疫力. 一个按比例对各年龄组的易感进行接种的传染病模型为[65].

$$\begin{cases}\dfrac{\partial s}{\partial a}+\dfrac{\partial s}{\partial t}=-\mu(a)s-\lambda(t)s+\gamma i-ks+\theta r,\\ \dfrac{\partial i}{\partial a}+\dfrac{\partial i}{\partial t}=\lambda(t)s-(\mu(a)+\gamma)i,\\ \dfrac{\partial r}{\partial a}+\dfrac{\partial r}{\partial t}=ks-(\mu(a)+\theta)r,\\ s(0,t)=\displaystyle\int_0^A\beta(a)p_\infty(a)\mathrm{d}a,\quad i(0,t)=0,\quad r(0,t)=0,\\ s(a,0)=s_0(a),\quad i(a,0)=i_0(a),\quad r(a,0)=r_0(a),\\ \lambda(t)=\lambda\displaystyle\int_0^A i(a,t)\mathrm{d}a,\end{cases} \tag{6.3.19}$$

其中 k 是接种率，θ 是免疫力的丧失率，文献[65]中对模型(6.3.19)的平衡解的存在性、稳定性进行了详细的讨论，得到了地方病存在和惟一的条件以及无病平衡解和正平衡解稳定的充分条件.

按比例接种的模型在描述仅对一年龄区间上的易感者进行接种时存在一定的误差，我们需要对其进行改进. 假设在某时刻对年龄为 A_0 的易感者进行接种，而且此疾病不在年龄小于 A_0 的人口中传播，即在接种年龄 A_0 前没有患者. 于是可以得到易感者 $s(a,t)$、患者 $i(a,t)$ 和免疫者 $r(a,t)$ 所满足的关系为

$$\begin{cases}s(a,t)=p_\infty(a),\quad i(a,t)=0,\quad r(a,t)=0,\quad 0<a<A_0,\\ \dfrac{\partial s}{\partial a}+\dfrac{\partial s}{\partial t}=-\mu(a,t)s-\lambda(t)s+\gamma(a)i, & A_0<a<A,\\ \dfrac{\partial i}{\partial a}+\dfrac{\partial i}{\partial t}=\lambda(a,t)s-(\mu(a)+\gamma(a))i, & A_0<a<A,\\ \dfrac{\partial r}{\partial a}+\dfrac{\partial r}{\partial t}=-\mu(a)r, & A_0<a<A,\\ s(A_0,t)=(1-\beta)s(A_0^-,t),\\ i(A_0,t)=i(A_0^-,t)=0,\\ r(A_0,t)=\beta s(A_0^-,t),\\ s(a,0)=s_0(a),i(a,0)=i_0(a),r(a,0)=0,\\ \lambda(a,t)=k(a)\displaystyle\int_{A_0}^A i(a',t)\mathrm{d}a'.\end{cases} \tag{6.3.20}$$

在模型(6.3.20)中,我们仍然假设总人口的年龄密度分布函数达到了稳定值.即 $s(a,t)+i(a,t)+r(a,t)=p_\infty(a)$,模型(6.3.20)中所有参数、初值的要求同前,接种率 β 是一个常数,$0\leqslant\beta\leqslant 1$,$k(a)$ 是 $0\leqslant a\leqslant A$ 上定义的非负连续函数.

首先讨论模型(6.3.20)与时间 t 无关的平衡解的存在性.显然,模型(6.3.20)有无病平衡解

$$\begin{aligned}&s(a,t)=p_\infty(a),\ i(a,t)=0,\ r(a,t)=0,\qquad 0<a<A_0,\\&s(a,t)=(1-\beta)p_\infty(a),\ i(a,t)=0,\ r(a,t)\\&\quad=\beta p_\infty(a),A_0<a<A.\end{aligned}\tag{6.3.21}$$

为了得到地方病平衡解,将 $s(a,t)=s(a)$,$i(a,t)=i(a)$ 和 $r(a,t)=r(a)$ 代入(6.3.20)中,从 $r(a,t)$ 所满足的方程解出:

$$\begin{aligned}&r(a)=0,\qquad\qquad 0<a<A_0,\\&r(a)=\beta p_\infty(a),\qquad A_0<a<A.\end{aligned}\tag{6.3.22}$$

将(6.3.22)及总人口的年龄分布函数满足有关系(6.3.18)代入(6.3.20)中关于 $i(a,t)$ 所满足的方程得 $i(a)$ 所满足的方程为

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}i(a)}{\mathrm{d}a}=-(\mu(a)+\gamma(a))i(a)+k(a)(p_\infty(a)-i(a)-r(a))V,\\&V=\int_{A_0}^{A}i(a)\mathrm{d}a,\qquad A_0<a<A.\end{aligned}\tag{6.3.23}$$

对(6.3.23)求解得当 $A_0<a<A$ 时 $i(a)$ 的表达式为

$$\begin{aligned}i(a)=&V\int_{A_0}^{a}k(\tau)p_\infty(\tau)(1-\beta)\\&\cdot\exp\left(-\int_\tau^a(\mu(\theta)+\gamma(\theta)+k(\theta)V)\mathrm{d}\theta\right)\mathrm{d}\tau.\end{aligned}\tag{6.3.24}$$

再将(6.3.24)代入(6.3.23)中 V 的表达式得 V 所满足的方程为

$$(1-\beta)\int_{A_0}^{A}\int_{A_0}^{a}k(\tau)p_\infty(\tau)\exp\left(-\int_\tau^a(\mu(\theta)+\gamma(\theta)+k(\theta)V)\mathrm{d}\theta\right)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}a=1.\tag{6.3.25}$$

显然看出,(6.3.25)的左端关于 V 是单调减函数,定义

$$R_3=(1-\beta)\int_{A_0}^{A}\int_{A_0}^{a}k(\tau)p_\infty(\tau)\exp\left(-\int_\tau^a(\mu(\theta)+\gamma(\theta))\mathrm{d}\theta\right)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}a.$$

R_3 就可以作为地方病存在与否的阈值,它也是疾病消失的阈值.类似于定理 6.3.4 的方法,可以得到下面的结论.

定理 6.3.5[66]　当 $R_3<1$ 时模型(6.3.20)仅有无病平衡解,它是全局渐近稳定的,而当 $R_3>1$ 时,(6.3.20)还有地方病平衡解,且无病平衡解是不稳定

的,地方病平衡解是全局渐近稳定的.

当然,还可以考虑在接种前就有被感染的患者的情况[67],也可以考虑多次接种,即在几个年龄点上对易感者进行接种的情况[68],也可以讨论接种的最优策略等[69].

6.3.4 一个考虑从母体获得短暂免疫力的麻疹病接种模型

在这一节的最后,我们讨论一个具有年龄结构的麻疹病的接种模型.该病的患者治愈后可以获得永久性免疫力,婴儿也可以从母体获得一个短期的免疫力.现在不同的国家或地区对麻疹病的接种方式有所不同,一般是进行两次接种,在1岁左右进行第一次接种,而第二次接种有些国家在1.5～5岁间进行,有些国家在10～16岁之间进行第二次接种.每次接种都有一些比例的人接种不成功,且接种成功的人也会逐渐丧失免疫力可能被感染.

根据麻疹病传播和接种免疫的关系,我们将总人口分为6类,由母体获得短期免疫力的婴儿类 M,由母体获得的免疫力丧失后的 S_0 类,被感染得病的患者类 I,患者经治疗恢复而获得的永久免疫力类 R,以及接种不成功的或者接种后免疫力丧失的 S_1 类.在 M、R 和 V 类中的人口因为具有免疫力而不会被感染,在 S_0 和 S_1 内中的人口才会被感染得病.这6类人口之间相互转换的关系如图6.4所示.

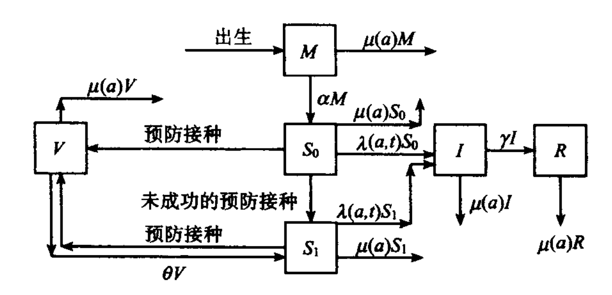


图6.4 6类人员之间的关系示意图

记这6类人员的年龄密度函数分别为 $m(a,t)$、$s_0(a,t)$、$s_1(a,t)$、$i(a,t)$、$v(a,t)$ 和 $r(a,t)$,根据图6.4可以建立这6类人的密度函数所满足的数学模型,

$$\frac{\partial m(a,t)}{\partial a}+\frac{\partial m(a,t)}{\partial t}=-(\alpha+\mu(a))m(a,t),$$

$$\frac{\partial s_0(a,t)}{\partial a}+\frac{\partial s_0(a,t)}{\partial t}=\alpha m(a,t)-(\lambda(a,t)+\mu(a))s_0(a,t),$$

$$\frac{\partial s_1(a,t)}{\partial a}+\frac{\partial s_1(a,t)}{\partial t}=\theta v(a,t)-(\lambda(a,t)+\mu(a))s_1(a,t), \tag{6.3.26}$$

$$\frac{\partial i(a,t)}{\partial a}+\frac{\partial i(a,t)}{\partial t}=\lambda(a,t)(s_0(a,t)+s_1(a,t))-(\gamma+\mu(a))i(a,t),$$
$$\frac{\partial r(a,t)}{\partial a}+\frac{\partial r(a,t)}{\partial t}=\gamma i(a,t)-\mu(a)r(a,t),$$
$$\frac{\partial v(a,t)}{\partial a}+\frac{\partial v(a,t)}{\partial t}=-(\theta+\mu(a))v(a,t),$$

其中 α、$\mu(a)$、γ 和 θ 分别是母体获得的免疫力的丧失率、死亡率、患者的恢复率和接种免疫的丧失率. $\lambda(a,t)$ 是传染力函数,

$$\lambda(a,t)=\int_0^A k(a,a')i(a',t)\mathrm{d}a',$$

其中 $k(a,a')$ 是年龄为 a' 的患者对年龄为 a 的易感者的感染率.

模型(6.3.26)是在非接种年龄区间内 6 类人口的年龄密度分布函数所满足的方程组,在接种的年龄点上,易感者和患者及涉及到人口的年龄密度分布函数应该有些突变,即需要一组在接种年龄点上的跳跃性条件. 设在年龄 $a=A_1$ 和 $a=A_2$ 处接种的比例分别为 c_1 和 c_2,不成功的接种所占的比例为 f,则在接种年龄点的跳跃性条件为

$$\begin{aligned}
&s_0(A_1,t)=(1-c_1)s_0(A_1^-,t),\\
&s_1(A_1,t)=s_1(A_1^-,t)+c_1fs_0(A_1^-,t),\\
&v(A_1,t)=(1-f)c_1s_1(A_1^-,t),\\
&s_0(A_2,t)=(1-c_2)s_0(A_2^-,t),\\
&s_1(A_2,t)=(1-c_2(1-f))s_1(A_2^-,t)+c_2fs_0(A_2^-,t),\\
&v(A_2,t)=v(A_2^-,t)+(1-f)c_2(s_0(A_2^-,t)+s_1(A_2^-,t)).
\end{aligned}\tag{6.3.27}$$

由(6.3.26)和(6.3.27)组成的模型理论分析相当困难,我们可以借助于数值模拟来探讨接种的最优策略,我们的重点是讨论第二次接种的最优年龄点,选取一些参数对此问题进行模拟判断. 考虑一个有 100 万人口的社区,并假设总人口达到了稳定状态,人口的寿命为 75 岁,取

$$\mu(a)=0,\quad a<75,\qquad \mu(a)=+\infty,\qquad a\geqslant 75.$$

初始人口分布为

$$m(0,t)=10^6/75,\ s_0(0,t)=s_1(0,t)=i(0,t)=r(0,t)=v(0,t)=0.$$

由于麻疹的平均患病期为 1 周,我们取 $\gamma=1/52$,婴儿从母体获得的免疫力大约为 3 个月,取 $\alpha=1/4$. 根据文献[70] 中给出的一些分析和统计数据,取 $f=0.03$, $\theta=0.005$. 将人口分为 0 ~ 5, 5 ~ 9, 10 ~ 14, 15 ~ 19, 20 ~ 75 几个年龄段,在这 5 个年龄段上的传染力函数 $\lambda(a,t)$ 分别为

$$\lambda_1=0.184,\ \lambda_2=0.579,\ \lambda_3=0.202,\ \lambda_4=0.100,\ \lambda_5=0.100.$$

假设第一次接种是在 1 岁时进行,第二次接种是在年龄 A_2 进行,这几类人

口已经达到了各自的平衡状态,其平衡状态所满足的常微分方程组为

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}m(a)}{\mathrm{d}a} = -\alpha m(a), \\
&\frac{\mathrm{d}s_0(a)}{\mathrm{d}a} = \alpha m(a) - \lambda(a)s_0(a), \\
&\frac{\mathrm{d}s_1(a)}{\mathrm{d}a} = \theta v(a) - \lambda(a)s_1(a), \\
&\frac{\mathrm{d}i(a)}{\mathrm{d}a} = \lambda(a)(s_0(a) + s_1(a)) - \gamma i(a), \\
&\frac{\mathrm{d}r(a)}{\mathrm{d}a} = \gamma i(a), \\
&\frac{\mathrm{d}v(a)}{\mathrm{d}a} = -\theta v(a), \\
&s_0(1) = (1 - c_1)s_0(1^-), \\
&s_1(1) = s_1(1^-) + c_1 f s_0(1^-), \\
&v(1) = (1 - f)c_1 s_0(1^-), \\
&s_0(A_2) = (1 - c_2)s_0(A_2^-), \\
&s_1(A_2) = (1 - c_2(1 - f))s_1(A_2^-) + c_2 f s_0(A_2^-), \\
&v(A_2) = v(A_2^-) + (1 - f)c_2(s_0(A_2^-) + s_1(A_2^-)).
\end{aligned}
\tag{6.3.28}
$$

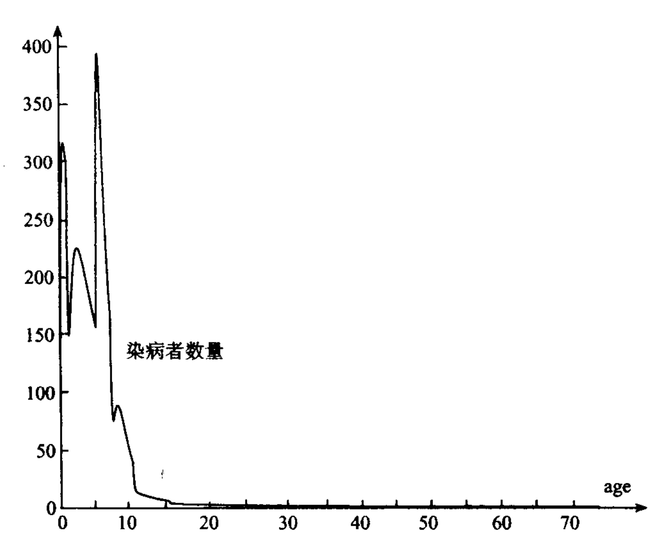


图 6.5　$A_2 = 7$ 时各年龄组麻疹病人的密度分布函数

将前面的参数和初始值代入(6.3.28)中,根据传染力函数 $\lambda(a,t)$ 随年龄区间的不同将[0,75]区间化为5个区间,再取第一次的接种年龄为 $a=1$ 岁,第二次的接种年龄分别为 $A_2=2,3,\cdots,20$,两次接种的接种率都是0.8.利用计算机求得(6.3.28)的数值解,并根据 $\int_0^{75} i(a)\mathrm{d}a$ 的大小就可确定最佳的接种年龄.例如,文献[70]中给出的最佳接种年龄为5.当 $A_2=7$ 时各年龄组麻疹患者的密度分布函数如图6.5所示.

§6.4 具有年龄和病程结构的传染病模型

具有年龄结构的传染病模型比无年龄结构的传染病模型更加实际,它们在研究与年龄区间有关的疾病的传播中起到了非常重要的作用[71,72],但随着人们对研究的深入,特别是对病期长且在不同的患病期间有不同的传染力和治愈率的疾病传播规律的描述与研究中,很自然在需要将患者按不同的病程进行分类,这就需要建立有年龄和病程结构的传染病模型.这一方面的模型与研究工作相对较少,Hoppensteedt于1974年提出了一个具有年龄和病程结构的传染病模型[73],Dietz和Schenzle对一个具有年龄和病程结构的传染病模型给出了再生数的计算公式[74],Hyman等人在研究HIV/AIDS病传播时也建立了具有病程结构的模型,并分析了疾病传播的阈值.这一节我们建立和研究具有年龄结构的传染病模型的性态.

6.4.1 模型的建立及解的存在惟一性

仍然假设总人口已经达到了稳定的年龄分布,$p(a,t)=p_\infty(a)$,记时间为 t、年龄为 a、病程为 c,$s(t,a)$ 是 t 时刻某地区易感者的年龄密度分布函数,$i(a,c,t)$ 为 t 时刻年龄为 a、病程为 c 的患者的年龄病程密度分布函数,即 t 时刻该地区年龄在 $[a_1,a_2]$ 区间的易感者人数为 $\int_{a_1}^{a_2} s(a,t)\mathrm{d}a$,$t$ 时刻年龄在 $[a_1,a_2]$、病程在 $[c_1,c_2]$ 区间内患者人数为 $\int_{a_1}^{a_2}\int_{c_1}^{c_2} i(a,c,t)\mathrm{d}c\mathrm{d}a$,$t$ 时刻该地区的易感者总数为 $S(t)=\int_0^A s(a,t)\mathrm{d}a$,患者总数为 $I(t)=\int_0^A\int_0^A i(a,c,t)\mathrm{d}c\mathrm{d}a$.假设所讨论的疾病没有垂直传染,则一个病人的病程必然小于他的生理年龄,即当 $c\geqslant a$ 时,$i(a,c,t)=0$.类似于具有年龄结构的SIS模型,具有年龄和病程的SIS

传染病模型为

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial s}{\partial a}+\frac{\partial s}{\partial t}=-\mu(a)s-g(a,t)s+f(a,t),\\
&\frac{\partial i}{\partial a}+\frac{\partial i}{\partial c}+\frac{\partial i}{\partial t}=-\mu(a)i-\gamma(a)i,\\
&s(0,t)=\int_{A_1}^{A_2}\beta(a)p_\infty(a)\mathrm{d}a,\\
&i(a,0,t)=s(a,t)g(a,t),\\
&s(a,0)=s_0(a),\qquad s(A,t)=0,\\
&i(a,c,0)=i_0(a,c),\qquad i(A,c,t)=0,\\
&i(a,a,t)=0,
\end{aligned}
\tag{6.4.1}
$$

其中 $\mu(a)$ 是人口的死亡率,满足 §6.1 的条件 A_1, $\beta(a)$ 是人口的生育率,满足 §6.1 的条件 A_3, $f(a,t)$ 是患者的治愈率, $g(a,t)$ 是传染力函数,

$$
f(a,t)=\int_0^A\gamma(a)i(a,c,t)\mathrm{d}c,
$$

$$
g(a,t)=\int_0^A\int_0^a\lambda(a,a',c)i(a',c,t)\mathrm{d}c\mathrm{d}a,
$$

$\gamma(a)$ 是年龄为 a、病程为 c 的病人的治愈率, $\gamma(a)$ 是非负连续函数, $\lambda(a,a',c)$ 是年龄为 a' 病程为 c 的患者对年龄为 a 的易感者的感染率, $\lambda(a,a',c)$ 也是非负连续函数.由总人口达到稳定年龄分布的条件得

$$
s(a,t)+\int_0^a i(a,c,t)\mathrm{d}c=p_\infty(a).\tag{6.4.2}
$$

在上面提到的条件成立时,利用特征线法求得(6.4.1) 的解为

$$
i(a,c,t)=\begin{cases} i_0(a-t,c-t)N(a)/N(a-t), & t\leqslant c,\\ G(a-c,t-c)N(a)/N(a-c), & t>c,\end{cases}\tag{6.4.3}
$$

其中 $N(a)=\exp\left(-\int_0^a(\mu(\tau)+\gamma(\tau)\mathrm{d}\tau\right)$,

$$
G(a,t)=\left(p_\infty(a)-\int_0^a i(a,c,t)\mathrm{d}c\right)\int_0^A\int_0^{a'}\lambda(a,a',c)i(a',c,t)\mathrm{d}c\mathrm{d}a'.
$$

再利用(6.4.3) 中的 $i(a,c,t)$ 代入 $G(a,t)$ 的表达式中得到 $G(a,t)$ 满足的方程为

$$
G(a,t)=\begin{cases}
\left[p_\infty(a)-\int_0^t G(a-c,t-c)\frac{N(a)}{N(a-c)}\mathrm{d}c-\int_t^a i_0(a-t,c-t)\frac{N(a)}{N(a-t)}\mathrm{d}c\right] \\
\quad\cdot\left[\int_0^t\int_0^{a'}\lambda(a,a',c)G(a'-c,t-c)\frac{N(a')}{N(a'-c)}\mathrm{d}c\mathrm{d}a'\right. \\
\quad+\int_t^A\int_0^t\lambda(a,a',c)G(a'-c,t-c)\frac{N(a')}{N(a'-c)}\mathrm{d}c\mathrm{d}a' \\
\quad\left.+\int_t^A\int_t^{a'}\lambda(a,a',c)i_0(a'-t,c-t)\frac{N(a')}{N(a'-t)}\mathrm{d}c\mathrm{d}a'\right], \qquad t\leqslant a, \\
\left[p_\infty(a)-\int_0^a G(a-c,t-c)\frac{N(a)}{N(a-c)}\mathrm{d}c\right] \\
\quad\cdot\left[\int_0^t\int_0^{a'}\lambda(a,a',c)G(a'-t,c-t)\frac{N(a')}{N(a'-c)}\mathrm{d}c\mathrm{d}a'\right. \\
\quad+\int_t^A\int_0^t\lambda(a,a',c)G(a'-c,t-c)\frac{N(a')}{N(a'-c)}\mathrm{d}c\mathrm{d}a' \\
\quad\left.+\int_t^A\int_t^{a'}\lambda(a,a',c)i_0(a'-c,t-c)\frac{N(a')}{N(a'-t)}\mathrm{d}c\mathrm{d}a'\right], \qquad c<t\leqslant A, \\
\left[p_\infty(a)-\int_0^a G(a-c,t-c)\frac{N(a)}{N(a-c)}\mathrm{d}c\right] \\
\quad\cdot\int_0^A\int_0^{a'}\lambda(a,a',c)G(a'-c,t-c)\frac{N(a')}{N(a'-c)}\mathrm{d}c\mathrm{d}a, \qquad t>A.
\end{cases}
\tag{6.4.4}
$$

对 $G(a,t)$ 所满足的积分方程(6.4.4),在 $i(a,c,t)$ 的初始值 $i_0(a,c)$ 非负连续且满足连续性条件

$$
\left(p_\infty(a)-\int_0^a i_0(a,c)\mathrm{d}c\right)\int_t^A\int_0^{a'}\lambda(a,a',c)i_0(a',c)\mathrm{d}c\mathrm{d}a'=i_0(a,0)
\tag{6.4.5}
$$

时,利用压缩映象原理可以证明模型(6.4.1) 的解在 $t\geqslant 0$ 存在惟一.

6.4.2 模型解的渐近性态

对具有年龄和病程结构的 SIS 模型的研究有很大的难度,我们对传染率函数 $\lambda(a,a',c)$ 的一些特殊情况给出理论分析结果. 假设传染率是易感者年龄的函数与患者年龄函数之积, 即 $\lambda(a,a',c)=\lambda_1(a)\lambda_2(a')$, 其中 $\lambda_1(a)$ 和 $\lambda_2(a')$ 是非负连续函数,且当 $a,a'\in(0,A)$ 时,$\lambda_1(a)>0,\lambda_2(a')>0$,此时,对病程 c 进行积分,引入函数 $j(a,t)=\int_0^a i(a,c,t)\mathrm{d}c, j_0(a)=\int_0^a i_0(a,c)\mathrm{d}c$,则 $j(a,t)$ 满足的方程为

$$
\frac{\partial j}{\partial a}+\frac{\partial j}{\partial t}=-(\mu(a)+\gamma(a))j+(p_\infty(a)-j(a,t))
$$
$$
\cdot\lambda_1(a)\int_0^A\lambda_2(a')j(a',t)\mathrm{d}a',
$$

$$j(0,t) = 0, \tag{6.4.6}$$
$$j(a,0) = j_0(a).$$

函数 $j(a,t)$ 是 t 时刻年龄为 a 的各个病程的患者的人数的年龄密度分布函数，所以，当 $j(a,t)$ 趋于某一稳定分布时，我们就可以了解各年龄组患者的情况. 我们就讨论模型(6.4.6)解的性态，再引入比率函数 $u(a,t) = j(a,t)/p_\infty(a)$, $u_0(a) = j_0(a)/p_\infty(a)$，模型(6.4.6)就可以化为

$$\frac{\partial u}{\partial a} + \frac{\partial u}{\partial t} = -\gamma(a)u + (1-u)\lambda_1(a)\int_0^A \lambda_2(a')p_\infty(a')u(a',t)\mathrm{d}a',$$
$$u(0,t) = 0, \tag{6.4.7}$$
$$u(a,0) = u_0(a).$$

与前一节中对模型(6.3.9)的研究类似，我们求出(6.4.7)解的积分表达式，再建立其解的比较原理，定义其再生数

$$R_1 = \int_0^A \lambda_2(a)p_\infty(a)\int_0^a \lambda_1(\tau)\exp\left(-\int_\tau^a \gamma(\theta)\mathrm{d}\theta\right)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}a.$$

类似于前一节中对具有年龄结构的 SIS 模型的研究，可以得到下面的结论[75].

定理6.4.1[75] 若 $R_1 < 1$，则模型(6.4.6)没有地方病平衡解，它的无病平衡解是全局渐近稳定的；而当 $R_1 > 1$ 时模型(6.4.6)的无病平衡解是不稳定的，此时(6.4.6)有惟一的地方病平衡解，且它是全局渐近稳定的.

接下来考虑 $\lambda(a,a',c) = \lambda(a',c)$ 的情况，这时利用模型(6.4.1)解的表达式(6.4.3)，再交换重积分中的积分限后可以得到 $t > A$ 时 $G(a,t)$ 的积分方程为

$$G(a,t) = \left(p_\infty(a) - \int_0^a G(\tau,t-a+\tau)\frac{N(a)}{N(\tau)}\mathrm{d}\tau\right)$$
$$\cdot \int_0^A\int_c^A \lambda(a',c)G(a'-c,t-c)\frac{N(a')}{N(a'-c)}\mathrm{d}a'\mathrm{d}c. \tag{6.4.8}$$

为了求得(6.4.1)的平衡解，我们只需要讨论(6.4.8)的平衡解即可. (6.4.8)与时间无关的平衡解 $G_\infty(a)$ 满足方程

$$G_\infty(a) = \left(p_\infty(a) - \int_0^a G_\infty(\tau)\frac{N(a)}{N(\tau)}\mathrm{d}\tau\right)G_\infty^*,$$

其中 $G_\infty^* = \int_0^A\int_c^A \lambda(a'-c)G_\infty(a',c)\frac{N(a')}{N(a'-c)}\mathrm{d}a'\mathrm{d}c.$

对上式两边关于 a 求导，再利用 $p_\infty(a) = p_\infty(0)\exp\left(-\int_0^a \mu(\tau)\mathrm{d}\tau\right)$ 和 $N(a)$ 的定义即可得到 $G_\infty(a)$ 满足的常微分方程为

$$G_\infty'(a) = G_\infty^*(-1-\mu(a)-\gamma(a))G_\infty(a) + G_\infty^*\gamma(a)p_\infty(a).$$

求解此常微分方程得

$$G_\infty(a) = G_\infty^* N(a)\exp(-G_\infty^* a)$$

$$\cdot\left(p_\infty(0)+\int_0^a\frac{\gamma(\tau)p_\infty(\tau)\exp(G_\infty^*\tau)}{N\tau}\mathrm{d}\tau\right).\qquad(6.4.9)$$

将(6.4.9) 再代入到 G_∞^* 的表达式得 G_∞^* 所满足的方程为

$$\int_0^A\int_c^A\lambda(a',c)\exp(-G_\infty^*(a'-c))N(a'-c)$$

$$\cdot\left(p_\infty(0)+\int_0^{a'-c}\frac{\gamma(\tau)p_\infty(\tau)\exp(G_\infty^*\tau)}{N(\tau)}\right)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}a'\mathrm{d}c=1.\qquad(6.4.10)$$

(6.4.10) 的左端是 G_∞^* 的单调减函数,且当 G_∞^* 趋于正无穷大时,左端趋于零.于是,(6.4.10) 关于 G_∞^* 有无正解就完全由 $G_\infty^*=0$ 时左端的值确定.由于

$$\int_0^{a-c}\frac{\gamma(\tau)p_\infty(\tau)}{N(\tau)}\mathrm{d}\tau=p_\infty(0)\int_0^{a-c}\gamma(\tau)\exp\left(\int_0^\tau\gamma(\theta)\mathrm{d}\theta\right)\mathrm{d}\tau$$

$$=p_\infty(0)\left(\exp\left(\int_0^{a-c}\gamma(\tau)\gamma(\theta)\mathrm{d}\theta\right)-1\right).$$

利用上式和 $N(a)$ 的表达式 $N(a)=\exp\left(-\int_0^a(\mu(\tau)+\gamma(\tau))\mathrm{d}\tau\right)$, 定义(6.4.1) 当 $\lambda(a,a',c)=\lambda(a',c)$ 时再生数为

$$R_2=\int_0^A\int_c^A\lambda(a,c)p_\infty(a-c)\frac{N(a)}{N(a-c)}\mathrm{d}a\mathrm{d}c.$$

它就是 $G_\infty^*=0$ 时(6.4.10) 的值.于是,当 $R_2>1$ 时(6.4.10) 就有惟一的正解,而当 $R_2\leqslant 1$ 时,(6.4.10) 关于 G_∞^* 无正解.

对(6.4.10) 的任意一个正解,我们可以代入到(6.4.9) 中得到一个函数 $G_\infty(a)$,它就是积分方程(6.4.7) 的平衡解.再将(6.4.7) 的这个平衡解再代入到(6.4.1) 解的表达式中我们就得到了模型(6.4.1) 的正平衡解,其中当 $t=0$ 时,该正平衡解的定义为

$$i_0(a,c)=G_\infty(a-c)N(a)/N(a-c).$$

于是,我们就可以得到下面的定理.

定理 6.4.2[75]　设 $\lambda(a,a',c)=\lambda(a',c)$,则当 $R_2<1$ 时模型(6.4.1) 的无病平衡解是全局渐近稳定的,而当 $R_2>1$ 时,(6.4.1) 的无病平衡解是不稳定的,它有惟一的地方病平衡解.

证明　模型(6.4.1) 平衡解的存在性与积分方程(6.4.7) 平衡解的存在性等价,进而又与方程(6.4.10) 正解的存在性等价,前面的分析已经证明了平衡解的存在性的结果.下面证明无病平衡解的全局稳定性.

由(6.4.1) 解的表达式(6.4.3) 看出,其解的性态完全由积分方程(6.4.4) 的解 $G(a,t)$ 确定.当 $0\leqslant t\leqslant A$ 时,由解对初始值的连续性得知,当初值充分小时,即可保证解充分小.当 $t>A$ 时,$G(a,t)$ 满足的方程为(6.4.8).由于(6.4.8) 中的第一个积分满足

$$\int_0^a G(\tau, t-a-\tau)\frac{N(a)}{N(\tau)}\mathrm{d}\tau = \int_0^a i(a,c,t)\mathrm{d}c \leqslant p_\infty(a),$$

故由(6.4.8)可以得到 $G(a,t)\geqslant 0$,且

$$G(a,t)\leqslant p_\infty(a)\int_0^A\int_c^A \lambda(a',c)G(a'-c,t-c)\frac{N(a')}{N(a'-c)}\mathrm{d}a'\mathrm{d}c. \tag{6.4.11}$$

令 $\omega(t)=\int_0^A\int_c^A \lambda(a',c)G(a'-c,t-c)\frac{N(a')}{N(a'-c)}\mathrm{d}a'\mathrm{d}c$,则由(6.4.11)得

$$\omega(t)\leqslant\int_0^A\int_c^A \lambda(a',c)p_\infty(a'-c)\omega(t-c)\frac{N(a')}{N(a'-c)}\mathrm{d}a'\mathrm{d}c.$$

于是,当 $R_2<1$ 时可以得到

$$\omega(t)\leqslant R_2\max_{t-A\leqslant\tau\leqslant t}\omega(\tau). \tag{6.4.12}$$

利用与前一节中类似的方法,可以得到 $\omega(t)$ 在 $[nA,(n+1)A]$ 中的最大值是单调递减趋于零的,故(6.4.1)的无病平衡解是全局渐近稳定的.

当 $R_2>1$ 时,记 $\lambda^*=\max\limits_{0\leqslant c\leqslant a\leqslant A}\lambda(a,c)$.若(6.4.1)的无病平衡解是稳定的,则对给定的正数 $\varepsilon=(R_2-1)/2A^3\lambda^*$,有 $\delta>0$,使得当 $0<i_0(a,c)<\delta$ 时,对一切 $t\geqslant 0$ 有

$$0\leqslant i(a,c,t)<\varepsilon. \tag{6.4.13}$$

由(6.4.13)和 $\omega(t)$ 的定义得到,当 $t\geqslant A$ 时有

$$\begin{aligned}\omega(t) &= \int_0^A\int_0^a \lambda(a,c)\left(p_\infty(a-c)-\int_0^{a-c} i(a-c,\tau,t-c)\mathrm{d}\tau\right)\\ &\quad\cdot\omega(t-c)\frac{N(a)}{N(a-c)}\mathrm{d}c\mathrm{d}a\\ &\geqslant (R_2-A^3\lambda^*\varepsilon)\min_{t-A<\tau\leqslant t}\omega(\tau)\\ &= \frac{R_2+1}{2}\min_{t-A<\tau\leqslant t}\omega(\tau).\end{aligned}$$

由这一不等式递推可以得出

$$\omega(t)\geqslant\left(\frac{R_2+1}{2}\right)^n\min_{0\leqslant\tau\leqslant A}\omega(\tau),\qquad nA\leqslant t\leqslant(n+1)^A.$$

这与(6.4.13)相矛盾. ▌

对一般的 $\lambda(a,a',c)$,我们也可以对模型(6.4.1)定义

$$R_3=\max_{0\leqslant a\leqslant A}\int_0^A\int_c^A \lambda(a,a',c)p_\infty(a'-c)\frac{N(a')}{N(a'-c)}\mathrm{d}a'\mathrm{d}c,$$

得到当 $R_3<1$ 时无病平衡解的全局稳定性.

当考虑季节变化对疾病传播的影响时,我们假设接触率是 t 的周期函数,选取 $\lambda=\lambda_1(a)\lambda_2(a')(1+\varepsilon\varphi(t))$,$\varphi(t)$ 满足

$$\varphi(t+T)=\varphi(t),\qquad \int_0^T \varphi(t)\mathrm{d}t=0,\quad 1+\varepsilon\varphi(t)>0,\qquad (6.4.14)$$

引入 $j(a,t)=\int_0^a i(a,c,t)\mathrm{d}c$,再利用变换 $u(a,t)=j(a,t)/p_\infty(a)$,可以得到 $u(a,t)$ 满足的方程为

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial a}+\frac{\partial u}{\partial t}=-\gamma(a)u+(1-u)\lambda_1(a)(1+\varepsilon\varphi(t))\int_0^A \lambda_2(a')p_\infty(a')u(a',t)\mathrm{d}a',\\
&u(0,t)=0, \qquad (6.4.15)\\
&u(a,0)=u_0(a)=\int_0^a i_0(a,c)\mathrm{d}c/p_\infty(a).
\end{aligned}$$

对于模型(6.4.15)当然可以对 $(1+\varepsilon\varphi(t))$ 给出无病平衡解全局渐近稳定的条件或不稳定的条件.在这儿更关心的是它的周期解的存在性.因为当 $\varepsilon=0$ 时,(6.4.15)就是一个自治系统,定理 6.4.1 指出当 $R_1>1$ 时(6.4.15)有一个全局渐近稳定的地方病平衡解.当 $\varepsilon\neq 0$ 时,(6.4.15)不会再有地方病平衡解,但很有可能产生地方病周期解,起码在 $|\varepsilon|$ 充分小时可以实现.下面的定理证实了这一猜测.

定理 6.4.3[75]　若 $R_1>1$,则有 $\varepsilon_0>0$,使得当 $|\varepsilon|<\varepsilon_0$ 时,(6.4.15)有以 T 为周期的周期解.

证明　定义 $\omega(t)=\int_0^A \lambda_2(a)p_\infty(a)u(a,t)\mathrm{d}a$,利用特征线法可以得到(6.4.15)的解

$$\begin{aligned}
u(a,t)=\;&u_0(a-t)\exp\left(-\int_0^t(\gamma(a-t+\tau)+\lambda_1(a-t+\tau))(1+\varepsilon\varphi(\tau))\omega(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\\
&+\int_0^t \lambda_1(a-t+\tau)(1+\varepsilon\varphi(x))\omega(x)\\
&\cdot\exp\left(-\int_x^t(\gamma(a-t+\tau)+\lambda_1(a-t+\tau))(1+\varepsilon\varphi(\tau))\omega(\tau)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}s,\ a\geqslant t,\\
u(a,t)=\;&\int_0^a \lambda_1(x)(1+\varepsilon\varphi(t-a+x))\omega(t-a+x) \qquad (6.4.16)\\
&\cdot\exp\left(-\int_x^a(\gamma(\tau)+\lambda_1(\tau)(1+\varepsilon\varphi(t-a+\tau))\omega(t-a+\tau)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}x,a<t.
\end{aligned}$$

由(6.4.15)的解表达式看出,当 $\omega(t)$ 是以 T 为周期的周期函数时,必定可以得到(6.4.15)的一个周期解.下面我们就考虑 $\omega(t)$ 的周期解的存在性.当 $t>A$ 时 $\omega(t)$ 满足的方程为

$$\begin{aligned}
\omega(t)=\;&\int_0^A p_\infty(a)\lambda_2(a)\int_0^a \lambda_1(x)(1+\varepsilon\varphi(t-a+x))\omega(t-a+x)\\
&\cdot\exp\left(-\int_x^a(\gamma(\tau)+\lambda_1(\tau)(1+\varepsilon\varphi(t-a+\tau))\omega(t-a+\tau))\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}a.
\end{aligned}$$

(6.4.17)

为了确定(6.4.17)周期解的存在性,定义函数空间

$$X_T = \{f(t) \mid f(x)\text{ 连续},\quad f(t) \geqslant 0,\quad f(t+T) = f(t)\}.$$

对任意 $\omega(t) \in X_T$,定义 $R \times X_T \to X_T$ 的映射H:

$$H(\varepsilon,\omega(t)) = \int_0^A p_\infty(a)\lambda_2(a)\int_0^a \lambda_1(x)(1+\varepsilon\varphi(t-a+x))\omega(t-a+x)$$
$$\cdot\exp\left(-\int_x^a(\gamma(\tau)+\lambda_1(\tau)(1+\varepsilon\varphi(t-a+\tau))\omega(t-a+\tau))\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}a-\omega(t).$$

由于 $R_1 > 0$,故当 $\varepsilon = 0$ 时,(6.4.15)有惟一全局稳定的地方病平衡解 $u(a,t) = u_\infty(a)$,将其代入到 $\omega(t)$ 的表达式中便可得到(6.4.17)的常数解 $\omega(t) = \omega_\infty^* = \int_0^A \lambda_2(a)p_\infty(a)u_\infty(a)\mathrm{d}a$,$\omega(t) = \omega_\infty^*$ 就是当 $\varepsilon = 0$ 时(6.4.17)的周期解,于是 $H(0,\omega_\infty^*) = 0$. 为了得到算子方程 $H(\varepsilon,\omega(t))$ 在 X_T 中的解,我们还必须说明 $\frac{\partial H(0,\omega_\infty^*)}{\partial\omega}$ 是一个 X_T 到 X_T 的同构映射,即 $\frac{\partial H(0,\omega_\infty^*)}{\partial\omega}$ 有界的逆算子. 对任意 $z(t) \in X_T$,

$$\frac{\partial H(0,\omega_\infty^*)}{\partial\omega}z(t) = \int_0^A p_\infty(a)\lambda_2(a)\int_0^a \lambda_1(x)z(t-a+x)$$
$$\cdot\exp\left(-\int_x^a(\gamma(\tau)+\lambda_1(\tau)\omega_\infty^*)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}a$$
$$-\omega_\infty^*\int_0^A p_\infty(a)\lambda_2(a)\int_0^a\lambda_1(x)\exp\left(-\int_x^a(\gamma(\tau)+\lambda_1(\tau)\omega_\infty^*)\mathrm{d}\tau\right)$$
$$\cdot\int_x^a\lambda_1(\tau)z(t-a+\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}x\mathrm{d}a - z(t).$$

由于

$$\omega_\infty^*\int_0^a\lambda_1(x)\exp\left(-\int_x^a(\gamma(\theta)+\lambda_1(\theta)\omega_\infty^*)\mathrm{d}\theta\right)\int_x^a\lambda_1(\tau)z(t-a+\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}x$$
$$= \omega_\infty^*\int_x^a\lambda_1(\tau)z(t-a+\tau)\int_0^\tau\lambda_1(x)\exp\left(-\int_x^a(\gamma(\theta)+\lambda_1(\theta)\omega_\infty^*)\mathrm{d}\theta\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau$$
$$= \int_x^a\lambda_1(\tau)z(t-a+\tau)\exp\left(-\int_\tau^a(\gamma(\theta)+\lambda_1(\theta)\omega_\infty^*)\mathrm{d}\theta\right)u_\infty(\tau)\mathrm{d}\tau,$$

我们得到

$$\frac{\partial H(0,\omega_\infty^*)}{\partial\omega}z(t) = \int_0^A p_\infty(a)\lambda_2(a)\int_0^a\lambda_1(x)\exp\left(-\int_x^a(\gamma(\tau)+\lambda_1(\tau)\omega_\infty^*)\mathrm{d}\tau\right)$$
$$\cdot(1-u_\infty(x))z(t-a+x)\mathrm{d}x\mathrm{d}a - z(t). \tag{6.4.18}$$

由(6.4.18)容易看出,$\left\|\frac{\partial H(0,\omega_\infty^*)}{\partial\omega}z(t)\right\| \leqslant M\|z(t)\|$,即 $\frac{\partial H(0,\omega_\infty^*)}{\partial\omega}$ 是从 X_T 到 X_T 的有界线性算子.

为研究$\frac{\partial H(0,\omega_\infty^*)}{\partial \omega}$的逆算子，对任意$h(t)\in X_T$，将其展开为 Fourier 级数

$$h(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_k \exp\left(\frac{-2k\pi i t}{T}\right),$$

其中

$$h_k=\frac{1}{T}\int_0^T h(t)\exp\left(\frac{2k\pi i t}{T}\right)\mathrm{d}t.$$

设方程

$$\frac{\partial H(0,\omega_\infty^*)}{\partial \omega}z(t)=h(t) \tag{6.4.19}$$

的解也可以展开为 Fourier 级数，$z(t)=\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} z_k\exp\left(\frac{-2k\pi i t}{T}\right)$。将$z(t)$的这一Fourier展开式代入方程(6.4.19)中，比较(6.4.19)两边$\exp\left(-\frac{2k\pi i t}{T}\right)$的系数得

$$z_k(v_k-1)=h_k,\quad k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots, \tag{6.4.20}$$

其中

$$v_k=\int_0^A p_\infty(a)\lambda_2(a)\int_0^a \lambda_1(x)\exp\left(-\int_x^a(\gamma(\tau)+\lambda_1(\tau)\omega_\infty^*)\mathrm{d}\tau\right)$$
$$\cdot(1-u_\infty(x))\exp\left(\frac{2k\pi i(a-x)}{T}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}a.$$

由于$0\leqslant u_\infty(a)\leqslant 1$，且当$0<a<A$时，$u_\infty(a)>0$，由$\omega_\infty^*$所满足的方程得

$$|v_k|<\int_0^A p_\infty(a)\lambda_2(a)\int_0^a\lambda_1(x)\exp\left(-\int_x^a(\gamma(\tau)+\lambda_1(\tau)\omega_\infty^*)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}a\leqslant 1. \tag{6.4.21}$$

(6.4.21)表明：对任意的k，有$|v_k|<1$，故由(6.4.20)可以解出$z_k=\frac{h_k}{v_k-1}$.

又由 Riemann-Lebesgue 定理知，$\lim\limits_{k\to\infty}v_k=0$，故有正常数$Q$，使得对一切$k$有

$$|z_k|\leqslant Q|h_k|,\quad k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots, \tag{6.4.22}$$

所以$\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty}|z_k|^2\leqslant Q^2\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty}|h_k|^2$，即$\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty}|z_k|^2$收敛．由 Riesz-Ficher 定理知，$z(t)=\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty}z_k\exp\left(\frac{-2\pi k i t}{T}\right)$定义了一个平方可积函数，又由$z(t)$满足的方程(6.4.19)知道$z(t)$是连续函数，即$z(t)\in X_T$．另一方面，由(6.4.18)和(6.4.19)得

$$\|z(t)\|\leqslant\|h(t)\|+\|z(t)\|(1-Q_1),$$

其中，

$$Q_1 = \int_0^A p_\infty(a)\lambda_2(a)\int_0^a \lambda_1(x)u_\infty(x)\exp\left(-\int_x^a (\gamma(\tau)+\lambda_1(\tau)\omega_\infty^*)\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}a.$$

所以有

$$\| z(t) \| \leqslant \frac{1}{Q_1} \| h(t) \|. \tag{6.4.23}$$

方程(6.4.19)的可解性和(6.4.23)表明$\frac{\partial H(0,\omega_\infty^*)}{\partial \omega}$是有界的逆算子.故由隐函数定理得,有 $\varepsilon_0 > 0$,当 $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ 时,有函数 $\omega_\varepsilon(t) \in X_T$,使得 $H(\varepsilon,\omega_\varepsilon(t)) \equiv 0$.即模型(6.4.15)对充分小的 ε 有 T 周期解. ▌

由于具有年龄和病程结构的传染病模型的复杂性,还有许多工作有待完善.例如非线性模型的研究、周期解的稳定性等.

6.4.3 模型的离散化与数值解

这一部分给出一个一般模型求解的数值方法,并证明其收敛性.考虑总人口的年龄密度函数为 $p(a,t)$ 的非线性非自治的具有年龄结构和病程结构的 SIS 模型

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial i}{\partial a} + \frac{\partial i}{\partial c} + \frac{\partial i}{\partial t} = -(\mu(a)+\gamma(a))i,\\
&i(a,0,t) = G(a,t),\\
&i(a,c,0) = i_0(a,c),\\
&i(a,a,t) = 0,
\end{aligned} \tag{6.4.24}$$

其中

$$\begin{aligned}
G(a,t) &= \left(p(a,t) - \int_0^a i(a,c,t)\mathrm{d}c\right)\\
&\quad \cdot \int_0^A\int_0^a \lambda(a,a',c,t,P(t),I(t))i(a',c,t)\mathrm{d}c\mathrm{d}a',\\
I(t) &= \int_0^A\int_0^a i(a,c,t)\mathrm{d}c\mathrm{d}a,\\
P(t) &= \int_0^A p(a,t)\mathrm{d}a.
\end{aligned}$$

由于无垂直传染,任何病人的病程总是小于他的年龄,故(6.4.24)的求解是在 $0 \leqslant c \leqslant a \leqslant A$ 上进行的.为了分析和叙述方便,我们仅在 $0 \leqslant t \leqslant A$ 上进行讨论,t 在任何一个有限区间的讨论完全类似.

模型(6.4.24)沿着特征线求解得

$$i(a,c,t) = \begin{cases} i_0(a-t,c-t)N(a)/N(a-t), & t \leqslant c,\\ G(a-c,t-c)N(a)/N(a-c), & t > c. \end{cases} \tag{6.4.25}$$

我们将利用(6.4.25)来构造出模型(6.4.24)的近似迭代序列,并证明该序列的

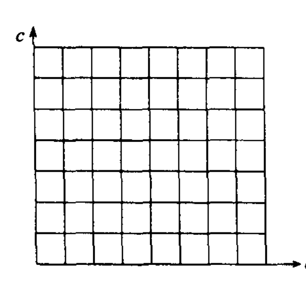


图6.6　a-c 平面上的网格点

收敛性.

迭代序列的构造

对比较大的自然数 m,将$[0,A]$区间 m 等分,记 $\Delta_m = \dfrac{A}{m}$,求 $i(a,c,t)$ 在正方形网格点 $a_j = j\Delta_m$、$c_k = k\Delta_m$、$t_l = l\Delta_m(1\leqslant j < m, 0\leqslant k < j, l\geqslant 0)$ 处的近似值.在 $a-c$ 平面上的网格点如图6.6所示.记 p_j^l 为总人口密度函数 $p(a,t)$ 在 $a = j\Delta_m, t = l\Delta_m$ 点的近似值,即 $p_j^l\approx p(j\Delta_m, l\Delta_m)$,$i_{jk}^l$ 为患者的年龄和病程密度函数 $i(a,c,t)$ 在 $a = j\Delta_m, c = k\Delta_m, t = l\Delta_m$ 点的拟似值,即 $i_{jk}^l\approx i(j\Delta_m, k\Delta_m, l\Delta_m)$.下面我们就给出 p_j^l 和 i_{jk}^l 的递推公式.

模型(6.4.24)迭代序列的初始值为

$$\begin{aligned}&i_{j,k}^0 = i_0(j\Delta_m, k\Delta_m), && 1\leqslant j < m,\ 0\leqslant k < j,\\ &p_j^0 = p_0(j\Delta_m), && j = 0,1,2,\cdots,m-1.\end{aligned}\tag{6.4.26}$$

记 $s_{j-1} = M(j\Delta_m)/M((j-1)\Delta_m)$, $q_{j-1} = N(j\Delta_m)/N((j-1)\Delta_m), j = 1,2,\cdots, m-1$,其中 $M(a) = \exp\left(-\int_0^a\mu(\tau)\mathrm{d}\tau\right)$, $N(a) = \exp\left(-\int_0^a(\mu(\tau)+\gamma(\tau))\mathrm{d}\tau\right)$.

当 $l\geqslant 1$ 时,关于 $p(a,t)$ 的迭代序列为

$$\begin{aligned}&p_j^l = s_{j-1}p_{j-1}^{l-1}, && j = 1,2,\cdots,m-1,\\ &P_l = \sum_{j=1}^{m-1}p_j^l\Delta_m, && l = 1,2,\cdots,\\ &p_0^l = \sum_{j=1}^{m-1}b(j\Delta_m, l\Delta_m, P_l)p_j^l\Delta_m.\end{aligned}\tag{6.4.27}$$

利用右端点矩形公式计算定积分,利用右上角的柱体公式计算重积分,则关于 $i(a,c,t)$ 的迭代序列为

$$\begin{aligned}&i_{j,k}^l = q_{j-1}i_{j-1,k-1}^{l-1}, \quad 2\leqslant j < m,\ 1\leqslant k < j,\ l = 1,2,\cdots,\\ &I_l = \sum_{j=2}^{m-1}\sum_{k=1}^{j-1}i_{j,k}^l\Delta_m^2, \quad l = 1,2,\cdots,\\ &i_{j,0}^l = \left(p_j^l - \sum_{k=1}^{j-1}i_{j,k}^l\Delta_m\right)\sum_{h=2}^{m-1}\sum_{k=1}^{h-1}\beta(j\Delta_m, h\Delta_m, k\Delta_m, l\Delta_m, P_l, I_l)i_{h,k}^l\Delta_m^2,\\ &\qquad 1\leqslant j < m,\ l = 1,2,\cdots.\end{aligned}\tag{6.4.28}$$

(6.4.26)～(6.4.28)构成了模型(6.4.24)的迭代序列,其中(6.4.26)的第一式和(6.4.27)是总人口年龄分布的迭代序列,它是收敛的.

迭代序列的收敛性

当 $\Delta_m\to 0$ 时,$p_j^l\to p(j\Delta_m, l\Delta_m)$,下面就直接利用这一结果来证明 $i_{j,k}^l\to$

$i(j\Delta_m, k\Delta_m, l\Delta_m)$.

为了说明迭代序列的合理性,需要先证明 $i_{j,0}^l$ 的非负性,这又与 $i_{j,k}^l$ 的有界性有关.

引理6.4.1[34] 对任意自然数 l_0,当 $0\leqslant l\leqslant l_0 m$ 时,$i_{j,k}^l(1\leqslant j<m, 0\leqslant k<j)$ 是有界序列.

证明 由 $i_{j,k}^l$ 的定义知,$|i_{j,k}^0|\leqslant i_0^*$,由于 p_j^l 是有界的,不妨记 $|p_j^l|\leqslant p_T^*$. 由(6.4.28)的第一式得 $|i_{j,k}^l|\leqslant|q_{j-1}i_{j-1,k-1}^{l-1}|\leqslant|i_{j-1,k-1}^{l-1}|$,由此递推得,或 $|i_{j,k}^l|\leqslant|i_{j-l,k-l}^0|\leqslant i_0^*$,或 $|i_{j,k}^l|\leqslant|i_{j-k,0}^{l-k}|$. 由(6.4.28)的最后一式得

$$
\begin{aligned}
|i_{j,0}^1|&\leqslant p_T^*\beta^*\sum_{h=2}^{m-1}\sum_{k=1}^{h-1}|i_{j-1,k-1}^0|\Delta_m^2\leqslant p_T^*\beta^* A^2 i_0^*,\\
|i_{j,0}^2|&\leqslant p_T^*\beta^*\sum_{h=2}^{m-1}\sum_{k=1}^{h-1}|i_{j-1,k-1}^1|\Delta_m^2\\
&\leqslant p_T^*\beta^* A^2 i_0^* + p_T^*\beta^*\sum_{h=2}^{m-1}|i_{h-1,0}^1|\Delta_m^2\\
&\leqslant p_T^*\beta^* A^2 i_0^*(1+p_T^*\beta^* A\Delta_m),\\
|i_{j,0}^3|&\leqslant p_T^*\beta^*\Big[\sum_{h=2}^{m-1}|i_{h-1,0}^2|+\sum_{h=3}^{m-1}|i_{h-2,0}^1|+\sum_{h=4}^{m-1}\sum_{k=3}^{h-1}|i_{h-3,k-3}^0|\Big]\Delta_m^2\\
&\leqslant p_T^*\beta^* i_0^* A^2[1+p_T^*\beta^* A\Delta_m+p_T^*\beta^* A\Delta_m(1+p_T^*\beta^* A\Delta_m)]\\
&\leqslant p_T^*\beta^* i_0^* A^2(1+p_T^*\beta^* A\Delta_m)^2.
\end{aligned}
$$

利用数学归纳法可以得到,当 $0\leqslant l\leqslant m$ 时,

$$
\begin{aligned}
|i_{j,0}^l|&\leqslant p_T^*\beta^* i_0^* A^2(1+p_T^*\beta^* A\Delta_m)^{l-1}\\
&\leqslant p_T^*\beta^* i_0^* A^2\exp(p_T^*\beta^* A^2).
\end{aligned}\tag{6.4.29}
$$

利用(6.4.29)可得对所有 $0\leqslant l\leqslant l_0 m, 1\leqslant j<m, 1\leqslant k<j$ 有

$$
|i_{j,k}^l|\leqslant(1+p_T^*\beta^* A^2\exp(p_T^*\beta^* A^2))^{l_0} i_0^*.\tag{6.4.30}
$$

(6.4.30)即表明序列 $i_{j,k}^l$ 是有界的. ▌

引理6.4.2[34] 设 $p_j^0\geqslant\sum_{k=0}^{j-1}i_{j,k}^0\Delta_m(1\leqslant j<m)$ 当 Δ_m 充分小时成立,则对任意自然数 l 有 $i_{j,0}^l\geqslant 0(1\leqslant j<m)$.

证明 由(6.4.28)的第一式得,$i_{j,k}^1=q_{j-1}i_{j-1,k-1}^0\geqslant 0(1\leqslant j<m, 1\leqslant k<j)$. 记 $G_j^l=\sum_{h=2}^{m-1}\sum_{k=1}^{h-1}\beta(j\Delta_m, h\Delta_m, k\Delta_m, l\Delta_m, P_l, I_l)i_{h,k}^l\Delta_m^2$,由(6.4.28)的最后一式得,对所有 $1\leqslant j<m$ 有

$$
i_{j,0}^1=\Big(s_{j-1}p_{j-1}^0-\sum_{k=1}^{j-1}q_{j-1}i_{j-1,k-1}^0\Delta_m\Big)G_j^1
$$

$$= s_{j-1}G_j^1\left(p_{j-1}^0 - \exp\left(-\int_{(j-1)\Delta_m}^{j\Delta_m}\gamma(\sigma)\mathrm{d}\sigma\right)\sum_{k=1}^{j-1} i_{j-1,k-1}^0\Delta_m\right)$$

$$\geqslant s_{j-1}G_j^1\left(p_{j-1}^0 - \sum_{k=0}^{j-2} i_{j-1,k}^0\Delta_m\right) \geqslant 0. \qquad (6.4.31)$$

又由引理 6.4.1 知，G_j^l 是有界的，故当 Δ_m 比较小时

$$p_j^1 - \sum_{k=0}^{j-1} i_{j,k}^1\Delta_m = p_j^1 - \sum_{k=1}^{j-1} i_{j,k}^1\Delta_m - i_{j,0}^1\Delta_m$$

$$= \left(p_j^1 - \sum_{k=1}^{j-1} i_{j,k}^1\Delta_m\right)(1 - G_j^1\Delta_m) \geqslant 0, \qquad (6.4.32)$$

即当 $l = 1$ 时 $i_{j,0}^1 \geqslant 0$，且 $p_j^1 \geqslant \sum_{k=0}^{j-1} i_{j,k}^1\Delta_m$ 成立. 设此结论对 l 成立，即 $i_{j,0}^l \geqslant 0$，且 $p_j^l \geqslant \sum_{k=0}^{j-2} i_{j,k}^l\Delta_m$，对 $l+1$ 有

$$i_{j,k}^{l+1} = q_{j-1} i_{j-1,k-1}^l \geqslant 0, \qquad 1 \leqslant j < m,\ 1 \leqslant k < j. \qquad (6.4.33)$$

由(6.4.33) 可以推出 $G_j^{l+1} \geqslant 0$，从而有

$$i_{j,0}^{l+1} = \left(p_j^{l+1} - \sum_{k=1}^{j-1} i_{j,k}^{l+1}\Delta_m\right)G_j^{l+1}$$

$$= s_{j-1}G_j^{l+1}\left(p_{j-1}^l - \sum_{k=1}^{j-1} i_{j-1,k-1}^l\Delta_m \exp\left(-\int_{(j-1)\Delta_m}^{j\Delta_m}\gamma(\sigma)\mathrm{d}\sigma\right)\right)$$

$$\geqslant s_{j-1}G_l^{l+1}\left(p_{j-1}^l - \sum_{k=0}^{j-2} i_{j-1,k}^l\Delta_m\right) \geqslant 0. \qquad (6.4.34)$$

由 G_j^l 的有界性知，当 Δ_m 较小时有

$$p_j^{l+1} - \sum_{k=0}^{j-1} i_{j,k}^{l+1}\Delta_m = \left(p_j^{l+1} - \sum_{k=1}^{j-1} i_{j,k}^{l+1}\Delta_m\right)(1 - G_j^{l+1}\Delta_m) \geqslant 0. \qquad (6.4.35)$$

(6.4.34) 和(6.4.35) 说明 $i_{j,0}^{l+1} \geqslant 0$，且 $p_j^{l+1} \geqslant \sum_{k=0}^{j-2} i_{j,k}^{l+1}\Delta_m$. 所以由归纳法得到引理 6.4.2 的结论成立. ∎

定理 6.4.4[34]　设对模型(6.4.24) 的基本假设和引理 6.4.2 的条件成立，则对任意 $T > 0$ 有常数 C，使得对 $1 \leqslant j < m, 0 \leqslant k < j, 0 \leqslant l\Delta_m \leqslant T$ 有

$$| i_{j,k}^l - i(j\Delta_m, k\Delta_m, l\Delta_m) | \leqslant C\Delta_m.$$

证明　由于 T 是给定的，故必有 l_0 使得 $l_0 m\Delta_m > T$. 由引理 6.4.1 知当 $0 \leqslant l \leqslant l_0 m$ 时，$i_{j,k}^l$ 有界，记为 $| i_{j,k}^l | \leqslant i_T^*$. 引入记号

$$v_{j,k}^l = i_{j,k}^l - i(j\Delta_m, k\Delta_m, l\Delta_m), \qquad l = 0,1,2,\cdots,l_0 m, \qquad (6.4.36)$$

则显然有

$$v_{j,k}^0 = 0, \qquad 0 \leqslant j \leqslant m,\ 0 \leqslant k \leqslant j.$$

对 $1 \leqslant j < m, 0 \leqslant k < j, 0 \leqslant l$，利用(6.4.28)递推得

$$v_{j,k}^{l} = \begin{cases} q_{j-1}q_{j-2}\cdots q_{j-l}v_{j-l,k-l}^{0}, & k \geqslant l, \\ q_{j-1}q_{j-2}\cdots q_{j-k}v_{j-k,0}^{l-k}, & k < l. \end{cases}$$

由于 $0 \leqslant q_j \leqslant 1$，故有

$$\begin{aligned} &|v_{j,k}^{l}| = 0, & l \leqslant k < j, \\ &|v_{j,k}^{l}| \leqslant |v_{j-k,0}^{l-k}|, & k < l,\ k < j. \end{aligned} \tag{6.4.37}$$

由(6.4.37)看出，$v_{j,k}^{l}$ 的大小完全由 $v_{j,0}^{l}$ 的大小控制. 由定义

$$\begin{aligned} v_{j,0}^{l} = &\left(p_j^{l} - \sum_{k=1}^{j-1} i_{j,k}^{l}\Delta_m\right) \\ &\cdot \sum_{h=2}^{m-1}\sum_{k=1}^{h-1}\beta(j\Delta_m, h\Delta_m, k\Delta_m, l\Delta_m, P_l, I_l)\, i_{j,k}^{l}\Delta_m^2 \\ &- \left(p(j\Delta_m, l\Delta_m) - \int_0^{j\Delta_m} i(j\Delta_m, c, l\Delta_m)\mathrm{d}c\right) \\ &\cdot \int_0^{A}\int_0^{a'}\beta(j\Delta_m, a', c, l\Delta_m, P(l\Delta_m), I(l\Delta_m))\, i(a', c, l\Delta_m)\mathrm{d}c\mathrm{d}a'. \end{aligned} \tag{6.4.38}$$

利用(6.4.38)对 $|v_{j,0}^{l}|$ 进行估计得

$$\begin{aligned} |v_{j,0}^{l}| \leqslant \beta^{*} i_T^{*}A^2\Big[&|p_j^{l} - p(j\Delta_m, l\Delta_m)| \\ &+ \left|\sum_{k=1}^{j-1} i_{j,k}^{l}\Delta_m - \int_0^{j\Delta_m} i(j\Delta_m, c, l\Delta_m)\mathrm{d}c\right|\Big] \\ &+ p_T^{*}\Big[\beta^{*}\sum_{h=2}^{m-1}\sum_{k=1}^{h-1}|v_{h,k}^{l}|\Delta_m^2 \\ &+ i_T^{*}\sum_{h=2}^{m-1}\sum_{k=1}^{h-1}|\beta(j\Delta_m, h\Delta_m, k\Delta_m, l\Delta_m, P_l, I_l) \\ &- \beta(j\Delta_m, h\Delta_m, k\Delta_m, l\Delta_m, P(l\Delta_m), I(l\Delta_m))| \\ &+ \beta^{*}\sum_{h=2}^{m-1}\sum_{k=1}^{h-1}|i(h\Delta_m, k\Delta_m, l\Delta_m) - i(\xi_h, \eta_k, l\Delta_m)|\Delta_m^2 \\ &+ i_T^{*}\sum_{h=2}^{m-1}\sum_{k=1}^{h-1}|\beta(j\Delta_m, h\Delta_m, k\Delta_m, l\Delta_m, P(l\Delta_m), I(l\Delta_m)) \\ &- \beta(j\Delta_m, \xi_h, \eta_k, l\Delta_m, P(l\Delta_m), I(l\Delta_m))|\Big], \end{aligned} \tag{6.4.39}$$

其中 ξ_h、η_k 分别是满足 $(h-1)\Delta_m \leqslant \xi_h \leqslant h\Delta_m$、$(k-1)\Delta_m \leqslant \eta_k \leqslant k\Delta_m$ 的实数.

利用 $p(a,t)$、$i(a,c,t)$ 及函数 β 的 Lipschitz 性质，适当处理常数以后由(6.4.39)可以推出

$$
\begin{aligned}
v_{j,0}^{k} &= c_1\Delta_m + c_2\sum_{k=1}^{j-1} | v_{j,k}^{l} | \Delta_m + c_3\sum_{h=2}^{m-1}\sum_{k=1}^{h-1} | v_{j,k}^{l} | \Delta_m^2 \\
&\quad + c_4(| P_l - P(l\Delta_m) | + | I_l - I(l\Delta_m) |). \qquad (6.4.40)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& | I_l - I(l\Delta_m) | \\
&= \left| \sum_{h=2}^{m-1}\sum_{k=1}^{h-1} i_{j,k}^{l}\Delta_m^2 - \int_0^A\int_0^a i(a,c,l\Delta_m)\mathrm{d}c\mathrm{d}a \right| \\
&\leqslant \left| \sum_{h=2}^{m-1}\sum_{k=1}^{h-1}(i_{j,k}^{l} - i(h\Delta_m, k\Delta_m, l\Delta_m))\Delta_m^2 \right| \\
&\quad + \sum_{h=2}^{m-1}\sum_{k=1}^{h-1} | i(h\Delta_m, k\Delta_m, l\Delta_m) - i(\xi_h, \eta_k, l\Delta_m) | \Delta_m^2 \\
&\leqslant \sum_{h=2}^{m-1}\sum_{k=1}^{h-1} | i_{j,k}^{l} | \Delta_m^2 + c_5\Delta_m. \qquad (6.4.41)
\end{aligned}
$$

利用类似于(6.4.41)的方法可得

$$
| P_l - P(l\Delta_m) | \leqslant c_6\Delta_m. \qquad (6.4.42)
$$

重新定义常数后,利用(6.4.41)和(6.4.42)可得

$$
| v_{j,0}^{l} | \leqslant c_1\Delta_m + c_2\sum_{k=1}^{j-1} | v_{j,k}^{l} | \Delta_m + c_3\sum_{h=2}^{m-1}\sum_{k=1}^{h-1} | v_{j,k}^{l} | \Delta_m^2. \qquad (6.4.43)
$$

利用(6.4.43)得,对所有 $1 \leqslant j < m$ 有

$$
\begin{aligned}
& | v_{j,0}^{1} | \leqslant c_1\Delta_m, \\
& | v_{j,0}^{2} | \leqslant c_1\Delta_m(1 + (c_2 + c_3A)\Delta_m), \\
& | v_{j,0}^{3} | \leqslant c_1\Delta_m(1 + (c_2 + c_3A)\Delta_m)^2.
\end{aligned}
$$

由此猜想

$$
| v_{j,0}^{l} | \leqslant c_1\Delta_m(1 + (c_2 + c_3A)\Delta_m)^{l-1}. \qquad (6.4.44)
$$

当 $l = l + 1$ 时,补充定义 $v_{j,0}^{l} = 0(l \leqslant 0)$ 后由(6.4.43)得

$$
\begin{aligned}
| v_{j,0}^{l-1} | &\leqslant c_1\Delta_m + c_2\Delta_m(| v_{j-1,0}^{l} | + | v_{j-2,0}^{l-1} | + \cdots + | v_{1,0}^{l-j+1} |) \\
&\quad + c_3\Delta_m^2\sum_{h=2}^{m-1}(| v_{h-1,0}^{l} | + | v_{h-2,0}^{l-1} | + \cdots + | v_{1,0}^{l-h+1} |) \\
&\leqslant c_1\Delta_m + c_2\Delta_m c_1\Delta_m\sum_{k=0}^{l-1}(1 + (c_2 + c_3A)\Delta_m)^k \\
&\quad + c_3\Delta_m^2 c_1\Delta_m\sum_{h=2}^{m-1}\sum_{k=0}^{l-1}(1 + (c_2 + c_3A)\Delta_m)^k \\
&= c_1\Delta^2\left[1 + (c_2 + c_3A)\Delta_m\sum_{h=2}^{l-1}(1 + (c_2 + c_3A)\Delta_m)^k\right] \\
&= c_1\Delta^2(1 + (c_2 + c_3A)\Delta_m)^l. \qquad (6.5.45)
\end{aligned}
$$

由归纳法得(6.4.44)对所有 l 为真. 利用$\dfrac{A}{m}$,由(6.4.45)得

$$
\begin{aligned}
| v_{j,0}^{l} | &\leqslant c_1 \Delta_m \left(1 + (c_2 + c_3 A)\frac{A}{m}\right)^{l_0 m} \\
&= c_1 \Delta_m \left(1 + \frac{(c_2 + c_3 A)A}{m}\right)^{\frac{m}{(c_2+c_3A)A}\cdot l_0 A(c_2+c_3A)} \\
&\leqslant c_1 \Delta_m \exp(l_0 A(c_2 + c_3 A)) \leqslant C\Delta_m .
\end{aligned}
$$

定理 6.4.4 证毕 ▍

这一章介绍了具有年龄结构的传染病模型的研究工作的一些基本内容，在建立模型、模型的适定性、模型的渐近性态分析、模型的数值解、模型的应用方面还有大量的工作有待深入[76,77,78]. 这些研究工作更具有挑战性，希望本章的内容使读者对这方面的研究工作有所了解和有兴趣从事这方面的研究工作.

参考文献

[1] R Shrap, A J Lotka. A problem in age distribution. Philos. Mag., 1911, 21:435～438

[2] A J Lotka. The Stability of the normal age distribution. Proc. Nat. Acad. Sci., 1922, 8:339～345

[3] N Heyfitz. Introduction to the Mathematics of Population. Addison-Wesley, Reading, 1968

[4] J H Pollard. Mathematical Models for the Growth of Human Population. Cambridge University Press, 1973

[5] G F Webb. Theory of Nonlinear Age-dependent Population Dynamics. New York: Marcel Dekker, 1985

[6] Song Jian, Yu Jingyuan. Population System Control. Berlin: Springer-Verlag, 1987

[7] 于景元，郭宝珠，朱广田. 人口分布参数系统控制理论. 武汉：华中理工大学出版社，1999

[8] B Charlesworth. Evolution in Age-structured Populations. secod edition, Cambridge University press. 1994

[9] J M Cushing. An Introduction to Structured Population Dynamics. SIAM, Philadelphia, 1998

[10] 周义仓，赫孝良. 数学建模实验. 西安：西安交通大学出版社，1999

[11] P H Leslie. On the use of matrices in certain population mathematics. Biometrika, 1945, 33:183～212

[12] P H Leslie. Some further notes on the use of matrices in population mathematics. Biometrica 1948, 35: 213～245

[13] H Caswell. Matrix Population Model: Construation, Analysis, and Interpretation. Sinauer Associates Inc., Sunderland, Massachusetts, 1989

[14] F R Gantmacher. Application of the Theory of Matrices. Interscience Publisher Inc., New York, 1959

[15] J Impagliazzo. Deterministic Aspects of Mathematical Demography. Biomathematics 13, Berlin: Springer-Verlag, 1985

[16] J M Cushing, Zhou Yicang. The net reproductive value and stability in matrix population models. Natural Resource Modeling, 1994, 8(4):297～333

[17] J P LaSalle. The Stability and Control of Discrete Process. Springer-Verlag, New York, 1986

[18] S Tuljapurkar, H Caswell. Structured Population Models in Marine, Terrestrial, and Freshwater Systems, Chapman & Hall, New York, 1997

[19] J M Cushing. Nonlinear matrix models and population dynamics. Natural Resource Modeling, 1988, 2(4):539～580

[20] J M Cushing. A strong ergodic theorem for some nonlinear matrix models for the dynamics of structured populations. Natural Resource Modeling, 1989, 3(3): 331～357

[21] Zhou Yicang, J M Cushing. Stability conditions for equilibria of nonlinear matrix population models. Journal of Differ Equations Appl., 1998, 4: 95～126

[22] L J S Allen. A density-dependent Leslie matrix model. Math. Biosci., 1989, 95: 179～187

[23] A Wikan, E Mjølhus. Periodicity of 4 in age-structured population models with density dependence. J. Theor. Biol., 1995, 173: 109～119

[24] F Hoppensteadt. Mathematical Theories of Populations Demographics, Genetics and Epidemics, SIAM, Philadelphia, 1975

[25] W Feller. On the integral equation of renewal theory. Ann. Math. Stat., 1941, 12: 243～267

[26] J M Cushing. Periodic Mckendrick equations for age-structured population growth, Comp. & Maths. with Appls., 1986, 12A(4/5): 513～526

[27] 武玉英,赵丽霞. 人口发展方程的波动. 系统工程理论与实践, 1995, 4: 16～24

[28] Zhou Yicang, Ma Zhien. The periodic solutions for time dependent age-structured population models. Acta of Mathematica Scientia, 2000, 20B(2): 155～161

[29] M E Gurtin, R C MacCamy. Non-linear age-dependent population dynamics. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 1974, 54(3): 281～300

[30] J Pruss. Stability analysis for equalibria in age-specific population dynamics. Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Appliacations, 1983, 7(12): 1291～1313

[31] E Weinstock, C Rorres. Conditions determining the local stability of populations. Mathematical Population Studies, 1989, 2(1): 69～87

[32] M Iannelli. Mathematical Theory of Age-Structured Population Dynamics. Giardini Editori e Stampatori, Pisa, 1995

[33] J M Cushing. Global branches of equalibrium solutions of the Mckendrick equations for age-strucured population growth. Comp. & Maths. with Appls., 1985, 11(1-3): 175～188

[34] 周义仓. 具有年龄与病程结构的流行病模型及其渐近性态. 西安交通大学博士学位论文, 1999

[35] 周义仓. 一个具有年龄结构种群模型的全局稳定性. 西安交通大学学报, 1999, 33(10): 73～76

[36] 周义仓,秦军林. 一个具有年龄结构非自治种群模型的稳定性与周期解. 高校应用数学学报, 14A(4): 457～463

[37] 周义仓,秦军林. 具有年龄结构种群模型的数值解. 工程数学学报, 1999, 14(5): 577～583

[38] T Kostova. The Age-dependent population model: numerical check of stability /instability of a steady state. Math. Comp. Modelling, 2000, (31): 109～116

[39] Zhou Yicang. The well-posedness of size-structured population models with density depedent parameters. 生物数学学报, 1995, 10(4): 1～13

[40] 周义仓. 具有年龄和一般结构的种群模型研究. 工程数学学报, 2000, 17(增刊): 59～66

[41] C C Spicer. The mathematical modelling of influenza epidemics. Brit. Med. Bull., 1979, 35: 23～28

[42] L J S Allen. Some discrete-time SI, SIR, and SIS epidemic models. Mathematical Biosciences., 1994, 124: 83～105

[43] L J S Allen, A M Burgin. Comparison of deterministic and stochastic SIS and SIR models in discrete time. Mathematical Biosciences, 2000, 163: 1～33

[44] C Castillo-Chavez, A Yakubu. Discrete-time S-I-S models with simple and complex population dynam-

ics, in Mathematical approaches for emerging and reemerging infectious diseases, IMA Volume 126, C Castillo-Chavez, S Blower, et al eds, Springer-Verlag, IMA Volume, 2001,125:153~163

[45] C Castillo-Chavez, A Yakubu Dispersal. Disease and life-history evolution. Math. Biosci, 2001, 173: 35~53

[46] M Lesnoff, R Lancelot, E Tillard, I R Dohoo. A steady-state approach of benefit-cost analysis with a periodic Leslie-matrix model presentation and application to the evolution of a sheep-diseases preventive scheme in Kolda, Sengal, Preventive Veterinary Medicine, 2000, 46:113~128

[47] D J Daley, J Gani. Epidemic Modelling, An Introduction, Cambridge University Press, 1999

[48] J P LaSalle 著,陆征一译.动力系统的稳定性.成都:四川科技出版社,2002

[49] L J S Allen, M A Jones, C E Martin. A discrete-time model with vaccination for a measles epidemic. Math. Bioscie., 1991, 105:111~131

[50] L J S Allen, D B Thrasher. The effects of vaccination in an age-dependent model for varicella and Herpes zoster. IEEE Transactions on Automatic Control, 1998, 43(6):779~789

[51] J Griffiths, D Lowrie, J Williams. An age-structured model for the AIDS epidemic. European Journal of Operational Research, 2000, 124:1~14

[52] H W Hethcote, J W V Ark. Mdeling HIV Transmission and AIDS in the United States. Lecture Notes in Biomathematics, 95. Springer-Verlag. 1992

[53] 井竹君.数学与艾滋病.数学的实践与认识,1990,20(4):47~60

[54] S Perlson, et. al. Mathematical analysis of HIV-I dynamics in Vivo. SIAM Review, 1999, 41:3~44

[55] V Capasso. Matherkatical Structures of Epidemic Systems. Lecture Notes in Biomathematics 97. Berlin: Springer-Verlag, Haidelberg, 1993

[56] Xue-zhi Li, Geni Gupur, Guang-tian Zhu. Mathematical Theory of Age-Stuctured Epidemic Dynamics. Research Information Ltd., 2003

[57] C Castillo-Chavez, S Blower, P van den Driessche, D Kirschnaer, A Z Yakubu. Mathematical Approaches for Emerging and Reemerging Infectious Diseaces, Models, Methods, and Theory. IMA Volume 126. New York: Springer-Verlag, 2002

[58] S Busenberg, K Cooke, M Iannelli. Edemic thresholds and stability in a class of age-structured epidemics. SIAM J. Appl. Math., 1988, 48:1379~1395

[59] S Busenberg, M Iannelli, H R Thieme. Global behavior of an age-structured epidemic model, SIAM J. Math. Anal., 1991, 22(4):1065~1080

[60] M Iannelli, F A Miller, A Pugliese. Analytial and numerical results for the age-structured SIS epidemic model with mixed inter-intracohort transmission. SIAM J. Math. Anal., 1992, 23(3):662~688

[61] A Pazy. Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1983

[62] M Langlais. A mathematical analysis of the SIS intra-cohort model with age-structure, in "Mathematical Population Dynamics", Vol. 1. Winning, Canada: Wuerz Publishing Ltd., 1995, 103~117

[63] M Langlais, S Bursenberg. Global behavior in age structured SIS Models with seasonal periodicities and vertical transmission. J Math. Appls., 1997, 213:511~533

[64] J Müller. Optimal vaccination patterns in age-structured populations. SIAM J. Appl. Math., 1998, 59 (1):222~241

[65] 刘汉武,徐洁,刘启明.连续接种的具有年龄结构的 SIS 传染病模型.工程数学学报.2002,19(4):

25～29

[66] 朱礼营,周义仓.具有年龄结构的接种流行病模型正平衡解的全局稳定性.生物数学学报,2003,18(1):27～32

[67] 朱礼营.具有年龄结构的接种流行病模型研究.西安交通大学硕士论文,2000

[68] 刘汉武.有接种的 SIS 型传染病模型.西安交通大学硕士论文,2001

[69] H W Hethcote. Optimal ages of vaccination for measles. Math. Biosci., 1988,89:29～52

[70] N G Becker, V Rouderfer. Simutaneous control of measles and rubella by multidose vaccination schedules. Math. Biosci.,1996,131:81～102

[71] M Iannelli, M Y Kim, J Park. Asymptotic behavior for an SIS epidemic model and its approximation. Noninear Analysis,1999,35:797～814

[72] X Z Li,G Gupur, G T Zhu. Threshold and stability results for an age-structured SEIR Epidemic model. Comp. Math. with Appls.,2001,42:883～907

[73] F Hoppensteadt. An age dependent epidemic model,J Franklin Inst., 1974,197:325～333

[74] K Dietz, D Schenzle. Proportionate mixing models for age-dependent infection transmission. J. Math. Biology,1985,22:117～120

[75] Zhou Yicang, Baojun Song, Zhien Ma. The global stability analysis for an SIS model with age and infection age structures, in: Mathematical Approaches for Emerging and Reemerging Infectious Diseases, Models,Methods and Theory, C Castillo-Chanez et al eds, IMA Volume, 126:313～335, New York: Springer-Verlag,2002

[76] S A Gourley, J H Wu. Exitinction and periodic oscillations in an age-structured population model in a patchy environment. J. Math. Anal. Appl., 2004,289(2):431～445

[77] O Diekmann,M Gyllenberg,J A J Metz. Steady-state analysis of structured population models,Theore. Popu. Biol., 2003,63(4):309～338

[78] O Diekmann,M Gyllenberg, H Huang,et al. On the formulation and analysis of general deterministic structured population models II. Nonlinear theory,J. Math. Biology,2001,43(2):157～189

《现代数学基础丛书》出版书目

（按出版时间排序）

1 数理逻辑基础(上册) 1981.1 胡世华、陆钟万 著
2 紧黎曼曲面引论 1981.3 伍鸿熙、吕以辇、陈志华 著
3 组合论(上册) 1981.10 柯召、魏万迪 著
4 数理统计引论 1981.11 陈希孺 著
5 多元统计分析引论 1982.6 张尧庭、方开泰 著
6 概率论基础 1982.8 严士健、王隽骧、刘秀芳 著
7 数理逻辑基础(下册)1982.8 胡世华、陆钟万 著
8 有限群构造(上册) 1982.11 张远达 著
9 有限群构造(下册) 1982.12 张远达 著
10 环与代数 1983.3 刘绍学 著
11 测度论基础 1983.9 朱成熹 著
12 分析概率论 1984.4 胡迪鹤 著
13 巴拿赫空间引论 1984.8 定光桂 著
14 微分方程定性理论 1985.5 张芷芬、丁同仁、黄文灶、董镇喜 著
15 傅里叶积分算子理论及其应用 1985.9 仇庆久等 编
16 辛几何引论 1986.3 J.柯歇尔、邹异明 著
17 概率论基础和随机过程 1986.6 王寿仁 著
18 算子代数 1986.6 李炳仁 著
19 线性偏微分算子引论(上册) 1986.8 齐民友 著
20 实用微分几何引论 1986.11 苏步青等 著
21 微分动力系统原理 1987.2 张筑生 著
22 线性代数群表示导论(上册)1987.2 曹锡华等 著
23 模型论基础 1987.8 王世强 著
24 递归论 1987.11 莫绍揆 著
25 有限群导引(上册) 1987.12 徐明曜 著
26 组合论(下册) 1987.12 柯召、魏万迪 著
27 拟共形映射及其在黎曼曲面论中的应用 1988.1 李忠 著
28 代数体函数与常微分方程 1988.2 何育赞 著
29 同调代数 1988.2 周伯壎 著
30 近代调和分析方法及其应用 1988.6 韩永生 著
31 带有时滞的动力系统的稳定性 1989.10 秦元勋等 编著

32 代数拓扑与示性类 1989.11 马德森著 吴英青、段海鲍译
33 非线性发展方程 1989.12 李大潜、陈韵梅 著
34 反应扩散方程引论 1990.2 叶其孝等 著
35 仿微分算子引论 1990.2 陈恕行等 编
36 公理集合论导引 1991.1 张锦文 著
37 解析数论基础 1991.2 潘承洞等 著
38 拓扑群引论 1991.3 黎景辉、冯绪宁 著
39 二阶椭圆型方程与椭圆型方程组 1991.4 陈亚浙、吴兰成 著
40 黎曼曲面 1991.4 吕以辇、张学莲 著
41 线性偏微分算子引论(下册) 1992.1 齐民友 著
42 复变函数逼近论 1992.3 沈燮昌 著
43 Banach 代数 1992.11 李炳仁 著
44 随机点过程及其应用 1992.12 邓永录等 著
45 丢番图逼近引论 1993.4 朱尧辰等 著
46 线性微分方程的非线性扰动 1994.2 徐登洲 马如云 著
47 广义哈密顿系统理论及其应用 1994.12 李继彬、赵晓华、刘正荣 著
48 线性整数规划的数学基础 1995.2 马仲蕃 著
49 单复变函数论中的几个论题 1995.8 庄圻泰 著
50 复解析动力系统 1995.10 吕以辇 著
51 组合矩阵论 1996.3 柳柏濂 著
52 Banach 空间中的非线性逼近理论 1997.5 徐士英、李冲、杨文善 著
53 有限典型群子空间轨道生成的格 1997.6 万哲先、霍元极 著
54 实分析导论 1998.2 丁传松等 著
55 对称性分岔理论基础 1998.3 唐云 著
56 Gel'fond-Baker 方法在丢番图方程中的应用 1998.10 乐茂华 著
57 半群的 S-系理论 1999.2 刘仲奎 著
58 有限群导引(下册) 1999.5 徐明曜等 著
59 随机模型的密度演化方法 1999.6 史定华 著
60 非线性偏微分复方程 1999.6 闻国椿 著
61 复合算子理论 1999.8 徐宪民 著
62 离散鞅及其应用 1999.9 史及民 编著
63 调和分析及其在偏微分方程中的应用 1999.10 苗长兴 著
64 惯性流形与近似惯性流形 2000.1 戴正德、郭柏灵 著
65 数学规划导论 2000.6 徐增堃 著
66 拓扑空间中的反例 2000.6 汪林、杨富春 编著
67 拓扑空间论 2000.7 高国士 著
68 非经典数理逻辑与近似推理 2000.9 王国俊 著
69 序半群引论 2001.1 谢祥云 著

70 动力系统的定性与分支理论 2001.2 罗定军、张祥、董梅芳 编著
71 随机分析学基础（第二版）2001.3 黄志远 著
72 非线性动力系统分析引论 2001.9 盛昭瀚、马军海 著
73 高斯过程的样本轨道性质 2001.11 林正炎、陆传荣、张立新 著
74 数组合地图论 2001.11 刘彦佩 著
75 光滑映射的奇点理论 2002.1 李养成 著
76 动力系统的周期解与分支理论 2002.4 韩茂安 著
77 神经动力学模型方法和应用 2002.4 阮炯、顾凡及、蔡志杰 编著
78 同调论——代数拓扑之一 2002.7 沈信耀 著
79 金兹堡-朗道方程 2002.8 郭柏灵等 著
80 排队论基础 2002.10 孙荣恒、李建平 著
81 算子代数上线性映射引论 2002.12 侯晋川、崔建莲 著
82 微分方法中的变分方法 2003.2 陆文端 著
83 周期小波及其应用 2003.3 彭思龙、李登峰、谌秋辉 著
84 集值分析 2003.8 李雷 吴从炘 著
85 数理逻辑引论与归结原理 2003.8 王国俊 著
86 强偏差定理与分析方法 2003.8 刘文 著
87 椭圆与抛物型方程引论 2003.9 伍卓群、尹景学 著
88 有限典型群子空间轨道生成的格（第二版）2003.10 万哲先、霍元极 著
89 调和分析及其在偏微分方程中的应用（第二版）2004.3 苗长兴 著
90 稳定性和单纯性理论 2004.6 史念东 著
91 发展方程数值计算方法 2004.6 黄明游 编著
92 传染病动力学的数学建模与研究 马知恩 周义仓 王稳地 靳祯 著

[General Information]
书名=传染病动力学的数学建模与研究
页数=399
SS号=11390962